

С.В. АСТАШКИН

НЕРАВЕНСТВА ТИПА РОЗЕНТАЛЯ ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. Для последовательностей мартингаловых разностей в общих симметричных пространствах доказаны неравенства, аналогичные классическим неравенствам Розенталя. Центральную роль при этом играет предсказуемая квадратичная вариация мартингала.

Ключевые слова: мартингал, мартингаловые разности, неравенство Розенталя, симметричное пространство, индексы Бойда.

УДК: 517.5 : 517.982

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1970 году Х. Розенталь доказал замечательные неравенства [1], из которых следует, что для произвольной последовательности независимых и в среднем равных нулю функций из $L_p[0, 1]$, $p \geq 2$, отображение $f_k \rightarrow \bar{f}_k$, где $\bar{f}_k(t) := f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$ ($t > 0$), продолжается до изоморфизма между замкнутыми линейными оболочками $[f_k]_{k=1}^\infty$ (в $L_p[0, 1]$) и $[\bar{f}_k]_{k=1}^\infty$ (в $L_p[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$). Позднее этот результат был обобщен В. Джонсоном и Г. Шехтманом [2] на класс симметричных пространств (с. п.). Следуя ([3], с. 8) (см. также [4], 2.f), для каждого с. п. X на $[0, 1]$ определим с. п. Z_X^2 как множество всех функций f , измеримых на полуоси $[0, \infty)$, таких, что $\|f\|_{Z_X^2} := \|f^*\chi_{[0, 1]}\|_X + \|f^*\chi_{[1, \infty)}\|_{L_2[1, \infty)} < \infty$, где f^* — невозрастающая перестановка $|f|$. Согласно теореме 1 из [2] для любого с. п. X на $[0, 1]$, содержащего L_p при некотором $p < \infty$, существует такое $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(s) ds = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \quad (1)$$

(противоположное неравенство справедливо для каждого с. п. X).

Позднее в работах [5], [6] (см. также обзор [7]) результаты В. Джонсона и Г. Шехтмана были распространены на с. п., имеющие так называемое свойство Круглова, введенное ранее М. Браверманом ([8], с. 11) на основе некоторых вероятностных конструкций В.М. Круглова

Поступила 21.04.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00077, 12-01-00198).

[9]. Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, последнее свойство менее ограничительно по сравнению с условием $X \supset L_p$, где $p < \infty$. Например, его имеет экспоненциальное пространство Орлича $\text{Exp}(L_q)$, если $0 < q \leq 1$ (см. [9] или [8], с. 42); в то же время $\text{Exp}(L_q) \not\supset L_p$, ($0 < q, p < \infty$). Во-вторых, верно и обратное: если для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ независимых и в среднем равных нулю функций выполнено (1), то X имеет свойство Круглова ([7], теорема 22).

Цель этой работы — доказательство неравенств типа Розенталя для более общего класса мартингаловых разностей на основе применения техники оценок распределений, разработанной ранее при получении аналогичных мартингаловых неравенств модулярного типа [10]–[12] (см. также § 11 в [13]). Центральную роль при этом играет так называемая предсказуемая квадратическая вариация (или характеристика) мартингала. Иной подход, использующий, как и в случае независимых функций, дизъюнктивную сумму, был продемонстрирован в недавно опубликованной работе [14], где получены мартингаловые неравенства, аналогичные (1). Там они применены для сравнения мартингаловых разностей и неотрицательных функций с их независимыми копиями.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $J = [0, 1]$ или $(0, \infty)$. Две измеримые на J функции x и y называются *равноизмеримыми*, если $\lambda\{t \in J : |x(t)| > \tau\} = \lambda\{t \in J : |y(t)| > \tau\}$ ($\tau > 0$), где λ — мера Лебега. В частности, $|x|$ равноизмерим со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой* $x^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) < t\}$ ($t \in J$).

