

УДК 517.982.22+517.983.23

С. В. Асташкин, Е. М. Семенов

Пространства, определяемые функцией Пэли

Изучаются ряды Хаара и Радемахера в симметричных пространствах, а также свойства пространств, определяемых функцией Пэли. В частности, найдена симметрическая оболочка пространства функций, имеющих равномерно ограниченную функцию Пэли.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: симметричное пространство, функции Хаара, функции Радемахера, функция Пэли, вещественный метод интерполяции.

DOI: 10.4213/sm8159

§ 1. Введение и предварительные сведения

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *симметричным пространством* (кратко с.п.) или *перестановочно-инвариантным пространством*, если:

- 1) оно идеально, т.е. из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для п.в. $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ следует $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функций x и y , т.е. равенства

$$|\{t \in [0, 1] : |y(t)| > u\}| = |\{t \in [0, 1] : |x(t)| > u\}|, \quad u > 0,$$

где $|a|$ – мера Лебега множества $a \subset \mathbb{R}$, и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

В частности, любая измеримая на $[0, 1]$ функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева перестановкой

$$x^*(t) := \inf\{u \geq 0 : |\{s \in [0, 1] : |x(s)| > u\}| < t\}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Если X – с.п. на $[0, 1]$, то *двойственное* пространство X' состоит из всех y , для которых

$$\|y\|_{X'} = \sup\left\{\int_0^1 x(t)y(t) dt : \|x\|_X \leq 1\right\} < \infty.$$

Пространство X' также симметрично; оно изометрически вложено в сопряженное X^* ; при этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Симметричное пространство X называется *максимальным*, если из того, что $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \rightarrow x$ п.в. на $[0, 1]$, вытекает

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00077а, №12-01-00198а и №11-01-00614а).

$x \in X$ и $\|x\|_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Далее, следуя [1], будем считать, что все рассматриваемые с.п. сепарабельны или максимальны. Предполагается также выполненным условие нормировки $\|\kappa_{[0,1]}\|_E = 1$, где $\kappa_e(t)$ – характеристическая функция измеримого подмножества $e \subset [0, 1]$. Тогда $L_\infty \subset E \subset L_1$ и $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty}$ для любого $x \in L_\infty$. В любом с.п. E ограниченно действует оператор подобного преобразования аргумента $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)\kappa_{[0,1]}(t/\tau)$, $0 \leq t \leq 1$, где $\tau > 0$. При этом $\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq \max(1, \tau)$ (см. [2; теоремы 2.4.4 и 2.4.5]). Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда* с.п. E . Всегда $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$. Например, $\alpha_{L_p} = \beta_{L_p} = 1/p$ для всех $p \in [1, \infty]$.

Важный класс с.п. образуют пространства Орлича. Пусть $M(u)$ – строго возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Тогда пространство Орлича L_M состоит из всех таких $x \in L_1$, что

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1$$

для достаточно большого $\lambda > 0$. В качестве нормы в L_M рассматривается функционал $\|x\|_{L_M} = \inf \lambda$, где точная нижняя грань берется по всем $\lambda > 0$, для которых выполнено предыдущее неравенство. Пространство Орлича, построенное по функции $M(u) = e^{u^2} - 1$, будем обозначать через $\text{exr } L_2$, а замыкание L_∞ в $\text{exr } L_2$ – через G . Хорошо известна (см. [3] или [4; лемма 3.2]) следующая характеристика этих пространств: измеримая функция x принадлежит $\text{exr } L_2$ (соответственно G), если и только если

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{x^*(t)}{\log_2^{1/2}(2/t)} < \infty \quad \left(\text{соответственно} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^*(t)}{\log_2^{1/2}(2/t)} = 0 \right). \quad (1.1)$$

Пусть $\mathbb{D}$ – семейство *двоичных* интервалов из $[0, 1]$, т.е. интервалов вида $\Delta_n^k = ((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$, $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$. Функции $\chi_0^0(t) = 1$,

$$\chi_n^k(t) = \chi_{\Delta_n^k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_{n+1}^{2k-1}, \\ -1, & t \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1] \end{cases}.$$

образуют *систему Хаара*. Обозначим через Ω множество индексов функций Хаара, т.е. $\Omega := \{(0, 0), (n, k), 1 \leq k \leq 2^n, n = 0, 1, \dots\}$. Формула $m = 2^n + k$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, позволяя тем самым записывать эту систему с использованием лишь одного индекса: $\{\chi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Функции $2^{n/2} \chi_n^k$, $(n, k) \in \Omega$, образуют полную ортонормированную систему, являющуюся монотонным базисом в любом сепарабельном с.п. Для того чтобы система Хаара была безусловным базисом в сепарабельном с.п. E , необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$

(см. [1; теорема 2.с.6] или [2; теорема 2.9.6]). Еще одним эквивалентным этому условием является $\|x\|_E \asymp \|Px\|_E$, где

$$x(t) = \sum_{(n,k) \in \Omega} c_n^k \chi_n^k(t), \quad Px(t) = \left(\sum_{(n,k) \in \Omega} (c_n^k \chi_n^k(t))^2 \right)^{1/2}$$

(см. [5; теорема 1.11]; если f и g – две неотрицательные функции или квазинормы, определенные на множестве T , то выражение $f \asymp g$, $t \in T$, всюду далее означает, что для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in T$ выполнено $C^{-1}f(t) \leq g(t) \leq Cf(t)$).

Коэффициенты Фурье–Хаара $c_n^k = c_n^k(x)$ функции $x \in L_1[0, 1]$ определяются соотношением

$$c_n^k = 2^n \int_0^1 x(s) \chi_n^k(s) ds, \quad (n, k) \in \Omega.$$

Функция $Px(t)$ называется *функцией Пэли*. Для заданного с.п. E через $P(E)$ обозначим пространство всех таких функций $x \in L_1[0, 1]$, что $Px \in E$, с нормой

$$\|x\|_{P(E)} := \|Px\|_E.$$

Настоящая работа посвящена изучению пространств $P(E)$ и в особенности $P(L_\infty)$. Заметим, что в случае $E = L_1$ мы получаем хорошо известное двоичное H^1 -пространство (см. [6; § 1.2]; в этой же монографии в § 1.3 рассматриваются некоторые свойства пространства $P(L_\infty)$, обозначаемого там через SL_∞). Здесь главное внимание будет уделено связи пространств вида $P(E)$ с с.п. Будут найдены необходимые и достаточные условия симметричности $P(E)$ (как при изоморфной, так и при изометрической постановке вопроса). Кроме того, усиливая вышеупомянутые результаты, мы докажем, что оператор P ограничен в с.п. E , если и только если его индексы Бойда нетривиальны, т.е. $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$. В частности, пространство $P(L_\infty)$ не симметрично (и даже не идеально). Мы покажем, что его симметрическая оболочка (понимаемая в определенном смысле) совпадает с экспоненциальным пространством Орлича $\exp L_2$. Важным свойством изучаемых пространств является то обстоятельство, что система Радемахера “натягивает” 1-дополняемое подпространство в $P(E)$ для любого с.п. E . В заключительной части работы будут рассмотрены интерполяционные свойства пары $(L_\infty, P(L_\infty))$; будет доказано, что система Радемахера естественным образом порождает в ней $\mathcal{H}$ -замкнутую подпару.

