

УДК 517.982.27

С. В. Асташкин

О геометрических свойствах пространств Чезаро

Доказано, что пространство Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^q , тогда и только тогда, когда $q = 1$ или $q = p$. Выделен класс подпространств этого пространства, содержащих дополняемые копии пространства l^p .

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: банаховы решетки, пространства Чезаро, дополняемые подпространства, копии l^q -пространств, сублинейные операторы.

§ 1. Введение и предварительные сведения

Хорошо известно, что нормы многих банаховых пространств, играющих важную роль в функциональном анализе и его приложениях, порождаются L_p -нормами и положительными сублинейными операторами. Одним из интересных примеров пространств этого типа являются пространства Чезаро (другие примеры см. в статье [1], а также в заключительной части этой работы). Широкую известность последние приобрели в конце 60-х годов прошлого века в связи с проблемой описания сопряженных к ним, поставленной Математическим обществом Нидерландов [2]. В дальнейшем будут рассматриваться пространства Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$, которые состоят из всех измеримых на $[0, 1]$ функций f , удовлетворяющих условиям

$$\|f\|_{C(p)} = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| ds \right)^p dt \right]^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.1)$$

$$\|f\|_{C(\infty)} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{t} \int_0^t |f(s)| ds < \infty. \quad (1.2)$$

Заметим, что пространство $\text{Ces}_\infty[0, 1]$, известное как пространство Коренблюма–Крейна–Левина K , впервые возникло еще в 1948 г. в связи с решением задач из теории сингулярных интегралов (см. [3] и [4; гл. 0, 1]).

Одной из наиболее важных характеристик геометрической структуры того или иного банахова пространства является наличие в нем (дополняемых) l^q -копий, т.е. (дополняемых) подпространств, изоморфных пространству l^q , $1 \leq q \leq \infty$ (см., например, [5; гл. 6, 10, 11]). В случае L_p -пространств справедливы следующие результаты, которые показывают различие их геометрических свойств при $1 < p < 2$ и $2 < p < \infty$ (см. [5; теорема 6.4.19 и теорема 6.4.21], а также классическую работу Кадеца и Пелчинского [6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00077).

ТЕОРЕМА А. Пусть $1 \leq q \leq \infty$.

- (а) Если $1 \leq p \leq 2$, то пространство l^q изоморфно вложено в $L_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $p \leq q \leq 2$.
- (б) Если $2 < p < \infty$, то пространство l^q изоморфно вложено в $L_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $q = p$ или $q = 2$.
- (с) Если $1 < p < \infty$, то $L_p[0, 1]$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^q , если и только если $q = p$ или $q = 2$.

Аналогичное описание множества всех q , для которых изоморфные копии l^q содержатся в пространстве Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$, было дано в работе [7; теорема 10].

ТЕОРЕМА В. (а) Если $1 \leq p \leq 2$, то пространство l^q изоморфно вложено в $\text{Ces}_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $q \in [1, 2]$.

(б) Если $2 < p < \infty$, то пространство l^q изоморфно вложено в $\text{Ces}_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $q \in [1, 2]$ или $q = p$.

Основная цель этой работы – определение множества всех $1 \leq q \leq \infty$, для которых пространство Чезаро содержит дополняемые l^q -копии. Оказалось (см. теорему 2), что пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, является в некотором смысле “комбинацией” пространств L_1 и L_p , так как содержит лишь дополняемые l^1 - и l^p -копии (их примеры были ранее приведены в [8; теорема 1] и [7; теорема 6] соответственно). Аналогичный результат доказан также для l^q -копий пространства Чезаро, порожденных последовательностями дизъюнктивных функций (теорема 1 и следствие 1). В §3 также доказана теорема 3 типа Кадеца–Пелчинского [6] о геометрической структуре пространства $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, показывающая, что любое его “нетривиальное” подпространство содержит дополняемую l^p -копию. Доказательства этих утверждений в значительной мере опираются на результаты §2 (интересные, на наш взгляд, и сами по себе), согласно которым геометрические свойства пространства Чезаро “вблизи” нуля и единицы аналогичны свойствам пространства $L_p[0, 1]$. В заключительном §4 приведена общая конструкция пространств, определяемых сублинейными операторами.

Напомним необходимые в дальнейшем определения. Пусть $L^0 = L^0[0, 1]$ – множество всех конечных почти всюду (п.в.) вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на $[0, 1]$ (точнее, их классов эквивалентности). Тогда под банаховой решеткой (банаховым идеальным пространством) понимается банахово пространство $X \subset L^0$ со следующим свойством: если $|f| \leq |g|$ п.в. на $[0, 1]$ и $g \in X$, то $f \in X$ и $\|f\| \leq \|g\|$. Подробнее о свойствах банаховых решеток см. монографии [9]–[11].

Напомним, что ассоциированной решеткой к банаховой решетке X на $[0, 1]$ называется множество X' всех таких функций $f \in L^0$, что

$$\|f\|_{X'} := \sup_{g \in X, \|g\|_X \leq 1} \int_0^1 |f(t)g(t)| dt < \infty.$$

Это также банахова решетка на $[0, 1]$. Кроме того, $X \subset X''$ и $\|f\|_{X''} \leq \|f\|_X$ для всех $f \in X$. При этом $X = X''$ и $\|f\|_{X''} = \|f\|_X$ тогда и только тогда, когда пространство X максимально, т.е. если $0 \leq f_n \nearrow f$ п.в. на $[0, 1]$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$, то $f \in X$ и $\|f_n\| \nearrow \|f\|$. Имеет место вложение $X' \subset X^*$,

где X^* – пространство, сопряженное к X . Кроме того, $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно.

Для произвольной банаховой решетки X на $[0, 1]$ и ассоциированной к ней X' выполнено следующее неравенство типа Гёльдера: если $f \in X$ и $g \in X'$, то fg интегрируема и

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

Пространство Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой, определенной в (1.1) для конечного p и в (1.2) для $p = \infty$, очевидно, является максимальной банаховой решеткой на $[0, 1]$. Нетрудно показать, что $\text{Ces}_1[0, 1]$ изометрически совпадает с весовым пространством $L^1(\ln(1/t))$ (см. [7; теорема 1]). Заметим также, что пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, сепарабельно, а $\text{Ces}_\infty[0, 1]$ – нет. Как доказано в [7; теорема 4], для каждого $1 \leq p < \infty$ пространство Чезаро p -вогнуто с константой 1, т.е.

$$\left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} \leq \left\| \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^p \right)^{1/p} \right\|_{C(p)}$$

для всех $f_1, f_2, \dots, f_n \in \text{Ces}_p[0, 1]$.

