

РЯДЫ ХААРА И ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ФУНКЦИЕЙ ПЭЛИ

© 2012 г. С. В. Асташкин, Е. М. Семенов

Представлено академиком Б.С. Кашиным 06.03.2012 г.

Поступило 29.03.2012 г.

1. Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется симметричным (кратко с.п.) или перестановочно-инвариантным, если

1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ следует: $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости функций x и y , т.е. равенства

$$m\{t \in [0, 1]: |y(t)| > u\} = m\{t \in [0, 1]: |x(t)| > u\} \quad (u > 0),$$

где m — мера Лебега, и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Следуя [1], мы будем считать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству. Предполагается также выполненным условие нормировки: $\|k_{[0,1]}\|_E = 1$, где $k_e(t)$ — характеристическая функция измеримого подмножества $e \subset [0, 1]$. Тогда $L_\infty \subset E \subset L_1$ и $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty}$ для любого $x \in L_\infty$. В любом с.п. E ограниченно действует оператор подобного преобразования аргумента

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{\tau}\right), & 0 \leq t \leq \min(1, \tau), \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1] \end{cases}$$

и $\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq \max(\tau, 1)$ для всех $\tau > 0$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются индексами Бойда с.п. E . Всегда $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$. Например, $\alpha_{L_p} = \beta_{L_p} = \frac{1}{p}$ для всех $p \in [1, \infty]$. Важный класс с.п. образуют пространства Орлича. Пусть $M(u)$ — строго возрастающая выпук-

лая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Тогда пространство Орлича L_M состоит из всех таких $x \in L_1$, что

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1$$

для достаточно большого $\lambda > 0$. В качестве нормы в L_M рассматривается функционал $\|x\|_{L_M} = \inf \lambda$, где $\inf$ берется по всем $\lambda > 0$, для которых выполнено предыдущее неравенство. Пространство Орлича, построенное по функции $M(u) = e^{u^2} - 1$, обозначается через $\text{exp } L_2$.

Функции $\chi_0^0(t) = 1$,

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & t \in \Delta_{n+1}^{2k-1}, \\ -2^{n/2}, & t \in \Delta_{n+1}^{2k}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1], \end{cases}$$

где $\Delta_n^k = ((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$, $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$, образуют систему Хаара. Интервалы Δ_n^k , $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$, называются диадическими. Обозначим через Ω множество индексов функций Хаара, т.е. $\Omega = \{(0, 0), (n, k), 1 \leq k \leq 2^n, n = 0, 1, \dots\}$. Формула $m = 2^n + k$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между Ω и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, позволяя тем самым записывать эту систему, используя лишь один индекс $\{\chi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Функции Хаара образуют полную ортонормированную систему, являющуюся монотонным базисом в любом сепарабельном с.п. Для того чтобы система Хаара была безусловным базисом в сепарабельном с.п. E , необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$. В этом случае $\|x\|_E$ эквивалентна $\|Px\|_E$, где

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \chi_m(t), \quad Px(t) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} (c_m \chi_m(t))^2 \right)^{1/2}.$$

Функция $Px(t)$ называется функцией Пэли. Более подробно о с.п. см. монографии [1, 2], о системах Хаара и Радемахера (см. далее) — [3–6].

Для заданного с.п. E через $P(E)$ обозначим пространство функций с нормой

$$\|x\|_{P(E)} = \|Px\|_E.$$

Настоящая работа посвящена изучению пространств $P(E)$ и, в частности, $P(L_\infty)$.

Теорема 1. Пусть E — с.п. Для того чтобы $P(E)$ было с.п., необходимо и достаточно, чтобы $E = L_2$ и $\|x\|_E = \|x\|_{L_2}$ для всех $x \in L_2$.

Достаточность, конечно, сразу вытекает из равенства Парсевала. При изоморфной постановке вопроса ответ будет совершенно иным.

Теорема 2. Пусть E — с.п. Для того чтобы $P(E)$ было с.п. с точностью до эквивалентности норм, необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$.

Достаточность этой теоремы — непосредственное следствие ранее упомянутого критерия безусловности системы Хаара в с.п. [1, 2, с.6] или [2, 2.9.6].

Последовательность функций

$$r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t, \quad n \in \mathbb{N},$$

называется системой Радемахера. Если $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_2$, то согласно теореме Радемахера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \quad (1)$$

сходится почти всюду. Множество функций вида (1) обозначим через Rad. Так как

$$r_{n+1}(t) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n^k(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n\right)(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что $\text{Rad} \subset P(E)$ и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_{P(E)} = \|a\|_{l_2}$$

для любого с.п. E . Тем самым вместе с Rad пространство $P(E)$ содержит неограниченные функции.

Теорема 3. Подпространство Rad 1-дополняемо в $P(E)$ для любого с.п. E .

Напомним, что пространство функций ограниченной осцилляции $\text{ВМО} = \text{ВМО}[0, 1]$ состоит из всех $x \in L_1[0, 1]$, таких, что

$$\|x\|_{\text{ВМО}} = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |x(t) - x_I| dt < \infty, \quad (2)$$

где $\sup$ берется по всем невырожденным интервалам $I \subset [0, 1]$, и $x_I = \frac{1}{|I|} \int_I x(s) ds$. Если же

в определении (2) $\sup$ берется лишь по множеству диадических интервалов, то получим диадический вариант такого пространства, который обозначается через ВМО_d . Очевидно, $\text{ВМО} \subset \text{ВМО}_d$ и $\|x\|_{\text{ВМО}_d} \leq \|x\|_{\text{ВМО}}$ для всех $x \in \text{ВМО}$.