Напомним, что функции Радемахера определяются соотношением $r_k(t) = \text{sign}[\sin(2^k \pi t)]$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Если $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, то согласно теореме Радемахера ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n r_n(t)$ сходится п.в. Множество всех таких функций обозначим через Rad . Так как

$$r_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^k(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то $P(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n)(t) = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2)^{1/2}$. Отсюда вытекает, что $\text{Rad} \subset P(E)$ и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_{P(E)} = \|(a_n)\|_{\ell_2} \quad (1.2)$$

для любого с.п. E . Тем самым, вместе с Rad пространство $P(E)$ содержит неограниченные функции. Более подробно о с.п. см. монографии [1] и [2], о системах Хаара и Радемахера см. [4]–[8].

Некоторые результаты настоящей работы были анонсированы в заметке [9].

Авторы выражают благодарность рецензенту, предложения и замечания которого позволили улучшить окончательный текст статьи и, в частности, значительно сократить доказательство теоремы 2.

§ 2. Элементарные свойства пространств $P(E)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для каждого с.п. E пространство $P(E)$ полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in P(E)$ и $x = \int_0^1 x(s) ds + \sum_{I \in \mathbb{D}} a_I \chi_I$. Следуя [6; с. 39–40], положим $x_1 := \int_0^1 x(s) ds$ и $x_n := \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+2}} a_I \chi_I$, если $n = 2, 3, \dots$. Тогда отображение $Ux := \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является изометрическим вложением $P(E)$ в банахово пространство $E(\ell_2)$, которое состоит из всех последовательностей $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из E таких, что

$$\|\{f_n\}\|_{E(\ell_2)} := \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_E < \infty.$$

Стандартные рассуждения показывают, что образ U замкнут в $E(\ell_2)$. Тем самым, утверждение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пространство $P(E)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно с.п. E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала E сепарабельно и $\sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi_m \in P(E)$. Тогда $(\sum_{m=1}^{\infty} (c_m \chi_m)^2)^{1/2} \in E$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{m=k}^{\infty} (c_m \chi_m)^2 \right)^{1/2} \right\|_E = 0.$$

Тем самым, множество функций вида $\sum_{m=1}^k c_m \chi_m$, где $k \in \mathbb{N}$, а c_m рациональны, образует счетное всюду плотное в $P(E)$ множество и, значит, $P(E)$ сепарабельно.

Предположим теперь, что E несепарабельно. Тогда существует такая функция $x \in E$, что $|x| = x^*$ и $\|x\kappa_{(0,\varepsilon)}\|_E > 1$ для каждого $\varepsilon > 0$. Как нетрудно видеть, не ограничивая общности, можно считать, что $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n^2 \in P(E)$,

$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots$. Так как $P(x) = |x|$, то $x \in P(E)$. В силу выбора x найдется такая последовательность $m_1 < m_2 < \dots$, что

$$\left\| \sum_{n=m_i+1}^{m_{i+1}} c_n \chi_n^2 \right\|_{P(E)} > 1.$$

Каждой последовательности $\theta = (\theta_i)_{i=1}^\infty$, $\theta_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots$, поставим в соответствие функцию

$$y_\theta := \sum_{i=1}^\infty \theta_i \sum_{n=m_i+1}^{m_{i+1}} c_n \chi_n^2.$$

Очевидно, что $y_\theta \in P(E)$ и $\|y_\theta\|_{P(E)} = \|x\|_{P(E)}$. Так как $\|y_{\theta^1} - y_{\theta^2}\|_{P(E)} > 1$ для произвольных $\theta^1 \neq \theta^2$ и множество функций $\{y_\theta\}$ имеет мощность континуум, то отсюда вытекает несепарабельность $P(E)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда пространство $P(E)$ симметрично. Как показывает следующая теорема, ответ в значительной степени зависит от характера его постановки.

ТЕОРЕМА 1. *Для произвольного с.п. E справедливы следующие утверждения.*

1. $P(E)$ – с.п., если и только если $E = L_2$ и $\|x\|_E = \|x\|_{L_2}$ для всех $x \in L_2$.
2. Для того чтобы $P(E)$ с точностью до эквивалентности норм совпадало с некоторым с.п., необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Достаточность, конечно, сразу вытекает из равенства Парсеваля. Докажем необходимость. Пусть $x(t)$ – ступенчатая функция вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k \kappa_{\Delta(k)}(t), \quad (2.1)$$

где двоичные интервалы $\Delta(k)$ попарно не пересекаются. Если функция $\varepsilon(t)$, $|\varepsilon(t)| = 1$, $0 \leq t \leq 1$, принимает значение $+1$ на левой половине интервала $\Delta(k)$ и -1 на его правой половине, то $\varepsilon \cdot \kappa_{\Delta(k)}$ – некоторая функция Хаара $\chi_{i(k)}$ для каждого $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, $\varepsilon \cdot x = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{i(k)}$ и

$$P(\varepsilon \cdot x) = \left(\sum_{k=1}^n (a_k \chi_{i(k)})^2 \right)^{1/2} = \sum_{k=1}^n |a_k| \kappa_{\Delta(k)} = |x|. \quad (2.2)$$

Отсюда согласно предположению следует

$$\|Px\|_E = \|P(\varepsilon \cdot x)\|_E = \| |x| \|_E = \|x\|_E. \quad (2.3)$$

Пусть S – оператор усреднения на множество констант, т.е.

$$Sy(t) := \int_0^1 y(s) ds \cdot \kappa_{[0,1]}(t).$$

Так как любой полином по системе Хаара $x = \sum_{k=1}^n c_k \chi_k$ – это одновременно функция вида (2.1), то в силу (2.3)

$$\|x\|_E = \left\| \left(\sum_{k=1}^n (c_k \chi_k)^2 \right)^{1/2} \right\|_E, \quad \|(I - S)x\|_E = \left\| \left(\sum_{k=2}^n (c_k \chi_k)^2 \right)^{1/2} \right\|_E,$$

где I – тождественный оператор. Отсюда следует $\|(I - S)x\|_E \leq \|x\|_E$. Если E сепарабельно, то множество полиномов по системе Хаара всюду плотно в нем и, тем самым, $\|I - S\|_{E \rightarrow E} = 1$. Применяя один из результатов работы [10], получаем, что тогда $E = L_2$ изометрически, и теорема в сепарабельном случае доказана.

Если E – произвольное с.п., то через E_0 обозначим замыкание L_∞ в E . Так как пространство $P(L_\infty)$ не симметрично (даже с точностью до эквивалентности норм; см. [6; следствие 1.3.7 и замечание после него]), то без ограничения общности можно считать, что $E \neq L_\infty$. Тогда E_0 – сепарабельное с.п., и в силу только что доказанного утверждения $E_0 = L_2$. Отсюда $E'' = (E_0)'' = L_2$, и так как E сепарабельно или максимально, $E = E_0$ или $E = E''$. В обоих случаях $E = L_2$.