Для произвольной функции f , измеримой на $[0, 1]$, обозначим

$$\tilde{f}(t) = \text{ess sup}_{s \in [t, 1]} |f(s)|.$$

Тогда, как доказано в [12], $(\text{Ces}_\infty[0, 1])' = \tilde{L}_1$ и $\|f\|_{C(\infty)'} \asymp \|f\|_{\tilde{L}_1}$, где $\|f\|_{\tilde{L}_1} = \|\tilde{f}\|_{L_1}$. В случае $1 < p < \infty$ сопряженное (а тем самым и ассоциированное) пространство к $\text{Ces}_p[0, 1]$ было описано в [7; теорема 3]:

$$(\text{Ces}_p[0, 1])^* = (\text{Ces}_p[0, 1])' = U(q), \quad \|f\|_{C(p)'} \asymp \|f\|_{U(q)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где

$$\|f\|_{U(q)} = \left\| \frac{\tilde{f}(t)}{1-t} \right\|_{L_q} = \left[\int_0^1 \left(\frac{\tilde{f}(t)}{1-t} \right)^q dt \right]^{1/q}. \quad (1.3)$$

В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений. Пусть $I = [a, b]$ и $J = [c, d]$ – два отрезка на вещественной прямой. Тогда неравенство $I < J$ означает, что $b \leq c$. Если банаховы пространства X и Y изоморфны, то пишем $X \simeq Y$. Замкнутое линейное подпространство банахова пространства будет называться далее просто подпространством. Через $[x_n]$ обозначаем замкнутую линейную оболочку в банаховом пространстве X , порожденную последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X , а через $\text{supp } f$ – носитель функции f , т.е. множество $\{t \in [0, 1] : f(t) \neq 0\}$. И наконец, выражение $F \asymp G$ означает, что $cF \leq G \leq CF$ для некоторых констант $c > 0$ и $C > 0$, не зависящих от всех или части аргументов функций (квазинорм) F и G .

§ 2. Дополняемые l^p -копии в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$ “вблизи” нуля и единицы

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее утверждение, показывающее, что “вблизи” нуля геометрические свойства пространства Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$ аналогичны свойствам пространства $L_p[0, 1]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $1 < p \leq \infty$. Предположим, что последовательность $\{x_n\} \subset \text{Ces}_p[0, 1]$ такова, что $\text{supp } x_n \subset I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, $I_1 > I_2 > \dots$ и $b_n \rightarrow 0^+$.

Тогда существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от p , имеют место неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k}\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} \right\|_{C(p)} \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k}\|_{C(p)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad (2.1)$$

$$\sup_{k=1,2,\dots} \|x_{n_k}\|_{C(\infty)} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} \right\|_{C(\infty)} \leq C \sup_{k=1,2,\dots} \|x_{n_k}\|_{C(\infty)}. \quad (2.2)$$

Более того, подпространство $[x_{n_k}]$ дополняемо в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, p -вогнуто с константой 1 (см. § 1 или [7; теорема 4]), то левое неравенство в (2.1) и (2.2) выполнено для произвольной последовательности дизъюнктивных функций. Докажем, что для некоторой подпоследовательности (и с некоторой константой) справедливо противоположное неравенство.

Очевидно, можно считать, что $x_n \geq 0$, $x_n \neq 0$ и $b_1 \leq 1/2$. Рассмотрим сначала случай $1 < p < \infty$.

Нетрудно видеть, что из данной последовательности отрезков $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, можно выбрать подпоследовательность (ее отрезки мы также будем обозначать через $I_n = [a_n, b_n]$), для которой имеют место неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq 2^{-n/(p-1)} a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Покажем, что для соответствующей подпоследовательности функций, которую мы по-прежнему будем обозначать $\{x_n\}$, $\text{supp } x_n \subset I_n$, выполнено правое неравенство в (2.1).

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in (0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \sum_{k=1}^n x_k(s) \right| ds &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \sum_{i=n-j+2}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[a_{n-j+1}, b_{n-j+1}]}(t) \\ &+ \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \int_{a_{n-j+1}}^t x_{n-j+1}(s) ds \chi_{[a_{n-j+1}, b_{n-j+1}]}(t) \\ &+ \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \sum_{i=n-j+1}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[b_{n-j+1}, a_{n-j}]}(t) \\ &= T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) + T_4(t), \end{aligned}$$

где $a_0 = 1$ и

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{1}{t} \sum_{j=2}^n \sum_{i=n-j+2}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[a_{n-j+1}, b_{n-j+1}]}(t), \\ T_2(t) &= \frac{1}{t} \sum_{j=2}^n \sum_{i=n-j+2}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[b_{n-j+1}, a_{n-j}]}(t), \\ T_3(t) &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \int_{a_{n-j+1}}^{b_{n-j+1}} x_{n-j+1}(s) ds \chi_{[b_{n-j+1}, a_{n-j}]}(t), \\ T_4(t) &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \int_{a_{n-j+1}}^t x_{n-j+1}(s) ds \chi_{[a_{n-j+1}, b_{n-j+1}]}(t). \end{aligned}$$

Так как $\|\chi_{[a,b]}\|_{C(p)'} \asymp \|\chi_{[a,b]}\|_{U(q)}$ (см. § 1), то ввиду (1.3) для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds &\leq C_1 \|x_i\|_{C(p)} \cdot \|\chi_{[a_i, b_i]}\|_{U(q)} = C_1 \|x_i\|_{C(p)} \left[\frac{1 - (1 - b_i)^{q-1}}{(1 - b_i)^{q-1}} \right]^{1/q} \\ &\leq C'_1 (1 - (1 - b_i)^{q-1})^{1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из элементарного неравенства

$$1 - (1 - t)^{q-1} \leq 2(q-1)t,$$

верного для всех $1 < q < \infty$ и $0 < t \leq 1/2$, следует, что

$$\int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \leq C_2 \|x_i\|_{C(p)} b_i^{1/q}, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $C_2 > 0$ зависит только от p . Тем самым ввиду неравенства Гёльдера и соотношения (2.3)

$$\begin{aligned} \|T_1\|_p^p &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=n-j+2}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \right)^p \int_{a_{n-j+1}}^{b_{n-j+1}} \frac{dt}{t^p} \\ &\leq C_2^p \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(p)} b_i^{1/q} \right)^p \frac{b_{n-j+1}^{p-1} - a_{n-j+1}^{p-1}}{(p-1)a_{n-j+1}^{p-1} b_{n-j+1}^{p-1}} \\ &\leq C_3^p \sum_{j=2}^n \sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p \left(\sum_{i=n-j+2}^n b_i \right)^{p-1} a_{n-j+1}^{1-p} \\ &\leq C_3^p \sum_{j=2}^n \sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p 2^{-n+j-1} = C_3^p \sum_{i=2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p \sum_{j=n-i+2}^n 2^{-n+j-1} \\ &\leq C_3^p \sum_{i=2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p, \end{aligned}$$

где $C_3 > 0$ зависит только от p .

Аналогичным образом оцениваем

$$\begin{aligned}
 \|T_2\|_p^p &\leq C_2^p \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(p)} b_i^{1/q} \right)^p \frac{a_{n-j}^{p-1} - b_{n-j+1}^{p-1}}{(p-1)a_{n-j}^{p-1}b_{n-j+1}^{p-1}} \\
 &\leq C_4^p \sum_{j=2}^n \sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p \left(\sum_{i=n-j+2}^n b_i \right)^{p-1} b_{n-j+1}^{1-p} \\
 &\leq C_4^p \sum_{j=2}^n \sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p 2^{-n+j-1} \\
 &= C_4^p \sum_{i=2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p \sum_{j=n-i+2}^n 2^{-n+j-1} \leq C_4^p \sum_{i=2}^n \|x_i\|_{C(p)}^p, \\
 \|T_3\|_p^p &\leq C_4^p \sum_{j=1}^n \|x_{n-j+1}\|_{C(p)}^p b_{n-j+1}^{p-1} b_{n-j+1}^{1-p} = C_4^p \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{C(p)}^p,
 \end{aligned}$$

где $C_4 > 0$ зависит только от p . И наконец, по определению нормы в пространстве Чезаро

$$\begin{aligned}
 \|T_4\|_p^p &\leq \sum_{j=1}^n \int_{a_{n-j+1}}^{b_{n-j+1}} \left(\frac{1}{t} \int_{a_{n-j+1}}^t x_{n-j+1}(s) ds \right)^p dt \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t x_{n-j+1}(s) ds \right)^p dt = \sum_{j=1}^n \|x_{n-j+1}\|_{C(p)}^p = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{C(p)}^p.
 \end{aligned}$$

В итоге из полученных соотношений следует

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_{C(p)} \leq \sum_{k=1}^4 \|T_k\|_p \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{C(p)}^p \right)^{1/p},$$

где $C > 0$ зависит только от p . Так как пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$ максимально, то аналогичное неравенство справедливо и для бесконечных сумм. Тем самым неравенство (2.1) доказано.