Банахово функциональное пространство X называется *симметричным* (с. п.), если

- 1) из того, что $|y(t)| \leq |x(t)|$ п. в. и $x \in X$, следует $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$;
- 2) из того, что функции $x(t)$ и $y(t)$ равноизмеримы и $x \in X$, имеем $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Если X — с. п. на J , то *двойственное* пространство X' состоит из всех измеримых y , для которых $\|y\|_{X'} := \sup \left\{ \int_J x(t)y(t) dt : \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty$. Пространство X' также симметрично

и изометрически вложено в сопряженное X^* ; при этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Любое с. п. X непрерывно вложено в свое второе двойственное X'' . С. п. X называется *максимальным*, если из того, что $x_n \in X$ ($n=1, 2, \dots$), $\sup_{n=1, 2, \dots} \|x_n\|_X < \infty$

и $x_n \rightarrow x$ п. в., следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Это эквивалентно тому, что $X'' = X$.

Далее, следуя ([4], с. 118), будем считать, что все с. п. сепарабельны или максимальны. Заметим, что все важные в приложениях с. п. являются таковыми, а также что каждое такое пространство вложено в свое второе двойственное изометрически.

В каждом с. п. X на $[0, 1]$ непрерывен оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \chi_{[0, \min(1, \tau)]}(t)$ ($\tau > 0$). Кроме того, $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ ([15], теорема 2.4.5). Так как функция $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}$ полумультипликативна, можно определить *нижний и верхний индексы Бойда* пространства X :

$$\alpha_X = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$ ([15], § 2.1, с. 138).

Говорят, с. п. X *p-выпукло* ($1 \leq p < \infty$), если существует такая константа $C_X > 0$, что $\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_X \leq C_X \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^p \right)^{1/p}$ для произвольных $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X .

Нам понадобится также понятие с. п. случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. А именно, если X — с. п. на $[0, 1]$, то соответствующее пространство $X(\Omega)$ состоит из таких с. в. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что $f^* \in X$ и $\|f\|_{X(\Omega)} := \|f^*\|_X$. В этом случае $f^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} < t\}$ ($0 < t \leq 1$). Подробнее о с. п. см. [15] и [4].

Всюду в дальнейшем $\{\mathcal{A}_k\}_{k=1}^\infty$ — поток σ -алгебр на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, т. е. $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_k \subset \dots \subset \mathcal{A}$. Через $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$, как обычно, будет обозначаться *условное математическое ожидание* $\mathcal{A}$ -измеримой с. в. f относительно σ -подалгебры $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Это означает, что $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$ -измерима и для каждого $B \in \mathcal{B}$ имеем $\int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) d\mathbb{P} = \int_B f d\mathbb{P}$.

Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ $\mathcal{A}_k$ -измеримых с. в. называется *мартингалом*, если $\mathbb{E}(f_k|\mathcal{A}_{k-1}) = f_{k-1}$ п. в. для всех $k = 2, 3, \dots$. Тогда с. в. $d_k := f_k - f_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$), где $f_0 = 0$, называются *мартингальными разностями*. Важный пример мартингальных разностей — последовательность независимых с. в. $\{d_k\}_{k=1}^\infty \subset L_1(\Omega)$ таких, что $\int_\Omega d_k d\mathbb{P} = 0$

($k = 1, 2, \dots$), относительно потока σ -алгебр $\mathcal{A}_k = \sigma(\{f_i\}_{i=1}^k)$, порожденных наборами $\{d_i\}_{i=1}^k$. Другой пример — последовательность функций Хаара $\{\chi_k\}_{k=1}^\infty$ (см., например, [16], § 3.1). Подробнее о свойствах условных математических ожиданий, мартингалов и мартингальных разностей см. [17], [18] и [19].

Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность $\mathcal{A}$ -измеримых с. в., то $M(f) := \sup_{k=1,2,\dots} |f_k|$, $d_k := f_k - f_{k-1}$ ($f_0 = 0$), $S(f) := \left(\sum_{k=1}^\infty d_k^2\right)^{1/2}$ и $s(f) := \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}(d_k^2|\mathcal{A}_{k-1})\right)^{1/2}$. В случае, когда $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — мартингал, величины $S(f)^2$ и $s(f)^2$ называются соответственно его *квадратической* и *предсказуемой квадратической вариацией*. И наконец, если f и g — две с. в., то $f \vee g := \max(f, g)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть X — с. п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Следующие условия эквивалентны:

(i) существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что для произвольного мартингала $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено неравенство

$$\|M(f)\|_X \leq C(\|s(f)\|_X + \|M(d)\|_X); \quad (2)$$

(ii) $\alpha_X > 0$.