Прежде чем привести основные теоремы о пространстве $P(L_\infty)$, заметим, что в силу теоремы 2 норма $P(L_\infty)$ не эквивалентна норме любого с.п. Нетрудно также показать, что $P(L_\infty)$ не сепарабельно. Кроме того, $P(L_\infty) \subset \text{ВМО}_d$ и $\|x\|_{\text{ВМО}_d} \leq \|x\|_{P(L_\infty)}$ для всех $x \in P(L_\infty)$.

Ввиду [5, следствие 1.3.2] справедлива следующая оценка распределений функций из про-

странства $P(L_\infty)$: если $\int_0^1 f ds = 0$, то

$$m\{s \in [0, 1]: |f(s)| > t\} \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\|f\|_{P(L_\infty)}^2}\right) \quad (t > 0).$$

Отсюда следует, что $P(L_\infty) \subset \exp L_2$ и $\|x\|_{\exp L_2} \leq C\|x\|_{P(L_\infty)}$ для всех $x \in P(L_\infty)$ и некоторой константы $C > 0$. Как известно [2, 2.5.3], пространство $\exp L_2$ обладает следующим экстремальным свойством: функция $x \in L_1$ принадлежит $\exp L_2$, если и только если

$$\sup_{0 < t \leq 1} x^*(t) \ln^{-1/2} \frac{e}{t} < \infty,$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $|x(t)|$ в убывающем порядке. Следующая теорема указывает на тесную связь между пространствами $P(L_\infty)$ и $\exp L_2$.

Теорема 4. Для любой функции $x \in \exp L_2$ существует такая функция $f \in P(L_\infty)$, что

$$\frac{1}{C_1} \|x\|_{\exp L_2} \leq \|f\|_{P(L_\infty)} \leq C_1 \|x\|_{\exp L_2},$$

$$x^*(t) \leq C_2(f^*(t) + \|f\|_{P(L_\infty)}),$$

где константы C_1, C_2 не зависят от x и f .

В частности, существует $f_0 \in P(L_\infty)$, $\|f_0\|_{P(L_\infty)} = 1$,

такая, что $f_0^*(t) \leq \ln^{1/2} \frac{e}{t}$ для всех $t \in (0, 1]$ и $f_0^*(t) \geq \frac{1}{4} \ln^{1/2} \frac{e}{t}$ для всех $t \in (0, t_0]$ и некоторого $t_0 \in (0, 1)$.

3. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, т.е. X_0 и X_1 вложены в некоторое отделимое линейное топо-

логическое пространство, и $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$.
Функционал

$$K(t, x, X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : \\ x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \}$$

называется K -функционалом Петре пары (X_0, X_1) . Пусть Y_0, Y_1 — замкнутые подпространства X_0 и X_1 соответственно. Пара (Y_0, Y_1) называется K -замкнутой подпарой пары (X_0, X_1) , если функционалы $K(t, x, X_0, X_1)$ и $K(t, x, Y_0, Y_1)$ эквивалентны с константами, не зависящими от $t > 0$ и $x \in Y_0 + Y_1$. По банаховой паре (X_0, X_1) и банаховой решетке F на $(0, \infty)$ с мерой $\frac{dt}{t}$ можно построить простран-

ство $(X_0, X_1)_F^K$ с нормой

$$\|x\| := \|K(t, x, X_0, X_1)\|_F,$$

которое интерполяционно относительно банаховой пары (X_0, X_1) [1, 2, г. 4].

Рассмотрим оператор

$$Ra(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t), \quad a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2,$$

где r_n — функции Радемахера. Оператор R изометрично действует из l_1 в L_{∞} и из l_2 в $P(L_{\infty})$.

Т е о р е м а 5. *Банахова пара $(R(l_1), R(l_2))$ является K -замкнутой подпарой пары $(L_{\infty}, P(L_{\infty}))$.*

С помощью этой теоремы доказывается

Т е о р е м а 6. *Пусть F — банахова решетка и $E = (l_1, l_2)_F^K$. Если $X = (L_{\infty}, P(L_{\infty}))_F^K$, то нормы $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_X$ и $\|a\|_E$ эквивалентны.*

Теорема 6 позволяет по интерполяционному в паре (l_1, l_2) пространству E найти пространство X , интерполяционное относительно пары $(L_{\infty}, P(L_{\infty}))$, такое что на Rad норма из X эквивалентна норме E .

Настоящая работа была поддержана грантами РФФИ 10–01–00077а и 11–01–00614а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces II. Function spaces. В.-Heidelberg; N.Y: Springer, 1979.
2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
3. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.
4. Novikov I., Semenov E. Haar Series and Linear Operators. Dordrecht: Kluwer, 1996.
5. Müller P.F., Isomorphisms Between H^1 Spaces. Mathematical Monographs. New Ser. Basel: Birkhäuser, 2005. V. 66.
6. Асташкин С.В. Современная математика. Фундаментальные направления. М.: РУДН, 2009. Т. 32. Р. 3–161.