Если $p = \infty$, то доказательство проводится примерно так же, необходимы лишь небольшие модификации. В частности, условие (2.3) заменим следующим:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Так как в этом случае $\|\chi_{[a,b]}\|_{C(\infty)'} \asymp \|\chi_{[a,b]}\|_{\tilde{L}_1}$ (см. § 1), то для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \leq C' \|x_i\|_{C(\infty)} \cdot \|\chi_{[a_i, b_i]}\|_{\tilde{L}_1} = C' \|x_i\|_{C(\infty)} b_i,$$

где $C' > 0$ зависит только от p . Следовательно, применяя (2.4), получим

$$\|T_1\|_{\infty} = \max_{j=2, \dots, n} \left(\sum_{i=n-j+2}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \frac{1}{a_{n-j+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C' \max_{j=2,\dots,n} \left(\sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(\infty)} \frac{b_i}{a_{n-j+1}} \right) \\
&\leq C' \max_{j=2,\dots,n} \|x_j\|_{C(\infty)} \sum_{i=n-j+2}^n \frac{b_i}{a_{n-j+1}} \leq C' \max_{j=2,\dots,n} \|x_j\|_{C(\infty)}, \\
\|T_2\|_\infty &= \max_{j=2,\dots,n} \left(\sum_{i=n-j+2}^n \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \frac{1}{b_{n-j+1}} \right) \\
&\leq C' \max_{j=2,\dots,n} \left(\sum_{i=n-j+2}^n \|x_i\|_{C(\infty)} \frac{b_i}{b_{n-j+1}} \right) \leq C' \max_{j=2,\dots,n} \|x_j\|_{C(\infty)}, \\
\|T_3\|_\infty &= \max_{j=1,2,\dots,n} \int_{a_{n-j+1}}^{b_{n-j+1}} x_{n-j+1}(s) ds \frac{1}{b_{n-j+1}} \leq C' \max_{j=1,2,\dots,n} \|x_j\|_{C(\infty)}
\end{aligned}$$

и, наконец, по определению нормы в пространстве $\text{Ces}_\infty[0, 1]$

$$\begin{aligned}
\|T_4\|_\infty &= \max_{j=1,2,\dots,n} \sup_{a_{n-j+1} \leq t \leq b_{n-j+1}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t x_{n-j+1}(s) ds \right) \\
&\leq \max_{j=1,2,\dots,n} \sup_{0 < t \leq 1} \left(\frac{1}{t} \int_0^t x_{n-j+1}(s) ds \right) = \max_{j=1,2,\dots,n} \|x_j\|_{C(\infty)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_{C(\infty)} \leq \sum_{k=1}^4 \|T_k\|_\infty \leq 4C' \max_{j=1,2,\dots,n} \|x_j\|_{C(\infty)}.$$

Так как $\text{Ces}_\infty[0, 1]$ максимально, то соотношение (2.2) доказано.

В заключение докажем дополняемость построенного подпространства $[x_n]$ в $\text{Ces}_p[0, 1]$. Пусть $\bar{x}_n = x_n / \|x_n\|_{C(p)}$, а g_n — такие функции из $\text{Ces}_p[0, 1]'$, что

$$\|g_n\|_{C(p)'} \asymp 1, \quad \text{supp } g_n \subset [a_n, b_n], \quad \int_0^1 g_n(t) \bar{x}_n(t) dt = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Достаточно показать, что проектор

$$Qf(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 g_n(t) f(t) dt \cdot \bar{x}_n(s)$$

ограниченно действует в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$.

Если $f \in \text{Ces}_p[0, 1]$ произвольна и $f_n := f \cdot \chi_{[a_n, b_n]}$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$Qf = \sum_{n=1}^{\infty} Qf_n, \quad \text{где } Qf_n(s) := \int_0^1 g_n(t) f_n(t) dt \cdot \bar{x}_n(s).$$

Кроме того, так как $\|g_n\|_{C(p)'} \leq C''$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$\|Qf_n\|_{C(p)} \leq \|g_n\|_{C(p)'} \|f_n\|_{C(p)} \leq C'' \|f_n\|_{C(p)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому, если $1 < p < \infty$, то ввиду уже доказанного соотношения (2.1) и p -вогнутости $\text{Ces}_p[0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} \|Qf\|_{C(p)} &\leq C_5 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Qf_n\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} \leq C_6 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} \leq C_6 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_{C(p)} \\ &\leq C_6 \|f\|_{C(p)}. \end{aligned}$$

Так как при $p = \infty$ рассуждения совершенно аналогичны, то предложение доказано.

Если p конечно, то подобный результат справедлив также для последовательностей дизъюнктивных функций, носители которых “стремятся” к единице.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $1 < p < \infty$. Предположим, что последовательность $\{x_n\} \subset \text{Ces}_p[0, 1]$ такова, что $\text{supp } x_n \subset I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ и $a_n \rightarrow 1^-$.

Тогда существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от p , имеет место соотношение (2.1), а также, что соответствующее подпространство $[x_{n_k}]$ дополняемо в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова ввиду p -вогнутости $\text{Ces}_p[0, 1]$ (см. § 1) достаточно доказать лишь правое неравенство в (2.1). При этом можно считать, что $x_n \geq 0$, $x_n \neq 0$ и $a_1 \geq 1/2$.

Выберем подпоследовательность отрезков (будем их также обозначать через $I_m = [a_m, b_m]$) так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\left(\sum_{i=1}^{m-1} (1 - b_i)^{-1/(p-1)} \right)^{p-1} \cdot (1 - a_m^{p-1}) \leq 2^{-m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Покажем, что соответствующая подпоследовательность функций, которую по-прежнему обозначаем через $\{x_m\}$, $\text{supp } x_m \subset I_m$, удовлетворяет требуемым свойствам.

Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $t \in (0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \sum_{k=1}^n x_k(s) \right| ds &= \frac{1}{t} \sum_{m=1}^n \left(\sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds + \int_{a_m}^t x_m(s) ds \right) \chi_{[a_m, b_m]}(t) \\ &\quad + \frac{1}{t} \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[b_m, a_{m+1}]}(t) \\ &= S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + S_4(t), \end{aligned}$$

где $a_{n+1} = 1$ и

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{1}{t} \sum_{m=2}^n \sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[a_m, b_m]}(t), \\ S_2(t) &= \frac{1}{t} \sum_{m=2}^n \sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \chi_{[b_m, a_{m+1}]}(t), \end{aligned}$$

$$S_3(t) = \frac{1}{t} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} x_m(s) ds \chi_{[b_m, a_{m+1}]}(t),$$

$$S_4(t) = \frac{1}{t} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^t x_m(s) ds \chi_{[a_m, b_m]}(t).$$

Используя еще раз описание пространства, сопряженного к $\text{Ces}_p[0, 1]$ (см. (1.3)), оценим

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds &\leq C_1 \|x_i\|_{C(p)} \cdot \|\chi_{[a_i, b_i]}\|_{U(q)} = C_1 \|x_i\|_{C(p)} \cdot \left(\int_0^{b_i} \frac{dt}{(1-t)^q} \right)^{1/q} \\ &= C_1 \|x_i\|_{C(p)} \cdot (p-1)^{1/q} \left[\frac{1}{(1-b_i)^{q-1}} - 1 \right]^{1/q} \leq \frac{C_2 \|x_i\|_{C(p)}}{(1-b_i)^{1/p}}, \end{aligned}$$

где $C_2 > 0$ зависит лишь от p . Поэтому ввиду (2.5)

$$\begin{aligned} \|S_1\|_p^p &= \sum_{m=2}^n \left(\sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{b_i} x_i(s) ds \right)^p \int_{a_m}^{b_m} \frac{dt}{t^p} \\ &\leq C_2^p \sum_{m=2}^n \left(\sum_{i=1}^{m-1} (1-b_i)^{-1/p} \|x_i\|_{C(p)} \right)^p \frac{b_m^{p-1} - a_m^{p-1}}{(p-1)a_m^{p-1}b_m^{p-1}} \\ &\leq C_3 \sum_{m=2}^n \left(\sum_{i=1}^{m-1} (1-b_i)^{-1/(p-1)} \right)^{p-1} \sum_{i=1}^{m-1} \|x_i\|_{C(p)}^p (1-a_m^{p-1}) \\ &\leq C_3 \sum_{m=2}^n 2^{-m} \sum_{i=1}^{m-1} \|x_i\|_{C(p)}^p = C_3 \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|_{C(p)}^p \sum_{m=i+1}^n 2^{-m} \leq C_3 \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|_{C(p)}^p, \end{aligned}$$

где $C_3 > 0$ также зависит только от p . Аналогично

$$\begin{aligned} \|S_2\|_p^p &\leq C_2^p \sum_{m=2}^n \left(\sum_{i=1}^{m-1} (1-b_i)^{-1/p} \|x_i\|_{C(p)} \right)^p \frac{a_{m+1}^{p-1} - b_m^{p-1}}{(p-1)a_{m+1}^{p-1}b_m^{p-1}} \\ &\leq C_3 \sum_{m=2}^n \left(\sum_{i=1}^{m-1} (1-b_i)^{-1/(p-1)} \right)^{p-1} \sum_{i=1}^{m-1} \|x_i\|_{C(p)}^p (1-b_m^{p-1}) \\ &\leq C_3 \sum_{m=2}^n 2^{-m} \sum_{i=1}^{m-1} \|x_i\|_{C(p)}^p = C_3 \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|_{C(p)}^p \sum_{m=i+1}^n 2^{-m} \leq C_3 \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|_{C(p)}^p. \end{aligned}$$

Кроме того, по определению нормы в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$

$$\begin{aligned} \|S_3\|_p^p &= \sum_{m=1}^n \int_{b_m}^{a_{m+1}} \frac{1}{t^p} dt \left(\int_{a_m}^{b_m} x_m(s) ds \right)^p \\ &\leq \sum_{m=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t x_m(s) ds \right)^p dt = \sum_{m=1}^n \|x_m\|_{C(p)}^p, \\ \|S_4\|_p^p &= \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \left(\frac{1}{t} \int_{a_m}^t x_m(s) ds \right)^p dt \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{m=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \int_0^t x_m(s) ds \right)^p dt = \sum_{m=1}^n \|x_m\|_{C(p)}^p.$$

В итоге

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|_{C(p)} \leq \sum_{k=1}^4 \|S_k\|_p \leq C \left(\sum_{m=1}^n \|x_m\|_{C(p)}^p \right)^{1/p},$$

где $C > 0$ зависит лишь от p . Как и ранее, отсюда следует (2.1). Дополняемость $[x_n]$ доказывается точно так же, как в предыдущем предложении.

Несложный анализ доказательства предложений 1 и 2 показывает, что справедлив также следующий их “двусторонний” вариант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$ и последовательность $\{x_n\} \subset \text{Ces}_p[0, 1]$ удовлетворяет условию $\text{supp } x_n \subset I'_n \cup I''_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $I'_n = [a'_n, b'_n]$ и $I''_n = [a''_n, b''_n]$ – такие отрезки из $[0, 1]$, что $I'_1 > I'_2 > \dots$, $b'_n \rightarrow 0^+$, $I''_1 < I''_2 < \dots$ и $a''_n \rightarrow 1^-$.

Тогда существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от p , имеют место неравенства (2.1). Кроме того, подпространство $[x_{n_k}]$ дополняемо в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как отмечалось в § 1, $\text{Ces}_1[0, 1] = L_1(\ln(1/t))$ изометрически (см. также [7; теорема 1]). Поэтому для произвольной последовательности дизъюнктных функций $\{x_n\} \subset \text{Ces}_1[0, 1]$ выполнено

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|_{C(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{C(1)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения предложений 2 и 3 становятся неверными в случае $p = \infty$. Действительно, если $h \in (0, 1)$, а f – такая измеримая функция на $[0, 1]$, что $\text{supp } f \subset [h, 1]$, то

$$\|f\|_{L_1[h, 1]} \leq \|f\|_{C(\infty)} = \sup_{h \leq t \leq 1} \frac{1}{t} \int_h^t |f(s)| ds \leq \frac{1}{h} \|f\|_{L_1[h, 1]}.$$

Поэтому для произвольного $h \in (0, 1)$ имеет место равенство $\text{Ces}_{\infty}[0, 1]|_{[h, 1]} = L_1[h, 1]$ с эквивалентностью норм. Таким образом, если последовательность $\{x_n\} \subset \text{Ces}_{\infty}[0, 1]$ состоит из дизъюнктных функций, носители которых содержатся в отрезке $[h, 1]$ при некотором $h \in (0, 1)$, то

$$h \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{C(\infty)} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|_{C(\infty)} \leq \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{C(\infty)}.$$

§ 3. Основные результаты

Результаты, полученные в § 2, позволяют охарактеризовать множество тех q , для которых пространство Чезаро содержит дополняемые копии l^q -пространства. Начнем мы однако с решения аналогичной задачи для l^q -копий, порожденных последовательностями дизъюнктных функций.

Хорошо известно (см., например, [5; предложение 6.4.1]), что любая последовательность дизъюнктивных функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L_p[0, 1]$, $\|f_n\|_{L_p} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, эквивалентна каноническому базису пространства l^p . Следующая теорема показывает, что близкое свойство имеет и пространство Чезаро.

ТЕОРЕМА 1. *Если базисная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, состоящая из дизъюнктивных функций, эквивалентна каждой своей подпоследовательности, то она эквивалентна каноническому базису одного из двух пространств: l^1 или l^p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, ввиду замечания 1 утверждение очевидно в случае $p = 1$. Пусть теперь $1 < p < \infty$. Мы можем (и будем) предполагать, что $\|f_n\|_{C(p)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим два случая.