Схема доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (i). Для произвольных $\beta > 1$ и $0 < \delta < \beta - 1$ справедлива оценка

$$\mathbb{P}\{M(f) > \beta x, s(f) \vee M(d) \leq \delta x\} \leq \frac{\delta^2}{(\beta - \delta - 1)^2} \mathbb{P}\{M(f) > x\} \quad (x > 0). \quad (3)$$

Другой компонент доказательства — следующее утверждение, с помощью которого можно сравнивать с. в. в симметричных пространствах с положительным нижним индексом Бойда.

Предложение. Пусть X — с. п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Предположим, что с. в. $g \geq 0$ и $h \geq 0$ измеримы на Ω , $h \in X$, а числа $\beta > 1$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in (0, \alpha_X)$ таковы, что $\|\sigma_\varepsilon\|_{X \rightarrow X} \leq \varepsilon^\gamma$, $\beta\varepsilon^\gamma < 1$ и

$$\mathbb{P}\{g > \beta\tau, h \leq \delta\tau\} \leq \varepsilon \mathbb{P}\{g > \tau\} \quad (\tau > 0).$$

Тогда $g \in X$ и

$$\|g\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} \|h\|_X.$$

Комбинируя предложение, сформулированное выше, с оценкой (3), получаем (2). Действительно, пусть $\beta > 1$ и $\gamma \in (0, \alpha_X)$ произвольны, а $\delta \in (0, \beta - 1)$ настолько мало, что число $\varepsilon := 2\delta^2/(\beta - \delta - 1)^2$ удовлетворяет условиям $\|\sigma_\varepsilon\|_{X \rightarrow X} \leq \varepsilon^\gamma$ и $\beta\varepsilon^\gamma < 1$. Так как неравенство (3), в частности, справедливо для выбранных β и δ , то, применяя предложение, получаем

$$\|M(f)\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} \|s(f) \vee M(d)\|_X \leq \frac{\beta}{\delta(1 - \beta\varepsilon^\gamma)} (\|s(f)\|_X + \|M(d)\|_X). \quad \square$$

Непосредственное следствие теоремы 1 — неравенство Розенталя для последовательностей независимых с.в., в среднем равных нулю, в случае, когда нижний индекс Бойда с.п. X положителен и $X \subset L_2[0, 1]$ (см. (1)). Напомним, что для каждой последовательности $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ функций, заданных на $[0, 1]$, полагаем $\bar{d}_k(t) = d_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$ ($t > 0$).

Кроме того, пусть $\bar{d} := \sum_{k=1}^\infty \bar{d}_k$.

Следствие 1. Пусть X — такое с.п. на $[0, 1]$, что $X \subset L_2[0, 1]$ и $\alpha_X > 0$. Тогда существует такая константа $A > 0$, что для произвольной последовательности независимых с.в. $\{d_k\}_{k=1}^\infty$, $\mathbb{E}d_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty d_k \right\|_X \leq A \|\bar{d}\|_{Z_X^2}. \quad (4)$$

В частности, получаем классическое неравенство Розенталя: для произвольного $p \geq 2$ существует константа $A_p > 0$, для которой

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^\infty d_k \right|^p \leq A_p \left(\left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}d_k^2 \right)^{p/2} + \sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}|d_k|^p \right). \quad (5)$$

Доказательство. С.в. $f_n := \sum_{k=1}^n d_k$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют мартингал относительно последовательности $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^\infty$, где $\mathcal{A}_n = \sigma(\{d_k\}_{k=1}^n)$. Ввиду независимости d_k^2 относительно σ -алгебры $\mathcal{A}_{k-1}$ имеем $\mathbb{E}(d_k^2 | \mathcal{A}_{k-1}) = \mathbb{E}d_k^2$. Следовательно, так как $X \subset L_2[0, 1]$, то

$$\|s(f)\|_X = \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}d_k^2 \right)^{1/2} = \|\bar{d}\|_{L_2(0, \infty)} \leq \|\bar{d}^* \chi_{[0, 1]}\|_{L_2[0, 1]} + \|\bar{d}^* \chi_{[1, \infty]}\|_{L_2[1, \infty)} \leq C \|\bar{d}\|_{Z_X^2}.$$