2. Если $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$, то, как уже упоминалось в § 1, $\|Px\|_E \asymp \|x\|_E$. Переходя к доказательству необходимости, предположим, что x – произвольная функция вида (2.1). Тогда по условию существует $C > 0$, для которого

$$C^{-1} \|Px\|_E \leq \|P(\varepsilon \cdot x)\|_E \leq C \|Px\|_E,$$

где функция $\varepsilon(t)$ определяется точно так же, как в части 1 доказательства. Следовательно, учитывая равенство (2.2), для произвольного полинома x по системе Хаара получаем

$$\|Px\|_E \asymp \|P(\varepsilon \cdot x)\|_E = \|x\|_E = \|x\|_E.$$

Отсюда опять в силу [1; теорема 2.с.6] и [5; теорема 1.11] (см. также [2; теорема 2.9.6]) получаем, что индексы Бойда пространства E_0 , а значит, и E нетривиальны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства следует, что необходимость в обоих утверждениях теоремы остается верной даже при более слабом условии идеальности пространства $P(E)$ (соответственно изометрически или с точностью до эквивалентности нормы).

§ 3. Оператор P в симметричных пространствах

В § 1 уже говорилось о том, что нормы пространств $P(E)$ и E эквивалентны тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$. Докажем два более точных утверждения такого сорта, характеризующие вложения $P(E) \subset E$ и $E \subset P(E)$.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного с.п. E справедливы следующие утверждения.

1. Вложение $P(E) \subset E$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha_E > 0$.
2. Для того чтобы выполнялось $E \subset P(E)$, необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $S_n x$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность частичных сумм Фурье–Хаара функции $x \in L_1$, т.е. $S_n x(t) = \sum_{k=1}^n c_k(x) \chi_k(t)$. Если $\alpha_E > 0$, то в силу теоремы 6.3 из [8] (см. также более общий результат в работе [11]) $\|Px\|_E \asymp \|\bar{S}x\|_E$, где $\bar{S}x(t) := \sup_{n=1,2,\dots} |S_n x(t)|$. Так как $\bar{S}x(t) \geq |x(t)|$ п.в. на $[0, 1]$, то $\|Px\|_E \geq c\|x\|_E$ с некоторым $c > 0$. Следовательно, $P(E) \subset E$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что оно неверно, т.е. $\alpha_E = 0$. Тогда в силу [1; предложение 2.b.7] для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существуют одинаково распределенные функции с непересекающимися носителями $x_1, x_2, \dots, x_{2^n}$ из E такие, что для любых $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq 2^n} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^n} a_i x_i \right\|_E \leq (1 + \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq 2^n} |a_i|. \quad (3.1)$$

Так как E сепарабельно или максимально, то без ограничения общности можно считать, что каждая функция x_i является конечной линейной комбинацией характеристических функций интервалов вида $[(l_j - 1)2^{-k}, l_j 2^{-k})$ для некоторого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ независимого от i . Кроме того (возможно, после некоторой перестановки значений функций), можно предположить, что на первых 2^n двоичных интервалах длины 2^{-k} каждая функция x_i не равна нулю в точности на одном из них, принимая там некоторое значение (скажем, b_1), не зависящее от i . То же самое верно для следующих 2^n интервалов длины 2^{-k} (с b_2 вместо b_1) и т.д.

Рассмотрим следующие “функции Хаара” над последовательностью $\{x_i\}_{i=1}^{2^n}$:

$$\begin{aligned} h_1 &:= x_1 + \cdots + x_{2^{n-1}} - x_{2^{n-1}+1} - \cdots - x_{2^n}, \\ h_2 &:= x_1 + \cdots + x_{2^{n-2}} - x_{2^{n-2}+1} - \cdots - x_{2^{n-1}} \\ &\quad + x_{2^{n-1}+1} + \cdots + x_{2^{n-1}+2^{n-2}} - x_{2^{n-1}+2^{n-2}+1} - \cdots - x_{2^n}, \\ &\quad \dots\dots\dots \\ h_n &:= \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^{j+1} x_j. \end{aligned}$$

Заметим, что эти функции являются линейными комбинациями функций Хара, а именно

$$\begin{aligned} h_1 &= b_1 \chi_{k-n}^1 + b_2 \chi_{k-n}^2 + \cdots + b_m \chi_{k-n}^m, \\ h_2 &= b_1 (\chi_{k-n+1}^1 + \chi_{k-n+1}^2) + b_2 (\chi_{k-n+1}^3 + \chi_{k-n+1}^4) + \cdots + b_m (\chi_{k-n+1}^{2m-1} + \chi_{k-n+1}^{2m}), \\ &\dots \\ h_n &= b_1 (\chi_{k-1}^1 + \chi_{k-1}^2 + \cdots + \chi_{k-1}^{2^{n-1}}) + b_2 (\chi_{k-1}^{2^{n-1}+1} + \cdots + \chi_{k-1}^{2^n}) \\ &\quad + \cdots + b_m (\chi_{k-1}^{(m-1)2^{n-1}+1} + \cdots + \chi_{k-1}^{m2^{n-1}}), \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g_j\right) &\geq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^m b_i^2 \kappa_{[(i-1)2^{n-k}, (i-1)2^{n-k}+2^{1-k})}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} \sum_{i=1}^m |b_i| \kappa_{[(i-1)2^{n-k}, (i-1)2^{n-k}+2^{1-k})}, \\ &\left(\sum_{i=1}^m |b_i| \kappa_{[(i-1)2^{n-k}, (i-1)2^{n-k}+2^{1-k})}\right)^* \geq x_1^*, \end{aligned}$$

то, применяя (3.1), получаем

$$\left\| P\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g_j\right) \right\|_E \geq \sqrt{n} \|x_1\|_E \geq \sqrt{n}. \quad (3.2)$$

В то же время легко видеть, что

$$\left| \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g_j \right| \leq 2 \sum_{i=1}^{2^n} |x_i|,$$

откуда в силу (3.1)

$$\left\| \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} g_j \right\|_E \leq 2(1 + \varepsilon).$$

Так как $n \in \mathbb{N}$ произвольно, то последняя оценка вместе с неравенством (3.2) показывают, что вложение $E \subset P(E)$ не выполнено. Это противоречит условию, следовательно, неравенство $\alpha_E > 0$ доказано. Тем самым, в силу уже доказанной части 1 получаем, что $P(E) = E$. Следовательно, по теореме 1 $\beta_E < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть E – с.п. на $[0, 1]$.

1. Если $E \subset P(E)$, то $E = P(E)$.
2. Если $\alpha_E > 0$, а $\beta = 1$, то $P(E) \not\subset E$.

Из части 2 доказанной теоремы 2 следует, что вложение $E \subset P(E)$ эквивалентно безусловности системы Хаара в с.п. E . Отсюда, в частности, нетрудно получить критерий RUC-базисности системы Хаара в с.п., анонсированный ранее в [12]. Сначала напомним определения.

Пусть E – банахово пространство, E^* – его сопряженное. Биортогональная система (e_k, e_k^*) , $e_k \in E$, $e_k^* \in E^*$, называется RUC-системой (random unconditional convergence system), если для каждого x из замкнутой линейной оболочки $[e_k]$, порожденной векторами e_k , $k = 1, 2, \dots$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} r_k(s) e_k^*(x) e_k$ сходится в E для п.в. $s \in [0, 1]$, где r_k – функции Радемахера. Это эквивалентно тому, для любого (некоторого) $p \in [1, \infty)$ существует такая константа $K_p > 0$, что неравенство

$$\sup_{n=1,2,\dots} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(s) e_k^*(x) e_k \right\|_E^p ds \right)^{1/p} \leq K_p \|x\|_E$$

справедливо для всех $x \in [e_k]$ (см. [13]). Базис, который вместе с базисными коэффициентными функционалами образует RUC-систему, называется RUC-базисом. Очевидно, всякий безусловный базис является RUC-базисом. Примеры, показывающие, что обратное неверно, а также другую информацию о RUC-системах см. в [13].