(а) Пусть существуют такие числа $h_0 \in (0, 1/2)$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для всех достаточно больших n выполнено $\|f_n \chi_{[h_0, 1-h_0]}\|_{C(p)} \geq \varepsilon_0$. Тогда, если $g_n := f_n \chi_{[h_0, 1-h_0]}$, то $\text{supp } g_n \subset [h_0, 1-h_0]$. Так как $\text{Ces}_p[0, 1]_{[h_0, 1-h_0]} = L_1[h_0, 1-h_0]$ с эквивалентностью норм [8], то $\|g_n\|_{L_1} \asymp \|g_n\|_{C(p)} \asymp 1$, $n = 1, 2, \dots$, и ввиду дизъюнктивности g_n

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \right\|_{C(p)} \asymp \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \right\|_{L_1} \asymp \|(a_n)\|_{l^1}.$$

В то же время, конечно,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \right\|_{C(p)} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_{C(p)},$$

и значит, из предыдущего соотношения и того, что $\|f_n\|_{C(p)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, следует

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_{C(p)} \asymp \|(a_n)\|_{l^1}.$$

(б) Предположим теперь, что условие из предыдущей части доказательства не выполнено. Тогда для произвольных $h \in (0, 1/2)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что $\|f_n \chi_{[h, 1-h]}\|_{C(p)} \leq \varepsilon$. Следовательно, существуют подпоследовательность $\{f_{n_j}\} \subset \{f_n\}$ и две последовательности отрезков $I'_n = [a'_n, b'_n]$ и $I''_n = [a''_n, b''_n]$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $I'_1 > I'_2 > \dots$, $b'_n \rightarrow 0^+$, $I''_1 < I''_2 < \dots$, $a''_n \rightarrow 1^-$ и

$$2K \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_j} \chi_{I'_j \cup I''_j} - f_{n_j}\|_{C(p)} < 1, \quad (3.1)$$

где K – константа базисности последовательности $\{f_n\}$. Обозначим $h_j := f_{n_j} \chi_{I'_j \cup I''_j}$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда $\text{supp } h_j \subset I'_j \cup I''_j$ и $\|h_j\|_{C(p)} \asymp 1$, $j = 1, 2, \dots$. Применяя предложение 3, найдем такую подпоследовательность $\{h_{j_k}\} \subset \{h_j\}$, что для произвольных $a_k \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_{j_k} \right\|_{C(p)} \asymp \|(a_k)\|_{l^p}.$$

С другой стороны, ввиду соотношения (3.1), устойчивости базиса [5; теорема 1.3.9], а также условия теоремы получаем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_{C(p)} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_{j_k}} \right\|_{C(p)} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_{j_k} \right\|_{C(p)}.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису пространства l^p . Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$. Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \text{Ces}_p[0, 1]$ – такая последовательность дизъюнктивных функций, что $[f_n] \simeq l^q$. Тогда $q = 1$ или $q = p$.

В [13] изучается подпространство $[r_n]$ пространства Чезаро, порожденное системой функций Радемахера $r_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$, $n \in \mathbb{N}$. Наряду с другими результатами там доказано, что $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентна в $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, каноническому базису в l^2 и $[r_n]$ не дополняемо в этом пространстве. Следующая теорема, характеризующая дополняемые копии l^q -пространств, в частности, показывает, что $\text{Ces}_p[0, 1]$ содержит дополняемое подпространство $X \simeq l^2$ тогда и только тогда, когда $p = 2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$. Пространство Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^q , тогда и только тогда, когда $q = 1$ или $q = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, как уже говорилось в § 1, $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, содержит дополняемые подпространства, изоморфные l^1 [8; теорема 1] и l^p (см. предложение 1, а также [7; теорема 6]). Докажем обратное.

Так как пространство $\text{Ces}_1[0, 1] = L_1(\ln(1/t))$ не содержит дополняемых подпространств, изоморфных рефлексивным пространствам [5; предложение 5.6.1], то в случае $p = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть поэтому $1 < p < \infty$.

Предположим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \text{Ces}_p[0, 1]$, $\|f_n\|_{\text{Ces}_p} = 1$, эквивалентна каноническому базису в l^q и подпространство $[f_n]$ дополняемо в $\text{Ces}_p[0, 1]$. Кроме того, пусть $q \neq 1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $q = p$.

По условию существует ограниченный проектор $P: \text{Ces}_p[0, 1] \rightarrow [f_n]$, который, как легко видеть, может быть представлен в виде

$$Px(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) f_k(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

где $\varphi_k \in (\text{Ces}_p[0, 1])^*$, $\varphi_k(f_k) = 1$, $k = 1, 2, \dots$, и $\varphi_k(f_n) = 0$, если $k \neq n$. Так как $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, сепарабельно, то $(\text{Ces}_p[0, 1])^* = (\text{Ces}_p[0, 1])'$. Поэтому

$$\varphi_k(x) = \int_0^1 g_k(t) x(t) dt, \quad x = x(t) \in \text{Ces}_p[0, 1],$$

для некоторых $g_k \in (\text{Ces}_p[0, 1])'$, $k = 1, 2, \dots$, и тем самым

$$Px(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g_k(t) x(t) dt \cdot f_k(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (3.2)$$

где

$$\int_0^1 g_k(t) f_k(t) dt = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \int_0^1 g_k(t) f_n(t) dt = 0, \quad k \neq n.$$

Кроме того, так как $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ эквивалентна каноническому базису в l^q , то

$$\|Px\|_{C(p)}^q \asymp \sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^1 g_k(t) x(t) dt \right)^q, \quad x = x(t) \in \text{Ces}_p[0, 1]. \quad (3.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что $g_k \rightarrow 0$ слабо* в $(\text{Ces}_p[0, 1])^*$ и что для некоторого $M > 0$

$$\|g_k\|_{C(p)'} \leq M, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Заметим, что для каждого $1 \leq p < \infty$ $\text{Ces}_p[0, 1] \subset \text{Ces}_1[0, 1] = L_1(\ln(1/t))$. Так как по предположению $q \neq 1$, то $\{f_n\}$ не содержит последовательностей, эквивалентных каноническому базису в l^1 . Следовательно, ввиду критерия Данфорда–Петтиса (см., например, [5; теорема 5.2.9]) $\{f_n\}$ – относительно слабо компактное множество в $L_1(\ln(1/t))$. Переходя к подпоследовательности, получим $f_n \rightarrow f$ слабо в $L_1(\ln(1/t))$. Напомним (см. § 1), что $(\text{Ces}_p[0, 1])^* = (\text{Ces}_p[0, 1])' = U(q)$, где $1/q + 1/p = 1$, с нормой, определенной соотношением (1.3). Нетрудно видеть, что пространство $L_\infty(\ln^{-1}(1/t)) = (L_1(\ln(1/t)))^*$ всюду плотно в $U(q)$. Отсюда и из равенств $\|f_n\|_{C(p)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, следует, что $f_n \rightarrow f$ слабо в $\text{Ces}_p[0, 1]$. В частности, тогда для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 g_k(t) f_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 g_k(t) f(t) dt \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\int_0^1 g_k(t) f(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $f \in [f_n]$, то $f = 0$, и значит, $f_n \rightarrow 0$ слабо в $\text{Ces}_p[0, 1]$.

Предположим, что существуют подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ и $h \in (0, 1/2)$, для которых выполнено

$$\left| \int_h^{1-h} g_{n_k}(t) f_{n_k}(t) dt \right| \geq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Определим оператор $P_h x := P(x\chi_{[h, 1-h]})$. Так как $\text{Ces}_p[0, 1]|_{[h, 1-h]} = L_1[h, 1-h]$ (см. [8; лемма 1]) и P ограничен в $\text{Ces}_p[0, 1]$, то P_h ограничен как оператор из $L_1[h, 1-h]$ в $\text{Ces}_p[0, 1]$. Кроме того, так как $f_n\chi_{[h, 1-h]} \rightarrow 0$ слабо в $\text{Ces}_p[0, 1]$, то $f_n\chi_{[h, 1-h]} \rightarrow 0$ слабо и в $L_1[h, 1-h]$.