Кроме того (см. [20], предложение 1 или [2], лемма 3),

$$\frac{1}{2} \lambda \{\bar{d}^* \chi_{[0, 1]} > \tau\} \leq \lambda \{M(d) > \tau\} \leq \lambda \{\bar{d}^* \chi_{[0, 1]} > \tau\} \quad (\tau > 0), \quad (6)$$

откуда

$$\|M(d)\|_X \leq \|\bar{d}^* \chi_{[0, 1]}\|_X \leq \|\bar{d}\|_{Z_X^2}.$$

Тем самым, применяя теорему 1 и учитывая, что X сепарабельно или максимально, получаем неравенство (4).

Для доказательства (5) заметим

$$\|M(d)\|_{L_p} \leq \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty |d_k|^p \right)^{1/p} \right\|_{L_p} = \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}|d_k|^p \right)^{1/p},$$

откуда ввиду (6) и ([15], следствие 2.4.2)

$$\begin{aligned} \|\bar{d}\|_{Z_{L_p}^2} &\leq \|\bar{d}^* \chi_{[0,1]}\|_{L_p[0,1]} + \|\bar{d}\|_{L_2(0,\infty)} \leq 2\|M(d)\|_{L_p[0,1]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} d_k^2\right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |d_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} d_k^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (5) — непосредственное следствие (4). $\square$

Для с. п., лежащих “по одну сторону” от L_2 справедливо также неравенство, противоположное по отношению к (2).

Теорема 2. Пусть X — 2-выпуклое с. п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что для произвольного мартингала $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено неравенство

$$\|s(f)\|_X + \|M(d)\|_X \leq C\|M(f)\|_X. \quad (7)$$

Замечание. Условие 2-выпуклости пространства в последней теореме существенно. Приведем пример, принадлежащий М. Кикучи, которому автор благодарен за любезное разрешение его опубликовать.

Предположим, что с. п. $X \not\subset L_2$. Пусть также x и y — две неотрицательные с. в. с одним и тем же распределением и дизъюнктными носителями такие, что $x, y \in X \setminus L_2$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим последовательность $f^{(n)} = \{f_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$f_0^{(n)} = 0 \text{ и } f_k^{(n)} = (x \wedge n) - (y \wedge n), \text{ если } k \geq 1.$$

Тогда $f^{(n)}$ — мартингал относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{A}_k\}$: $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{A}_k = \sigma(\{x, y\})$ для $k \geq 1$. Ясно, что

$$M(f^{(n)}) = (x \wedge n) + (y \wedge n) \text{ и } s(f^{(n)}) = (\mathbb{E}[(x \wedge n)^2 + (y \wedge n)^2])^{1/2}.$$

Следовательно, с одной стороны, $\|M(f^{(n)})\|_X \leq 2\|x\|_X < \infty$ ($n \in \mathbb{N}$), а с другой, при $n \rightarrow \infty$ получаем $\|s(f^{(n)})\|_X \rightarrow \infty$.

Тем не менее, для определенного класса мартингалов неравенство (7) оказывается верным во всех с. п. с положительным нижним индексом Бойда.

Теорема 3. Пусть X — с. п. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\alpha_X > 0$. Предположим, что мартингал $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию: для некоторой $\mathcal{A}_{k-1}$ -измеримой с. в. w_k справедливо неравенство $|d_k| \leq w_k$ ($k = 1, 2, \dots$), причем $M(w) := \sup_{k=1,2,\dots} w_k \in X$.

Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от пространства X , такая, что

$$\|s(f)\|_X \leq C(\|M(f)\|_X + \|M(w)\|_X). \quad (8)$$

Следствие 2. Пусть χ_k — функции Хаара, нормированные в L_{∞} , $c_k \in \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots$), а $h = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ — мартингал относительно потока σ -алгебр $\mathcal{A}_n = \sigma(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$, образованный последовательностью сумм Хаара $h_n = \sum_{k=0}^n c_k \chi_k$. Тогда для произвольного с. п. X такого, что $\alpha_X > 0$, существует константа $C > 0$, зависящая только от X , для которой $\|s(h)\|_X \leq C\|M(h)\|_X$.