СЛЕДСТВИЕ 2. Система Хаара образует RUC-базис в сепарабельном с.п. E тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если система Хаара образует RUC-базис в сепарабельном с.п. E , то с некоторым K и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(s) c_k \chi_k \right\|_E ds \leq K \left\| \sum_{k=1}^n c_k \chi_k \right\|_E.$$

В то же время в силу L_1 -неравенства Хинчина с оптимальной константой, найденной Шареком в [14],

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(s) c_k \chi_k \right\|_E ds \geq \left\| \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n r_k(s) c_k \chi_k \right| ds \right\|_E \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{k=1}^n (c_k \chi_k)^2 \right)^{1/2} \right\|_E.$$

Тем самым, так как E сепарабельно, $\|Px\|_E \leq \sqrt{2}K\|x\|_E$ для всех $x \in E$, и, применяя теорему 2, получаем, что $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$. Так как противоположное утверждение очевидно, то следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Хорошо известно, что последовательность частичных сумм Фурье–Хаара $S_n x$ произвольной функции $x \in L_1[0, 1]$ образует мартингал относительно естественной последовательности σ -алгебр, порожденных двоичными интервалами из $[0, 1]$. С этой точки зрения утверждения теоремы 2 интересно сопоставить с результатами работы [15], в которой рассматривается квадратическая функция P_f , соответствующая произвольному мартингалу $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=1}^\infty$. В частности, из утверждения 1 теоремы 2 и [15; теорема 3.1] вытекает следующее: если в некотором с.п. E выполнено неравенство $\|Px\|_E \geq c\|x\|_E$, то аналогичное соотношение $\|P_f x\|_E \geq c_f\|x\|_E$ справедливо для любого мартингала $\mathbf{f}$ на $[0, 1]$.

§ 4. Система Радемахера в пространстве $P(E)$

Напомним, что замкнутое подпространство F банахова пространства E называется *дополняемым* (соответственно *1-дополняемым*) в E , если существует проектор, ограниченный в E (соответственно с нормой, равной 1), образ которого совпадает с F .

В силу равенства (1.2) для любого с.п. E множество Rad сумм сходящихся п.в. рядов по системе Радемахера – замкнутое линейное подпространство пространства $P(E)$, изометричное ℓ_2 .

ТЕОРЕМА 3. Подпространство Rad 1-дополняемо в $P(E)$ для любого с.п. E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что ортогональный проектор

$$Tf(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f r_n dt \cdot r_n(s)$$

ограничен в $P(E)$ и

$$\|Tf\|_{P(E)} \leq \|f\|_{P(E)}. \quad (4.1)$$

Если $f = \int_0^1 f dt + \sum_{I \in \mathbb{D}} a_I \chi_I$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f r_n dt = \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+1}} a_I \int_I \chi_I r_n dt = 2^{-n+1} \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+1}} a_I.$$

Значит,

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n+1} \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+1}} a_I \right) r_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n+1} \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+1}} a_I \right) \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+1}} \chi_I \end{aligned}$$

(т.е. оператор T усредняет коэффициенты Фурье–Хаара функции f , соответствующие каждой пачке системы Хаара). Таким образом, по определению

$$\|Tf\|_{P(E)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n+1} \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-n+1}} a_I \right)^2. \quad (4.2)$$

С другой стороны, для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $j = 1, 2, \dots, 2^n$ рассмотрим следующую последовательность двоичных интервалов $\{I_k^{(n,j)}\}_{k=1}^{\infty}$: если $1 \leq k \leq n+1$ и $(i-1)2^{n-k+1} < j \leq i2^{n-k+1}$, где $i = 1, \dots, 2^{k-1}$, то $I_k^{(n,j)} = \Delta_{k-1}^i$ (в частности, $I_1^{(n,j)} = (0, 1)$ для всех $j = 1, 2, \dots, 2^n$, $I_2^{(n,j)} = (0, 1/2)$, если $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, и $I_2^{(n,j)} = (1/2, 1)$, если $j = 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n$, и т.д.); если же $k > n+1$, то $I_k^{(j)}$ – произвольный двоичный интервал длины 2^{-k+1} . Заметим, что $Pf \geq (\sum_{k=1}^{\infty} a_{I_k}^2)^{1/2}$ для каждой последовательности двоичных интервалов $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $|I_k| = 2^{-k+1}$ и $I_{k+1} \subset I_k$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому

$$Pf \geq \sum_{j=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_{\Delta_{k-1}^{i(j)}}^2 \right)^{1/2} \kappa_{\Delta_n^j}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $i(j)$ таково, что $(i(j)-1)2^{n-k+1} < j \leq i(j)2^{n-k+1}$. Тем самым,

$$\begin{aligned} \|f\|_{P(E)} &\geq \int_0^1 Pf(t) dt \geq 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_{\Delta_{k-1}^{i(j)}}^2 \right)^{1/2} \geq 2^{-n} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{2^n} |a_{\Delta_{k-1}^{i(j)}}| \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= 2^{-n} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(2^{n-k+1} \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |a_{\Delta_{k-1}^i}| \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(2^{-k+1} \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-k+1}} |a_I| \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как $n \in \mathbb{N}$ произвольно, то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k+1} \sum_{I \in \mathbb{D}, |I|=2^{-k+1}} |a_I| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{P(E)},$$

откуда в силу (4.2) получаем (4.1), и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любого с.п. E пространство $P(E)$ содержит 1-дополняемое подпространство, изометричное ℓ_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Хорошо известно (см. [1; теорема 2.b.4] или [16]), что оператор T из доказательства теоремы 3 ограничен в с.п. E тогда и только тогда, когда $G \subset E \subset G'$, где G – замыкание L_∞ в экспоненциальном пространстве Орлича $\exp L_2$, а G' – пространство, двойственное к G . Кроме того, в силу результатов работы [17] (см. также [18]) последнее условие эквивалентно тому, что сепарабельное с.п. E , в котором нет дополняемой подрешетки, изоморфной ℓ_2 , содержит ℓ_2 как дополняемое подпространство. Сравнение этих результатов с теоремой 3 говорит о существенном различии свойств с.п. и пространств вида $P(E)$.

§ 5. Симметрическая оболочка Rad и $P(L_\infty)$

Пусть F – множество функций, определенных на $[0, 1]$, $F \subset L_1[0, 1]$.

Симметрической оболочкой F будем называть с.п. E , обладающее следующими свойствами:

- 1) $F \subset E$;
- 2) существует такая константа $\alpha > 0$, что для произвольной функции $x \in E$ найдется $f \in F$, для которой $x^*(t) \leq f^*(t) + \alpha \|x\|_E$ п.в. на $[0, 1]$.

Нетрудно видеть, что симметрическая оболочка каждого множества (с точностью до эквивалентности норм) единственна.

Заметим, что введенное понятие несколько отличается от понятия перестановочно инвариантной оболочки множества, рассматриваемого в работе [19] (см. также [20; теорема 5.7.10]).