Как известно [5; теорема 5.4.5], пространство $L_1[h, 1-h]$ обладает свойством Данфорда–Петтиса. Поэтому оператор P_h переводит последовательности, слабо сходящиеся к нулю, в сходящиеся к нулю по норме. Следовательно,

$$\|P_h f_{n_k}\|_{C(p)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, ввиду соотношений (3.3) и (3.5) для всех $k = 1, 2, \dots$

$$\|P_h f_{n_k}\|_{C(p)} \asymp \left(\sum_{i=1}^\infty \left| \int_h^{1-h} g_i(t) f_{n_k}(t) dt \right|^q \right)^{1/q} \geq \left| \int_h^{1-h} g_{n_k}(t) f_{n_k}(t) dt \right| \geq \frac{1}{2},$$

что противоречит предыдущему соотношению.

Таким образом, (3.5) не выполнено, а тогда для любого $h \in (0, 1/2)$ и всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем хотя бы одно из двух соотношений:

$$\left| \int_0^h g_n(t) f_n(t) dt \right| > \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \left| \int_{1-h}^1 g_n(t) f_n(t) dt \right| > \frac{1}{4}.$$

Поэтому можно выделить подпоследовательность (по-прежнему будем обозначать ее через $\{f_n\}$), которая удовлетворяет одному из двух условий:

$$\left| \int_0^h g_n(t) f_n(t) dt \right| > \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

или

$$\left| \int_{1-h}^1 g_n(t) f_n(t) dt \right| > \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Пусть, например, выполнено (3.6). Тогда, положив $h_0 = 1/2$, найдем $n_1 \in \mathbb{N}$ и $h_1 \in (0, h_0)$ такие, что

$$\left| \int_{h_1}^{h_0} g_{n_1}(t) f_{n_1}(t) dt \right| > \frac{1}{4}.$$

Обозначим $u_{n_1} := g_{n_1} \chi_{(h_1, h_0)}$ и $f'_{n_1} := f_{n_1} \chi_{(h_1, h_0)}$. Как уже ранее отмечалось, $f_n \rightarrow 0$ слабо в $(\text{Ces}_p[0, 1])^*$, а $g_n \rightarrow 0$ слабо* в $(\text{Ces}_p[0, 1])^*$. Поэтому, а также ввиду (3.6) существует $n_2 > n_1$, для которого

$$\begin{aligned} \max \left(\left| \int_0^{h_1} g_{n_1}(t) f_{n_2}(t) dt \right|, \left| \int_0^1 u_{n_1}(t) f_{n_2}(t) dt \right| \right) &\leq \frac{1}{2^3}, \\ \max \left(\left| \int_0^{h_1} g_{n_2}(t) f_{n_1}(t) dt \right|, \left| \int_0^1 g_{n_2}(t) f'_{n_1}(t) dt \right| \right) &\leq \frac{1}{2^3}, \\ \left| \int_0^{h_1} g_{n_2}(t) f_{n_2}(t) dt \right| &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Но тогда найдется такое $h_2 \in (0, h_1)$, что для функций $f'_{n_2} := f_{n_2} \chi_{(h_2, h_1)}$ и $u_{n_2} := g_{n_2} \chi_{(h_2, h_1)}$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u_{n_j}(t) f_{n_i}(t) dt \right| &\leq \frac{1}{2^3}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2, \\ \left| \int_0^1 g_{n_j}(t) f'_{n_i}(t) dt \right| &\leq \frac{1}{2^3}, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2, \\ \left| \int_0^1 u_{n_2}(t) f'_{n_2}(t) dt \right| &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ номера $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ и числа $1/2 = h_0 > h_1 > \dots > h_k > 0$ выбраны так, что функции f_{n_i} , g_{n_i} ,

$f'_{n_i} := f_{n_i} \chi_{(h_i, h_{i-1})}$ и $u_{n_i} = g_{n_i} \chi_{(h_i, h_{i-1})}$, $i = 1, 2, \dots, k$, удовлетворяют условиям

$$\left| \int_0^1 u_{n_j}(t) f_{n_i}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^{i+j}}, \quad 1 \leq i \neq j \leq k, \quad (3.8)$$

$$\left| \int_0^1 g_{n_j}(t) f'_{n_i}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^{i+j}}, \quad 1 \leq i \neq j \leq k, \quad (3.9)$$

$$\left| \int_0^1 u_{n_i}(t) f'_{n_i}(t) dt \right| > \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.10)$$

Опять используя то, что $f_n \rightarrow 0$ слабо в $\text{Ces}_p[0, 1]$, $g_n \rightarrow 0$ слабо* в $(\text{Ces}_p[0, 1])^*$, а также соотношение (3.6), найдем номер $n_{k+1} > n_k$, для которого

$$\begin{aligned} \max \left(\left| \int_0^{h_k} g_{n_i}(t) f_{n_{k+1}}(t) dt \right|, \left| \int_0^1 u_{n_i}(t) f_{n_{k+1}}(t) dt \right| \right) &\leq \frac{1}{2^{i+k+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \max \left(\left| \int_0^{h_k} g_{n_{k+1}}(t) f_{n_i}(t) dt \right|, \left| \int_0^1 g_{n_{k+1}}(t) f'_{n_i}(t) dt \right| \right) &\leq \frac{1}{2^{i+k+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \left| \int_0^{h_k} g_{n_{k+1}}(t) f_{n_{k+1}}(t) dt \right| &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ясно, что существует такое $h_{k+1} \in (0, h_k)$, что для $f'_{n_{k+1}} := f_{n_{k+1}} \chi_{(h_{k+1}, h_k)}$ и $u_{n_{k+1}} := g_{n_{k+1}} \chi_{(h_{k+1}, h_k)}$ соотношения (3.8) и (3.9) выполнены уже для всех $1 \leq i \neq j \leq k+1$, а (3.10) – для всех $i = 1, 2, \dots, k+1$.

Приведенные рассуждения позволяют выделить такие последовательности номеров $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ и чисел $1/2 = h_0 > h_1 > \dots > h_i > \dots > 0$, что функции f_{n_i} , g_{n_i} , $f'_{n_i} := f_{n_i} \chi_{(h_i, h_{i-1})}$ и $u_{n_i} = g_{n_i} \chi_{(h_i, h_{i-1})}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\left| \int_0^1 u_{n_j}(t) f_{n_i}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^{i+j}}, \quad 1 \leq i \neq j < \infty, \quad (3.11)$$

$$\left| \int_0^1 g_{n_j}(t) f'_{n_i}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2^{i+j}}, \quad 1 \leq i \neq j < \infty, \quad (3.12)$$

$$\left| \int_0^1 u_{n_i}(t) f'_{n_i}(t) dt \right| > \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (3.13)$$