Доказательство. Заметим, что соответствующие мартингаловые разности $d_k := h_k - h_{k-1}$ ($h_{-1} = 0$) удовлетворяют неравенствам $|d_k| = |c_k \chi_k| \leq |c_k| \chi_{\Delta_k}$, где Δ_k — двоичный интервал, являющийся носителем функции Хаара χ_k ($k = 0, 1, \dots$). Так как χ_{Δ_k} — $\mathcal{A}_{k-1}$ -измеримая с.в. и $\sup_{k=0,1,\dots} |c_k| \chi_{\Delta_k} \leq 2M(h)$, то нужное нам неравенство является следствием предыдущей теоремы. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rosenthal H.P. *On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables*, Israel J. Math., **8**, 273–303 (1970).
- [2] Johnson W.B., Schechtman G. *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces*, Ann. Probab. **17** (2), 789–808 (1989).
- [3] Johnson W.B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L. *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **1** (217) (1979).
- [4] Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces*, (Springer-Verlag, Berlin, 1979), Vol. II.
- [5] Astashkin S.V., Sukochev F.A. *Sums of independent random variables in symmetric spaces: an operator approach*, Israel J. Math. **145**, 125–156 (2005).
- [6] Асташкин С.В., Сукочев Ф.А. *Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова*, Зап. научн. семин. ПОМИ. Иссл. по лин. опер. и теор. функций **345**, 25–50 (2007).
- [7] Асташкин С.В., Сукочев Ф.А. *Независимые функции и геометрия банаховых пространств*, УМН **65** (6), 3–86 (2010).
- [8] Braverman M.Sh. *Independent random variables and symmetric spaces* (Cambridge University Press, Melbourne, 1994).
- [9] Круглов В.М. *Замечание к теории безгранично делимых законов*, Теория вероятн. и ее примен. **15** (2), 330–336 (1970).
- [10] Burkholder D.L., Gandy R.F. *Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales*, Acta Math. **124** (1), 249–304 (1970).
- [11] Burkholder D.L., Davis B.J., Gandy R.F. *Integral inequalities for convex functions of operators on martingales*, in: Proc. of Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Vol. II: Probability theory (Univ. California Press, Berkeley, CA, 1972), 223–240.
- [12] Burkholder D.L. *Distribution function inequalities for martingales*, Ann. Probab. **1** (1), 19–42 (1973).
- [13] Пешкир Г., Ширяев А.Н. *Неравенства Хинчина и мартингаловое расширение сферы их действия*, УМН **50** (5), 3–62 (1995).
- [14] Astashkin S.V., Sukochev F.A., Wong C.P. *Disjointification of martingale differences and conditionally independent random variables with some applications*, Studia Math. **205** (2), 171–200 (2011).
- [15] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов* (Наука, М., 1978).
- [16] Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды* (АФЦ, М., 1999).
- [17] Ширяев А.Н., *Вероятность* (Наука, М., 1980).
- [18] Эллиотт Р. *Стохастический анализ и его приложения* (Мир, М., 1986).
- [19] Neveu J. *Discrete parameter martingales* (North-Holland, Amsterdam, 1975).
- [20] Hitczenko P., Montgomery-Smith S. *Measuring the magnitude of sums of independent random variables*, Ann. Probab. **29** (1), 447–466 (2001).

С.В. Асташкин

профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и теории функций,
Самарский государственный университет,
ул. Ак. Павлова, д. 1, г. Самара, 443011, Россия,

e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

S.V. Astashkin

Rosenthal type inequalities for martingales in symmetric spaces

Abstract. Inequalities similar to the classical Rosenthal inequalities are proved for sequences of martingale differences in general symmetric spaces. A central role is played by the predictable square variation of a martingale.

Keywords: martingale, martingale differences, Rosenthal inequality, symmetric space, Boyd indices.

S.V. Astashkin

*Professor, Head of the Chair of Functional Analysis and Function Theory,
Samara State University,
1 Akad. Pavlov str., Samara, 443011 Russia,*

e-mail: astashkn@ssu.samara.ru