Для характеристики симметрических оболочек множеств Rad и $P(L_\infty)$ нам понадобятся некоторые свойства двоичного пространства ВМО, которое мы будем обозначать через ВМО_d . Напомним, что пространство $\text{ВМО} = \text{ВМО}[0, 1]$ состоит из всех функций $f \in L_1[0, 1]$ таких, что

$$\|f\|_{\text{ВМО}} := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(s) - f_I| ds < \infty,$$

где супремум берется по всем интервалам $I \subseteq [0, 1]$, $f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(s) ds$. Если в последнем определении рассматривать только $I \in \mathbb{D}$, то получим полунорму $\|f\|_d$, определяющую двоичное пространство ВМО_d . Ясно, что $\|f\|_d \leq \|f\|'_d$, где

$$\|f\|'_d := \sup_{I \in \mathbb{D}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(s) - f_I|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Более того, в силу одного из следствий теоремы Джона–Ниренберга (см. [21; замечание 3.9]) $\|f\|'_d \leq C\|f\|_d$ для некоторого $C > 0$. Далее нам будет нужно также следующее непосредственно проверяемое равенство: если $f = \sum_{J \in \mathbb{D}} a_J \chi_J$, то

$$\|f\|'_d = \sup_{I \in \mathbb{D}} \left(\frac{1}{|I|} \sum_{J \in \mathbb{D}, J \subseteq I} a_J^2 |J| \right)^{1/2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $P(L_\infty) \subset \text{ВМО}_d$ и $\|f\|_d \leq \|f\|_{P(L_\infty)}$ для всех $f \in P(L_\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\int_0^1 f ds = 0$ и, следовательно, $f = \sum_{J \in \mathbb{D}} a_J \chi_J$. Для произвольного интервала $I \in \mathbb{D}$ положим

$$P_I(f)(x) := \left(\sum_{J \in \mathbb{D}, J \subseteq I} a_J^2 \kappa_J(x) \right)^{1/2}.$$

Тогда $P_I(f)(x) \leq Pf(x)$, $0 \leq x \leq 1$, и

$$\|P_I(f)\|_{L_\infty(I, dx/|I|)} \leq \|Pf\|_{L_\infty[0,1]} = \|f\|_{P(L_\infty)}. \quad (5.1)$$

Так как

$$\begin{aligned} \|P_I(f)\|_{L_2(I, dx/|I|)} &= \left(\frac{1}{|I|} \int_I P_I(f)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{|I|} \sum_{J \in \mathbb{D}, J \subseteq I} a_J^2 \int_I \kappa_J(x) dx \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{|I|} \sum_{J \in \mathbb{D}, J \subseteq I} a_J^2 |J| \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

то из (5.1) следует, что

$$\left(\frac{1}{|I|} \sum_{J \in \mathbb{D}, J \subseteq I} a_J^2 |J| \right)^{1/2} \leq \|P_I(f)\|_{L_\infty(I, dx/|I|)} \leq \|f\|_{P(L_\infty)}.$$

Тем самым, в силу произвольности $I \in \mathbb{D}$ и замечания, сделанного после определения ВМО_d , получаем оба утверждения предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [22] доказано, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{\text{ВМО}} \asymp \|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\ell_2} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right|$$

с константами, не зависящими от $a_k \in \mathbb{R}$. Отсюда, в частности, следует, что $\text{Rad} \not\subset \text{ВМО}$. Тем более, $P(E) \not\subset \text{ВМО}$ для произвольного с.п. E , что говорит об определенной точности предложения 3.

ТЕОРЕМА 4. Для каждой функции $x \in G$ существует сумма Радемахера $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k$, $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$, такая, что $\|a\|_{\ell_2} \leq C_1 \|x\|_G$ и

$$x^*(t) \leq C_2 (\|a\|_{\ell_2} + f^*(t)), \quad 0 < t \leq 1, \quad (5.2)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от x и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см. [1; доказательство теоремы 2.b.4, (i)]), что п.в. на $[0, 1]$ существует

$$u(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n r_k(t) \right)^*, \quad (5.3)$$

причем $u(t)$ эквивалентна на $[0, 1/2]$ функции $v(t) := \log_2^{1/2}(2/t)$. Обозначим соответствующую константу эквивалентности через δ . Тогда, в частности,

$$\int_0^t v(s) ds \leq 2\delta \int_0^t u(s) ds, \quad 0 < t \leq 1. \quad (5.4)$$

В силу характеристики (1.1) пространства G , если $x \in G$, то с некоторой универсальной константой $\gamma > 0$

$$x^*(t) \leq \gamma \|x\|_G v(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^*(t)}{v(t)} = 0. \quad (5.5)$$

Построим такую последовательность $t_1 > t_2 > \dots$ точек из $[0, 1]$, что $t_k \downarrow 0$,

$$x^*(t) \leq \gamma \|x\|_G v(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} \chi_{(t_{k+1}, t_k]}(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (5.6)$$

$$\int_{t_{k+1}}^{\tau} u(t) dt \geq \frac{1}{2} \int_0^{\tau} u(t) dt \quad \text{для всех } \tau \in [t_k, t_{k-1}], \quad k = 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Возьмем $t_1 = 1$ и выберем $t_2 < 1$ таким образом, чтобы

$$x^*(t) \leq \frac{1}{2} \gamma \|x\|_G v(t) \quad \text{для всех } 0 < t \leq t_2. \quad (5.8)$$

Для любого $\tau \in [t_2, t_1]$ найдется такое $b(\tau) \in (0, t_2)$, что

$$\int_{b(\tau)}^{\tau} u(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} u(t) dt.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла функция $b(\tau)$ непрерывна на $[t_2, t_1]$. Поэтому $t'_3 := \min_{t_2 \leq \tau \leq t_1} b(\tau) > 0$. Пусть $t_3 \in (0, t'_3]$ таково, что

$$x^*(t) \leq \frac{1}{2^2} \gamma \|x\|_G v(t) \quad \text{для всех } 0 < t \leq t_3.$$

Тогда в силу выбора t_3 (см. первое неравенство в (5.5) и (5.8)) соотношения (5.6) и (5.7) выполнены при $t \in [t_3, t_1]$ и $k = 2$ соответственно. Выбор последующих точек t_k производится аналогичным образом.

Далее, положим $m_1 = 0$. Заметим, что сходимость в (5.3) равномерна на любом промежутке $[\lambda, 1/2]$, $0 < \lambda < 1/2$. Поэтому можно выбрать $m_2 > m_1$ так, что

$$\left(\frac{1}{(m_2 - m_1)^{1/2}} \sum_{k=m_1+1}^{m_2} r_k(t) \right)^* \geq \frac{1}{2} u(t)$$

для всех $t \in [t_2, t_1]$. Если $m_1 < m_2 < \dots < m_i$ найдены, то в силу элементарных свойств функций Радемахера (см., например, [4; предложение 1.4]) можно выбрать $m_{i+1} > m_i$ таким образом, чтобы

$$\left(\frac{1}{(m_{i+1} - m_i)^{1/2}} \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} r_k(t) \right)^* \geq \frac{1}{2} u(t) \quad \text{для всех } t \in [t_{i+1}, t_i]. \quad (5.9)$$

Обозначим

$$a_k := \frac{2^{5-i} \gamma \delta \|x\|_G}{(m_{i+1} - m_i)^{1/2}}, \quad m_i < k \leq m_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$z_i := \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} a_k r_k, \quad i \in \mathbb{N}, \quad f := \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k.$$