Ввиду предложения 1 можно считать, что последовательность $\{f'_{n_i}\}$ эквивалентна каноническому базису в l^p и подпространство $[f'_{n_i}]$ дополняемо в $\text{Ces}_p[0, 1]$. Кроме того, так как $\|f'_{n_i}\|_{C(p)} \leq \|f_{n_i}\|_{C(p)} = 1$, то из соотношений (3.4) и (3.13) следует, что

$$\frac{1}{4} \leq \|u_{n_i}\|_{C(p)'} \leq \|g_{n_i}\|_{C(p)'} \leq M.$$

Поэтому (см. доказательство предложения 1) проектор

$$Qf(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \bar{u}_{n_i}(s) f(s) ds \cdot f'_{n_i}(t), \quad \bar{u}_{n_i} := \left(\int_0^1 u_{n_i}(t) f'_{n_i}(t) dt \right)^{-1} u_{n_i},$$

ограничен в $\text{Ces}_p[0, 1]$. Отсюда и из условия следует, что

$$\left\| Q \left(\sum_{i=1}^m f_{n_i} \right) \right\|_{C(p)} \leq \|Q\| \left\| \sum_{i=1}^m f_{n_i} \right\|_{C(p)} \leq C \|Q\| m^{1/q}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

С другой стороны, опять с учетом (3.13), а также неравенства $\|f'_{n_i}\|_{C(p)} \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \left\| Q \left(\sum_{i=1}^m f_{n_i} \right) \right\|_{C(p)} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \int_0^1 \bar{u}_{n_j}(s) f_{n_i}(s) ds \cdot f'_{n_j} \right\|_{C(p)} \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^m \int_0^1 \bar{u}_{n_i}(s) f_{n_i}(s) ds \cdot f'_{n_i} \right\|_{C(p)} - 4 \sum_{i,j=1, i \neq j}^{\infty} \left| \int_0^1 u_{n_j}(s) f_{n_i}(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду (3.4) и (3.13) выполнено $\|f'_{n_i}\|_{C(p)} \geq (4M)^{-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Поэтому, используя предыдущее неравенство, (3.11), (3.13) и p -вогнутость пространства $\text{Ces}_p[0, 1]$, получаем

$$\left\| Q \left(\sum_{i=1}^m f_{n_i} \right) \right\|_{C(p)} \geq \left(\sum_{i=1}^m \left| \int_0^1 \bar{u}_{n_i}(s) f_{n_i}(s) ds \right|^p \cdot \|f'_{n_i}\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} - 4 \geq \frac{m^{1/p}}{4M} - 4.$$

Отсюда и из (3.14) следует $q \leq p$.

Ясно, что последовательность $\{f_{n_i}\}$ обладает теми же свойствами, что и $\{f_n\}$, т.е. она эквивалентна каноническому базису в l^q и подпространство $[f_{n_i}]$ дополняемо в $\text{Ces}_p[0, 1]$. Кроме того, легко проверить, что проектор P_1 , определенный аналогично проектору P (см. (3.2)), только с заменой f_k на f_{n_i} , а g_k на g_{n_i} , ограничен в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$. Следовательно, так как $\{f'_{n_i}\}$ эквивалентна каноническому базису в l^p , то для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\left\| P_1 \left(\sum_{i=1}^m f'_{n_i} \right) \right\|_{C(p)} \leq \|P_1\| \left\| \sum_{i=1}^m f'_{n_i} \right\|_{C(p)} \leq C \|P_1\| \left(\sum_{i=1}^m \|f'_{n_i}\|_{C(p)}^p \right)^{1/p} \leq C \|P_1\| m^{1/p}. \quad (3.15)$$

В то же время, ввиду (3.12) и (3.13)

$$\begin{aligned} \left\| P_1 \left(\sum_{i=1}^m f'_{n_i} \right) \right\|_{C(p)} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m \int_0^1 g_{n_j}(s) f'_{n_i}(s) ds \cdot f_{n_j} \right\|_{C(p)} \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^m \int_0^1 g_{n_i}(s) f'_{n_i}(s) ds \cdot f_{n_i} \right\|_{C(p)} - \sum_{i,j=1, i \neq j}^{\infty} \left| \int_0^1 g_{n_j}(s) f'_{n_i}(s) ds \right| \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^m \int_0^1 u_{n_i}(s) f'_{n_i}(s) ds \cdot f_{n_i} \right\|_{C(p)} - 1 \\ &\geq c \left(\sum_{i=1}^m \left| \int_0^1 u_{n_i}(s) f'_{n_i}(s) ds \right|^q \right)^{1/q} - 1 \geq \frac{cm^{1/q}}{4} - 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.15) следует, что $p \leq q$, и при условии выполнения (3.6) теорема доказана. В том случае, когда имеет место (3.7), рассуждения совершенно аналогичны, только вместо предложения 1 надо применить предложение 2.

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2 и следствия 1, показывает существенное различие в геометрических свойствах L_p -пространств и пространств Чезаро (ср. с теоремой А).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$. Пространство Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$ содержит дополняемое подпространство $X \simeq l^q$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность дизъюнктивных функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \text{Ces}_p[0, 1]$, что $[f_n] \simeq l^q$.

Как показано в [7; теорема 7] пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 < p \leq \infty$, не изоморфно $L_q[0, 1]$ ни для какого $1 \leq q \leq \infty$. Ввиду теоремы 2, а также того, что $L_q[0, 1]$, $1 < q < \infty$, содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^2 (см., например, теорему А), получаем усиление этого результата.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда пространство Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$ не содержит дополняемых копий пространства $L_q[0, 1]$ ни для какого $q \in (1, \infty]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как следует из предложения 1 (см. также [7; теорема 6]) пространство $\text{Ces}_2[0, 1]$ содержит дополняемую копию l^2 , а значит, и $L_2[0, 1]$. Кроме того, как уже не раз отмечалось, для любого $1 \leq p \leq \infty$ пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$ содержит дополняемую копию $L_1[0, 1]$. Тем самым результат последнего следствия не верен ни при $p = 2$, ни при $q = 1$.

Покажем, что пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, в определенном смысле “насыщено” дополняемыми копиями l^p -пространства. Обозначим через $\mathcal{L}$ линейное пространство всех таких измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, что

$$\int_0^u |x(t)| dt < \infty \quad \text{для любого } 0 < u < 1.$$

Определим на $\mathcal{L}$ счетную систему полунорм

$$p_n(x) := \int_0^{1-1/n} |x(t)| dt, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (3.16)$$

которая превращает $\mathcal{L}$ в F -пространство (т.е. полное метризуемое линейное топологическое пространство). Обозначим топологию, заданную на $\mathcal{L}$ системой полунорм (3.16), через τ . Ясно, что для каждого $1 \leq p \leq \infty$ имеет место непрерывное вложение $\text{Ces}_p[0, 1] \subset \mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – произвольное подпространство пространства $\text{Ces}_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, не замкнутое в топологии τ . Тогда X содержит подпространство $Y \simeq l_p$, дополняемое в $\text{Ces}_p[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию X не замкнуто в топологии τ , найдется последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $\|x_n\|_{C(p)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, и для каждого $h \in (0, 1/2)$

$$\int_h^{1-h} |x_n(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Следовательно, ввиду равенства $\text{Ces}_p[0, 1]|_{[h, 1-h]} = L_1[h, 1-h]$ (с эквивалентностью норм) для каждого $h \in (0, 1/2)$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n \chi_{[h, 1-h]}\|_{C(p)} = 0$ (см. [8]). Но тогда, как легко видеть, существуют подпоследовательность $\{x'_n\} \subset \{x_n\}$ и последовательности отрезков $I'_n = [a'_n, b'_n]$ и $I''_n = [a''_n, b''_n]$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $I'_1 > I'_2 > \dots$, $b'_n \rightarrow 0^+$, $I''_1 < I''_2 < \dots$, $a''_n \rightarrow 1^-$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n \chi_{I'_n \cup I''_n} - x'_n\|_{C(p)} < 1. \quad (3.18)$$

Обозначим $z_n := x'_n \chi_{I'_n \cup I''_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Применяя предложение 3, найдем подпоследовательность $\{z_{n_i}\} \subset \{z_n\}$, эквивалентную каноническому базису l^p и такую, что подпространство $[z_{n_i}]$ дополняемо в $\text{Ces}_p[0, 1]$. При этом, переходя, если нужно, к подпоследовательности, ввиду (3.18) можно считать, что

$$2K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|z_{n_i} - x'_{n_i}\|_{C(p)}}{\|z_{n_i}\|_{C(p)}} < 1,$$

где K – константа базисности последовательности $\{z_{n_i}\}$. В очередной раз применяя [5; теорема 1.3.9], заключаем, что подпространство $Y := [x'_{n_i}] \simeq l^p$ и дополняемо в $\text{Ces}_p[0, 1]$ вместе с $[z_{n_i}]$. Так как $\{x'_{n_i}\} \subset X$, то теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие не замкнутости подпространства X в топологии τ , конечно, существенно. Действительно, в случае $1 < p < \infty$ достаточно рассмотреть подпространство $\text{Ces}_p[0, 1]|_{[h, 1-h]} = L_1[h, 1-h]$ для произвольного $h \in (0, 1/2)$, а в случае $p = 1$ – подпространство $[r_n]$, порожденное системой Радемахера. Так как $[r_n] \simeq l^2$ (см. [13]), то оно не содержит подпространств, изоморфных l^1 .

§ 4. Общая конструкция и некоторые вопросы, с нею связанные

Следующий общий метод построения банаховых решеток с помощью сублинейного оператора был предложен в работе [1].

Пусть (T, Σ, μ) – пространство с σ -конечной мерой μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств множества T . Совокупность всех почти всюду конечных измеримых вещественнозначных функций на T с естественными алгебраическими операциями и топологией сходимости по мере μ на множествах конечной меры является линейным топологическим пространством, которое мы будем обозначать через $L^0(T, \mu)$. Кроме того, пусть $\mathcal{U}$ – некоторое вещественное F -пространство, а $S: \mathcal{U} \rightarrow L^0(T, \mu)$ – инъективный положительный сублинейный оператор, т.е. для всех $x, y \in \mathcal{U}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

- (a) $Sx \geq 0$,
- (b) $S(\lambda x) = |\lambda|S(x)$,
- (c) $S(x + y) \leq Sx + Sy$.

Тогда для произвольной банаховой решетки E Σ -измеримых вещественнозначных функций, определенных на T , можно определить линейное нормированное пространство

$$D_E(S) := \{x \in \mathcal{U} : Sx \in E\}$$

с нормой

$$\|x\|_{D_E(S)} = \|Sx\|_E, \quad x \in D_E(S).$$

В частности, если $E = L_p(T, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим его через $D_p(S)$. Тогда в том случае, когда в качестве пространства с мерой берется отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега, $\mathcal{U}$ – пространство $\mathcal{L}$ (см. § 3), а

$$Sx(t) := \frac{1}{t} \int_0^t |x(s)| ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

мы получаем пространство Чезаро $\text{Ces}_p[0, 1]$.

Еще один (причем, более важный) пример пространств такого типа – пространства вещественного метода интерполяции (в работе [1] можно найти и другие интересные примеры). Совокупность (X_0, X_1) двух банаховых пространств X_0 и X_1 называют *банаховой парой*, если они оба линейно и непрерывно вложены в одно и то же отделимое линейное топологическое пространство. Для банаховой пары (X_0, X_1) можно определить *пересечение* $X_0 \cap X_1$ и *сумму* $X_0 + X_1$ как банаховы пространства с нормами $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$ и $\|x\|_{X_0 + X_1} = \mathcal{K}(1, x; X_0, X_1)$, где

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}$$

для любых $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$.

Пусть (X_0, X_1) – произвольная банахова пара, а $\theta \in (0, 1)$. Рассматривая в качестве пространства с мерой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с мерой $\mu(A) := \text{card } A$, где A – произвольное подмножество $\mathbb{Z}$, пространства $\mathcal{U}$ – сумму $X_0 + X_1$ с топологией, порожденной ее нормой, определим положительный сублинейный оператор $S: X_0 + X_1 \rightarrow L_0(\mathbb{Z}, \mu)$ следующим образом:

$$Sx := \left\{ 2^{-n\theta} \mathcal{K}(2^n, x; X_0, X_1) \right\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad x \in X_0 + X_1.$$

В теории интерполяции соответствующие пространства $D_p(S)$ хорошо известны как пространства Лионса–Петре, обозначаемые через $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ (см. [14]).

Для пространств $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ справедлив результат, аналогичный ранее доказанной теореме 3 для пространств Чезаро: если пересечение $X_0 \cap X_1$ не замкнуто в сумме $X_0 + X_1$, то согласно теореме М. Леви [15] любое не замкнутое в $X_0 + X_1$ подпространство пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ содержит дополняемое в $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ подпространство, изоморфное l^p . Тем самым весьма естественным выглядит следующий вопрос (см. [1]).

Предположим, что имеет место непрерывное вложение $D_p(S) \subset \mathcal{U}$ и $D_p(S)$ не замкнуто в $\mathcal{U}$. При каких условиях на оператор S любое не замкнутое в $\mathcal{U}$ подпространство пространства $D_p(S)$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное l^p ?

Такие условия найдены в только что опубликованной работе автора [16].

Список литературы

- [1] M. Mastyło, “Banach spaces via sublinear operators”, *Math. Japon.*, **36**:1 (1991), 85–92.
- [2] A. A. Jagers, “A note on Cesàro sequence spaces”, *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **22** (1974), 113–124.

- [3] Б. И. Коренблум, С. Г. Крейн, В. Я. Левин, “О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов”, *Докл. АН СССР*, **62** (1948), 17–20.
- [4] W. Wnuk, *Banach lattices with order continuous norms*, Polish Scientific Publ., Warszawa, 1999.
- [5] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Grad. Texts in Math., **233**, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [6] M. I. Kadec, A. Pelczyński, “Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p ”, *Studia Math.*, **21** (1962), 161–176.
- [7] S. V. Astashkin, L. Maligranda, “Structure of Cesàro function spaces”, *Indag. Math. (N.S.)*, **20**:3 (2009), 329–379.
- [8] S. V. Astashkin, L. Maligranda, “Cesàro function spaces fail the fixed point property”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**:12 (2008), 4289–4294.
- [9] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [10] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978; англ. пер.: S. G. Krejn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
- [11] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, v. II: *Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
- [12] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, “Some examples of normed Köthe spaces”, *Math. Ann.*, **162**:3 (1965/1966), 337–350.
- [13] S. V. Astashkin, L. Maligranda, “Rademacher functions in Cesàro type spaces”, *Studia Math.*, **198**:3 (2010), 235–247.
- [14] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [15] M. Levy, “L’espace d’interpolation réel $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ contient ℓ^p ”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **289**:14 (1979), 675–677.
- [16] S. V. Astashkin, “Geometrical properties of Banach spaces generated by sublinear operators”, *Positivity*, 2012, DOI 10.1007/s11117-012-0159-7.

С. В. Асташкин (S. V. Astashkin)
Самарский государственный университет
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию
19.12.2010 и 25.06.2011