Так как система Радемахера безусловна с константой 1 в любом с.п. (в том числе в L_1 с нормой $\int_0^\tau x^*(s) ds$, $0 < \tau \leq 1$), то для любых $i = 2, 3, \dots$ и $\tau \in [t_i, t_{i-1}]$ имеем

$$\int_0^\tau f^*(t) dt \geq \int_0^\tau z_i^*(t) dt \geq \int_{t_{i+1}}^\tau z_i^*(t) dt.$$

Кроме того, в силу (5.9), (5.7) и (5.4) для всех $\tau \in [t_i, t_{i-1}]$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i+1}}^\tau z_i^*(t) dt &\geq 2^{4-i} \gamma \beta \|x\|_G \int_{t_{i+1}}^\tau u(t) dt \\ &\geq 2^{3-i} \gamma \beta \|x\|_G \int_0^\tau u(t) dt \geq 2^{2-i} \gamma \|x\|_G \int_0^\tau v(t) dt. \end{aligned}$$

В то же время на промежутке $(0, t_{i-1}]$, как показывает неравенство (5.6), имеем $2^{2-i} \gamma \|x\|_G v(t) \geq x^*(t)$. Таким образом, так как $\bigcup_{i=2}^\infty [t_i, t_{i-1}] = (0, 1]$, то из двух последних неравенств следует, что

$$\int_0^\tau x^*(t) dt \leq \int_0^\tau f^*(t) dt, \quad 0 < \tau \leq 1. \quad (5.10)$$

Кроме того,

$$\|a\|_{\ell_2} \leq 32 \gamma \delta \|x\|_G \left(\sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} \right)^{1/2} = C_1 \|x\|_G,$$

где $C_1 := 32 \cdot 3^{-1/2} \gamma \delta$ — универсальная константа.

Для доказательства (5.2) напомним (см. [19] или [21; теорема 3.3]), что для любой функции $g \in \text{ВМО}_d$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t g^*(s) ds - g^*(t) \leq 32 \|g\|_d, \quad 0 < t \leq \frac{1}{4}$$

(оно доказано там для ВМО, но простой анализ доказательства показывает, что его аналог верен и для ВМО_d). Поэтому в силу (5.10), а также предложения 3

и равенства (1.2) для $0 < t \leq 1/4$

$$x^*(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \leq f^*(t) + 32\|f\|_{P(L_\infty)} = f^*(t) + 32\|a\|_{\ell_2}.$$

Если же $1/4 < t \leq 1$, то, применяя (5.10) еще раз, получим

$$x^*(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds \leq 4 \int_0^t f^*(s) ds \leq 4\|f\|_2 = 4\|a\|_{\ell_2}.$$

Так как (5.2) – непосредственное следствие этих соотношений, то теорема доказана.

Так как $\text{Rad} \subset G$ (см. [23; теорема 5.8.7] или [24]), то из теоремы 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пространство G является симметрической оболочкой подпространства Rad .*

Найдем теперь симметрическую оболочку множества $P(L_\infty)$. Прежде всего, $\text{Rad} \subset P(L_\infty)$ (см. (1.2)), и поэтому из теоремы 4 следует, что она содержит G . С другой стороны, в силу [6; следствие 1.3.2] справедлива следующая оценка распределений функций из пространства $P(L_\infty)$: если $\int_0^1 x(s) ds = 0$, то

$$|\{s \in [0, 1] : |x(s)| > t\}| \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\|x\|_{P(L_\infty)}^2}\right), \quad t > 0.$$

Тем самым, учитывая (1.1), а также очевидное неравенство $\left|\int_0^1 x(s) ds\right| \leq \|x\|_{P(L_\infty)}$, получаем, что $P(L_\infty) \subset \text{exp } L_2$ и $\|x\|_{\text{exp } L_2} \leq C\|x\|_{P(L_\infty)}$ для всех $x \in P(L_\infty)$ и некоторой константы $C > 0$. Таким образом, для доказательства того, что симметрическая оболочка $P(L_\infty)$ совпадает с пространством $\text{exp } L_2$, достаточно установить справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Для любой функции $x \in \text{exp } L_2$ существует такая функция $f \in P(L_\infty)$, что*

$$\frac{1}{C_1}\|x\|_{\text{exp } L_2} \leq \|f\|_{P(L_\infty)} \leq C_1\|x\|_{\text{exp } L_2}, \quad (5.11)$$

$$x^*(t) \leq C_2(f^*(t) + \|f\|_{P(L_\infty)}), \quad (5.12)$$

где константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от x и f .

В частности, существует функция $f_0 \in P(L_\infty)$, $\|f_0\|_{P(L_\infty)} = 1$, для которой

$$|f_0(t)| \leq \log_2^{1/2} \frac{2}{t}, \quad 0 < t \leq 1, \quad (5.13)$$

$$f_0^*(t) \geq \frac{1}{4} \log_2^{1/2} \frac{2}{t} \quad (5.14)$$

для всех $t \in (0, t_0]$ и некоторого $t_0 \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала второе утверждение теоремы. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ определим два семейства двоичных интервалов:

$$\Sigma_k^1 := \{\Delta_{k+j-1}^{1+2^{j-1}}, j = 2, \dots, k\}, \quad \Sigma_k^2 := \{\Delta_{k+j-1}^{2^j}, j = 2, \dots, k\}$$

(в частности, $\Sigma_1^1 = \Sigma_1^2 = \emptyset$). Заметим, что интервалы обоих семейств Σ_k^1 и Σ_k^2 монотонно убывают и содержатся в двоичном интервале Δ_k^2 . Точнее,

$$\Delta_k^2 \supset \Delta_{k+1}^3 \supset \dots \supset \Delta_{2k-1}^{1+2^{k-1}}, \quad \Delta_k^2 \supset \Delta_{k+1}^4 \supset \dots \supset \Delta_{2k-1}^{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.15)$$

Кроме того, из определения функций Хаара следует, что для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } I \in \Sigma_k^1 \cup \{\Delta_k^2\}, t \in \Delta_{2k}^{1+2^k}, \\ -1, & \text{если } I \in \Sigma_k^2 \cup \{\Delta_k^2\}, t \in \Delta_{2k}^{2^{k+1}}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Положим

$$f_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\chi_{\Delta_k^2} + \sum_{I \in \Sigma_k^1} \chi_I + \sum_{I \in \Sigma_k^2} \chi_I \right).$$

Так как интервалы $\Delta_k^2 = (2^{-k}, 2^{-k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^2 = (0, 1]$, то $(Pf_0)^2(t) \leq 1$, $0 < t \leq 1$. Кроме того, если $E_k := \Delta_{2k}^{1+2^k} \cup \Delta_{2k}^{2^{k+1}}$, то $(Pf_0)^2(t) = 1$ для $t \in E_k$. Следовательно, $\|f_0\|_{P(L^\infty)} = \|Pf_0\|_\infty = 1$.

Оценим теперь саму функцию f_0 . В силу (5.15) и (5.16) $|f_0(t)| \leq \sqrt{k}$, если $t \in \Delta_k^2$, и $|f_0(t)| = \sqrt{k}$, если $t \in E_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тем самым,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \kappa_{E_k}(t) \leq |f_0(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \kappa_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t), \quad 0 < t \leq 1. \quad (5.17)$$

Заметим также, что множества E_k попарно не пересекаются и

$$|E_k| = 2^{-2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

С другой стороны, справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \kappa_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t) \leq \log_2^{1/2} \frac{2}{t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \kappa_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t), \quad 0 < t \leq 1. \quad (5.19)$$

Оценка (5.13) является непосредственным следствием неравенств (5.17) и (5.19). Далее, правая часть в (5.19) равна сумме $u(t) + v(t)$, где

$$u(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{2i} \kappa_{(2^{-2i+1}, 2^{-2i+2}]}(t), \quad v(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{2i+1} \kappa_{(2^{-2i}, 2^{-2i+1}]}(t).$$

В силу (5.17) и (5.18) $u^*(t) \leq \sqrt{2} f_0^*(t)$ и $v^*(t) \leq \sqrt{3} f_0^*(t)$, $0 < t \leq 1$. Таким образом, применяя еще раз (5.19), получаем

$$\begin{aligned} \log_2^{1/2} \frac{2}{t} &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \log_2^{1/2} \frac{2}{s} ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{t} \int_0^t v^*(s) ds \leq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{t} \int_0^t f_0^*(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда точно так же, как в заключительной части доказательства теоремы 4, применяя [21; теорема 3.3] и предложение 3, получаем, что для $0 < t \leq 1/4$

$$\begin{aligned} \log_2^{1/2} \frac{2}{t} &\leq (\sqrt{2} + \sqrt{3})(f_0^*(t) + 32\|f_0\|_d) \leq (\sqrt{2} + \sqrt{3})(f_0^*(t) + 32\|f_0\|_{P(L_\infty)}) \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})(f_0^*(t) + 32), \end{aligned}$$

откуда вытекает (5.14).

Доказательство первого утверждения теоремы аналогично. Прежде всего, в силу (1.1) для $x \in \exp L_2$

$$\|x\|_{\exp L_2} \asymp \sup_{k=1,2,\dots} \frac{x^*(2^{-2k})}{\sqrt{k}}$$

с универсальными константами. Поэтому для некоторых $C_1 > 0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$

$$x^*(2^{-2k_0}) \geq C_1^{-1} \sqrt{k_0} \|x\|_{\exp L_2}, \quad x^*(2^{-2k}) \leq C_1 \sqrt{k} \|x\|_{\exp L_2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^*(2^{-2k})}{k} \left(\chi_{\Delta_k^2} + \sum_{I \in \Sigma_k^1} \chi_I + \sum_{I \in \Sigma_k^2} \chi_I \right),$$

где Σ_k^1 и Σ_k^2 – семейства двоичных интервалов, определенные ранее. Тогда в силу предыдущих неравенств для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k_0} \left(\frac{x^*(2^{-2k_0})}{k_0} \right)^2 \right)^{1/2} &\geq C_1^{-1} \|x\|_{\exp L_2}, \\ \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{x^*(2^{-2k})}{k} \right)^2 \right)^{1/2} &\leq C_1 \|x\|_{\exp L_2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения f , как и в первой части доказательства, получаем (5.11). Кроме того, точно так же, как и там, получаем

$$|f(t)| \geq \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-2k}) \kappa_{E_k}(t), \quad (5.20)$$

где по-прежнему $E_k = \Delta_{2k}^{1+2^k} \cup \Delta_{2k}^{2^{k+1}}$.

С другой стороны,

$$x^*(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k}) \kappa_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t) = u_1(t) + v_1(t),$$

где

$$u_1(t) := \sum_{i=1}^{\infty} x^*(2^{-2i+1}) \kappa_{(2^{-2i+1}, 2^{-2i+2}]}(t), \quad v_1(t) := \sum_{i=1}^{\infty} x^*(2^{-2i}) \kappa_{(2^{-2i}, 2^{-2i+1}]}(t).$$

Из (5.20) и (5.18) следует, что $u_1^*(t) \leq f^*(t)$ и $v_1^*(t) \leq f^*(t)$, $0 < t \leq 1$. Таким образом, так же, как и в первой части доказательства, получаем

$$\begin{aligned} x^*(t) &\leq \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t u_1^*(s) ds + \frac{1}{t} \int_0^t v_1^*(s) ds \leq \frac{2}{t} \int_0^t f^*(s) ds \\ &\leq 2(f^*(t) + 32\|f\|_d) \leq 2(f^*(t) + 32\|f\|_{P(L_\infty)}), \end{aligned}$$

и (5.12) доказано.

Из полученных результатов вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. *Симметрическая оболочка пространства $P(L_\infty)$ совпадает с экспоненциальным пространством Ормича $\exp L_2$.*

§ 6. Интерполяционные свойства банаховой пары $(L_\infty, P(L_\infty))$

Пусть (X_0, X_1) – банахова пара, т.е. банаховы пространства X_0 и X_1 вложены в некоторое отделимое линейное топологическое пространство, и $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$. Функционал

$$\mathcal{K}(t, x, X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$$

называется $\mathcal{K}$ -функционалом Петре пары (X_0, X_1) . Пусть Y_0 и Y_1 – замкнутые подпространства X_0 и X_1 соответственно. Пара (Y_0, Y_1) называется K -замкнутой подпарой пары (X_0, X_1) , если функционалы $\mathcal{K}(t, y, X_0, X_1)$ и $\mathcal{K}(t, y, Y_0, Y_1)$ эквивалентны с константами, не зависящими от $t > 0$ и $y \in Y_0 + Y_1$. По банаховой паре (X_0, X_1) и банаховой решетке F на $(0, \infty)$ с мерой dt/t такой, что $\min(1, t) \in F$, можно построить пространство вещественного $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_{F, \mathcal{K}}$ с нормой $\|x\| := \|\mathcal{K}(t, x, X_0, X_1)\|_F$, которое интерполяционно относительно банаховой пары (X_0, X_1) (см. [25; § 3.3]). Это означает, что произвольный линейный оператор, ограниченный в X_0 и X_1 , ограничен в $(X_0, X_1)_{F, \mathcal{K}}$. В частном случае, когда F – “весовое” пространство $L_p(t^{-\theta}, dt/t)$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, получаем классические пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$. Подробное описание их свойств см., например, в монографии [26].

Рассмотрим оператор

$$Ra(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t), \quad a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

где, как и ранее, $r_k(t)$ – функции Радемахера. Оператор R изометрически действует из ℓ_1 в L_∞ и (в силу равенства (1.2)) из ℓ_2 в $P(L_\infty)$. Тем самым, пару $(R(\ell_1), R(\ell_2))$ можно рассматривать как подпару банаховой пары $(L_\infty, P(L_\infty))$, где $R(\ell_1)$ – подпространство L_∞ , а $R(\ell_2)$ ($= \text{Rad}$) – подпространство $P(L_\infty)$. Так как пары $(R(\ell_1), R(\ell_2))$ и (ℓ_1, ℓ_2) изометричны, то по определению $\mathcal{K}$ -функционала

$$\mathcal{K}(t, Ra; R(\ell_1), R(\ell_2)) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2). \quad (6.1)$$

ТЕОРЕМА 6. *Банахова пара $(R(\ell_1), R(\ell_2))$ является K -замкнутой подпарой пары $(L_\infty, P(L_\infty))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (6.1) достаточно показать, что с константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $t > 0$, выполнено

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, P(L_\infty)) \asymp \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2).$$

Прежде всего, по определению $\mathcal{K}$ -функционала

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, P(L_\infty)) &\leq \inf \{ \|Rb\|_{L_\infty} + t\|Rc\|_{P(L_\infty)} : a = b + c, b \in \ell_1, c \in \ell_2 \} \\ &= \inf \{ \|b\|_{\ell_1} + t\|c\|_{\ell_2} : a = b + c, b \in \ell_1, c \in \ell_2 \} = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2). \end{aligned}$$

С другой стороны, как уже отмечалось, $P(L_\infty) \subset \exp L_2$ и $\|x\|_{\exp L_2} \leq C\|x\|_{P(L_\infty)}$ для всех $x \in P(L_\infty)$. Поэтому

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) = \mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, \exp L_2) \leq C\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, P(L_\infty)).$$

Кроме того, в силу [4; теорема 4.1] с константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $t > 0$,

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) \asymp \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2).$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \leq C' \mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, P(L_\infty)),$$

и теорема доказана.

Из этой теоремы, а также определения пространств вещественного $\mathcal{K}$ -метода получаем

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть F – такая банахова решетка, что $\min(1, t) \in F$, и $\mathcal{F} = (\ell_1, \ell_2)_F^\mathcal{K}$. Если $X = (L_\infty, P(L_\infty))_F^\mathcal{K}$, то нормы $\|\sum_{n=1}^\infty a_n r_n\|_X$ и $\|(a_n)\|_{\mathcal{F}}$ эквивалентны.*

Следствие 6 позволяет по произвольному интерполяционному в паре (ℓ_1, ℓ_2) пространству $\mathcal{F}$ найти пространство X , интерполяционное относительно пары $(L_\infty, P(L_\infty))$, такое, что на $\text{Rad} \cap X$ норма X эквивалентна норме $\mathcal{F}$. В частности, так как $\ell_p = (\ell_1, \ell_2)_{\theta, p}$, где $1 < p < 2$ и $\theta = 2(p-1)/p$ (см. [26; теорема 5.2.1]), то для $X_p = (L_\infty, P(L_\infty))_{\theta, p}$ мы имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty a_n r_n \right\|_{X_p} \asymp \|(a_n)\|_{\ell_p}.$$

Близкое соотношение

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty a_n r_n \right\|_{\Lambda_p} \asymp \|(a_n)\|_{\ell_p}, \quad 1 < p < 2,$$

для пространства Лоренца Λ_p с нормой

$$\|x\|_{\Lambda_p} = \left((p-1) \int_0^1 (x^*(t))^p \ln^{-p} \frac{e}{s} \frac{ds}{s} \right)^{1/p},$$

было впервые доказано Е. М. Никишиным в [27] (другие доказательства этого результата см. в [24] или [4; пример 4.1]). В заключение заметим, что $\Lambda_p = (L_\infty, G)_{\theta, p}$, где $\theta = 2(p-1)/p$.

Список литературы

- [1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978; англ. пер.: S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
- [3] Я. Б. Рутцкий, “О некоторых классах измеримых функций”, *УМН*, **20**:4 (1965), 205–208.
- [4] С. В. Асташкин, *Функции Радемахера в симметричных пространствах*, СМФН, **32**, РУДН, М., 2009, 3–161; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Rademacher functions in symmetric spaces”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **169**:6 (2010), 725–886.
- [5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [6] P. F. Müller, *Isomorphisms between H^1 spaces*, IMPAN Monogr. Mat. (N. S.), **66**, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [7] Б. И. Голубов, “Ряды по системе Хаара”, *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ*. 1970, ВИНТИ, М., 1971, 109–146; англ. пер.: B. I. Golubov, “Series with respect to the Haar system”, *J. Soviet Math.*, **1**:6 (1973), 704–726.
- [8] I. Novikov, E. Semenov, *Haar series and linear operators*, Math. Appl., **367**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [9] С. В. Асташкин, Е. М. Семенов, “Ряды Хаара и пространства, определяемые функцией Пэли”, *Докл. РАН*, **445**:5 (2012), 489–491; англ. пер.: S. V. Astashkin, E. M. Semenov, “Haar series and spaces determined by the Paley function”, *Dokl. Math.*, **86**:1 (2012), 539–541.
- [10] C. Franchetti, E. M. Semenov, “A Hilbert space characterization among function spaces”, *Anal. Math.*, **21**:2 (1995), 85–93.
- [11] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces”, *Israel J. Math.*, **64**:3 (1988), 267–275.
- [12] Е. М. Семенов, “RUC-базисные свойства системы Хаара”, *Докл. РАН*, **348**:5 (1996), 590–591; англ. пер.: E. M. Semenov, “RUC-basis properties of the Haar system”, *Dokl. Math.*, **53**:3 (2008), 397–398.
- [13] P. Billard, S. Kwapien, A. Pelczyński, Ch. Samuel, “Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces”, *Texas Functional Analysis Seminar 1985–1986* (Austin, TX, 1985–1986), Longhorn Notes, Univ. Texas, Austin, TX, 1986, 13–35.
- [14] S. J. Szarek, “On the best constants in the Khinchin inequality”, *Studia Math.*, **58**:2 (1976), 197–208.
- [15] M. Kikuchi, “On the Davis inequality in Banach function spaces”, *Math. Nachr.*, **281**:5 (2008), 697–709.

- [16] В. А. Родин, Е. М. Семенов, “О дополняемости подпространства, порожденного системой Радемахера, в симметричном пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **13:2** (1979), 91–92; англ. пер.: V. A. Rodin, E. M. Semenov, “Complementability of the subspace generated by the Rademacher system in a symmetric space”, *Funct. Anal. Appl.*, **13:2** (1979), 150–151.
- [17] Y. Raynaud, “Complemented Hilbertian subspaces in rearrangement invariant function spaces”, *Illinois J. Math.*, **39:2** (1995), 212–250.
- [18] Е. В. Токарев, “О дополняемых подпространствах симметричных пространств функций”, *Матем. заметки*, **32:4** (1982), 493–497; англ. пер.: E. V. Tokarev, “Complemented subspaces of symmetric function spaces”, *Math. Notes*, **32:4** (1982), 726–728.
- [19] C. Bennett, R. A. DeVore, R. Sharpley, “Weak- L^∞ and BMO”, *Ann. of Math.* (2), **113:3** (1981), 601–611.
- [20] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [21] A. Korenovskii, *Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions*, Lect. Notes Unione Mat. Ital., **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [22] S. V. Astashkin, M. Leibov, L. Maligranda, “Rademacher functions in BMO”, *Studia Math.*, **205:1** (2011), 83–100.
- [23] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [24] V. A. Rodin, E. M. Semyonov, “Rademacher series in symmetric spaces”, *Anal. Math.*, **1:3** (1975), 207–222.
- [25] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Kruglyak, *Interpolation functors and interpolation spaces*, v. 1, North-Holland Math. Library, **47**, Amsterdam, North-Holland, 1991.
- [26] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [27] Е. М. Никишин, “Об одном свойстве сумм независимых величин”, *Матем. заметки*, **16:5** (1974), 703–706; англ. пер.: E. M. Nikishin, “On a property of sums of independent variables”, *Math. Notes*, **16:5** (1974), 1015–1017.

С. В. Асташкин (S. V. Astashkin)

Самарский государственный университет

E-mail: astash@samsu.ru

Поступила в редакцию

25.07.2012 и 15.12.2012

Е. М. Семенов (E. M. Semenov)

Воронежский государственный университет

E-mail: nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru