



О некоторых свойствах хаоса Радемахера

С. В. Асташкин, Р. С. Суханов

Изучаются свойства хаоса Радемахера, связанные с его “лакунарностью”. Доказано, что хаос Радемахера произвольного порядка d является системой 2^{-d} -единственности, а также системой строгой сходимости в широком (но не в узком) смысле.

Библиография: 14 названий.

1. Введение: постановка задачи и основные определения. Как обычно, функции Радемахера определяются следующим образом: если $t \in \mathbb{R}$, то $r_0(t) = 1$ и $r_n(t) = \text{sign}(\sin(2^n \pi t))$, $n = 1, 2, \dots$. Легко проверить, что для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $r_n(t) = r_m(2^{n-m}t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Хаосом Радемахера порядка $d \in \mathbb{N}$ будем называть множество всех функций вида $r_{i_1, \dots, i_d}(t) := r_{i_1}(t) \cdots r_{i_d}(t)$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty$.

В частности, система Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ является хаосом 1-го порядка. Кроме того, если к объединению хаосов Радемахера всех порядков добавить функцию r_0 , то мы получим систему функций Уолша $\{w_n\}_{n=0}^\infty$. Напомним ее определение: $w_0(t) = r_0(t) = 1$ и, если $n \in \mathbb{N}$ представимо в виде $n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_k = 1$ и $\varepsilon_i = 0$ или 1 при $i = 0, 1, \dots, k-1$, то, следуя нумерации Пэли, $w_n(t) = \prod_{i=0}^k (r_{i+1}(t))^{\varepsilon_i}$. Хорошо известно (см, например, [1; утверждения 1.1.5 и 2.6.3]), что последовательность $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ является полной ортонормированной системой на отрезке $[0, 1]$.

В этой заметке мы покажем, что хаос Радемахера, не являясь лакунарной последовательностью функций Уолша в обычном понимании, если его порядок ≥ 2 , тем не менее, обладает рядом свойств, сближающих его с такими последовательностями. Речь при этом будет идти о свойствах, связанных со сходимостью п.в. рядов

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1, \dots, i_d}(t), \quad (1)$$

понимаемой как сходимость соответствующих прямоугольных сумм

$$S_n(t) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1, \dots, i_d}(t).$$

О “лакунарных” свойствах хаоса Радемахера, относящихся к интегрируемости и поведению в симметричных функциональных пространствах, см. работы [2], [3].

Детальную информацию о хаосах, построенных по общим системам независимых функций, можно найти, например, в монографии [4].

Большую часть определений и обозначений, используемых далее, мы заимствуем из обзорной статьи Гапошкина [5], посвященной изучению свойств лакунарных систем функций.

(а). Системы ε -единственности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ функций, определенных на $[0, 1]$, является *системой ε -единственности*, если из сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty c_n f_n(t)$ к нулю на произвольном множестве $E \subset [0, 1]$, мера Лебега которого удовлетворяет условию $m(E) > 1 - \varepsilon$, следует, что $c_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

В работе Стечкина и Ульянова [6] был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная конечная функция с периодом 1, удовлетворяющая условию:

$$\varphi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \varphi(t) \neq 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, 1]. \quad (2)$$

Тогда если ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(2^n t)$ сходится к постоянной C на множестве $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 1/2$, то $C = 0$ и $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Полагая $\varphi(t) = r_1(t)$, получаем отсюда, в частности, что последовательность функций Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ – система $1/2$ -единственности. Более того, тривиальный пример: $r_1(t) + r_2(t) = 0$, если $t \in [1/4, 3/4]$, показывает, что она не является системой ε -единственности для произвольного $\varepsilon > 1/2$. Аналогичные результаты позднее были доказаны для общих лакунарных последовательностей функций Уолша.

Напомним, что последовательность $\{w_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ называется *лакунарной* (по Адамару), если $n_{k+1}/n_k \geq q$ для некоторого $q > 1$ и всех $k = 1, 2, \dots$. При этом говорят, что ее *степень лакулярности* не меньше q . Хорошо известно (см., например, [7; § 11.1, с. 681]), что для любого данного $q > 1$ произвольная лакулярная система $\{w_{n_k}\}$ может быть представлена в виде конечного объединения попарно дизъюнктивных подсистем, степень лакулярности каждой из которых не меньше q . Наименьшее число таких подсистем, имеющих степень лакулярности не меньше 2, называют *индексом 2-лакулярности* последовательности $\{w_{n_k}\}$.

Следующая теорема была доказана в работе [8].

ТЕОРЕМА В. Пусть $\{w_{n_k}\}$ – лакулярная последовательность функций Уолша, индекс 2-лакулярности которой равен M . Тогда, если ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k w_{n_k}(t)$ сходится к нулю (или константе) на множестве $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 1 - 2^{-M}$, то $a_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

В частности, из теоремы В следует, что при выполнении ее условий последовательность $\{w_{n_k}\}$ является системой 2^{-M} -единственности.

Нетрудно проверить, что хаос Радемахера порядка ≥ 2 не представим в виде конечного объединения попарно дизъюнктивных подсистем, степень лакулярности каждой из которых не меньше некоторого $q > 1$. Покажем это, например, для

хаоса 2-го порядка. Действительно, так как в нумерации Пэли $w_{2^n+2^k} = r_{n+1}r_{k+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, то он содержит сколь угодно длинные отрезки соседних функций из системы Уолша и поэтому не может быть представлен указанным образом. Тем не менее, как будет здесь доказано, для хаоса Радемахера справедлив аналог теоремы В с заменой индекса 2-лакунарности на порядок хаоса, причем приведенные далее примеры показывают точность этого результата. На самом деле, в этом направлении будет получено даже более общее утверждение, аналогичное теореме А.

(b). *Системы строгой сходимости.* Начнем со следующих определений из [5; § 1.2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, определенных на $[0, 1]$, называется *системой сходимости*, если всякий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \quad (3)$$

сходится п.в. на $[0, 1]$ при условии, что $(c_k) \in l_2$. Говорят, что система $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — *система полустрогой сходимости в широком (узком) смысле*, если сходимость ряда (3) п.в. на $[0, 1]$ (соответственно на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 0$) влечет: $(c_k) \in l_2$. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ является одновременно системой сходимости и системой полустрогой сходимости в широком (узком) смысле, то ее называют *системой строгой сходимости в широком (узком) смысле*.

Ввиду классических теорем Х. Радемахера и А. Н. Колмогорова (см., например, [9; § 4.5]) последовательность $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ является системой строгой сходимости в узком смысле. Вопрос о том, какие лакунарные подсистемы Уолша являются системами полустрогой сходимости в широком (узком) смысле, рассматривается в § 2.2 обзорной статьи [5]. Для того, чтобы сформулировать утверждение, приведенное там, определим некоторые классы лакунарных последовательностей натуральных чисел, являющиеся естественным обобщением понятия лакулярности по Адамару. Прежде всего, при изучении системы Уолша часто бывает полезна следующая операция сложения в группе целых неотрицательных чисел: если $n = \sum_{k=0}^{l_1} a_k 2^k$, $m = \sum_{k=0}^{l_2} b_k 2^k$, где a_k, b_k равны 0 или 1 и $a_{l_1} = b_{l_2} = 1$, то

$$n \uplus m := \sum_{k=0}^{\max(l_1, l_2)} |a_k - b_k| 2^k.$$

Обозначим через $D_2^{\uplus}$ класс всех таких подпоследовательностей $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ натурального ряда, что существуют целое $s \geq 1$, $A > 0$ и разбиение подпоследовательности $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ на такие группы Δ_i , что

- а) для каждого $i = 1, 2, \dots$ Δ_i содержит не более s членов;
- б) если $n_k \in \Delta_i$, $n_j \in \Delta_l$, $i < l$, то $n_k < n_j$;
- в) для любого целого ν число решений уравнения

$$n_k \uplus n_j = \nu, \quad n_k \in \Delta_i, \quad n_j \in \Delta_l, \quad i \neq l, \quad i, l = 1, 2, \dots,$$

не превышает A .

Определим также класс $G_2^\uplus$ всех таких подпоследовательностей $\{n_j\}_{j=1}^\infty$, что

$$\lim_{k \neq j, k, j \rightarrow \infty} n_k \uplus n_j = \infty.$$

Следующий результат сформулирован в [5] (см. теорему 2.2.2).

ТЕОРЕМА С. *Если $\{n_j\}_{j=1}^\infty \in D_2^\uplus$, то подсистема Уолша $\{w_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ является системой полустрогой сходимости в узком смысле тогда и только тогда, когда $\{n_j\}_{j=1}^\infty \in G_2^\uplus$.*

Покажем, что хаос Радемахера 2-го порядка не принадлежит классу $D_2^\uplus$, и поэтому последняя теорема к нему не применима.

Так как опять $w_{2^n+2^k} = r_{n+1}r_{k+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, то достаточно проверить, что при произвольном выборе разбиения последовательности $\{2^n + 2^k\}_{n=1,2,\dots; k=0,1,\dots,n-1}$ (занумерованной по возрастанию) на группы Δ_i , удовлетворяющего условиям а) и б), не будет выполнено условие в). Действительно, пусть заданы целое $s \geq 1$, $A > 0$ и разбиение этой последовательности, удовлетворяющее условиям а) и б). Пусть $\nu = 2^n + 2^{n+1}$, где $n > \max(s, A)$. Тогда числа $2^n + 2^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, и $2^{n+1} + 2^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, очевидно, лежат в разных группах Δ_i , и, кроме того, для каждого $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$(2^n + 2^k) \uplus (2^{n+1} + 2^k) = \nu.$$

Следовательно, уравнение из условия в) имеет не менее $n > A$ решений, и, значит, это условие не выполнено. Нетрудно проверить также, что последовательность $\{2^n + 2^k\}_{n=1,2,\dots; k=0,1,\dots,n-1}$ не принадлежит классу $G_2^\uplus$.

Тем не менее, далее будет показано, что хаос Радемахера произвольного порядка является системой строгой сходимости в широком смысле. Одновременно, если его порядок ≥ 2 , он не является системой строгой сходимости в узком смысле (в отличие от последовательности Радемахера).

2. Хаос Радемахера как система ε -единственности. Следующее утверждение обобщает теорему А, доказанную в работе [6].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\varphi(t)$ – произвольная конечная функция с периодом 1, удовлетворяющая условию (2). Если ряд*

$$\sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty} a_{i_1, \dots, i_d} \varphi(2^{i_1} t) \dots \varphi(2^{i_d} t) \quad (4)$$

сходится к постоянной C на множестве $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 1 - 2^{-d}$, то $C = 0$ и $a_{i_1, \dots, i_d} = 0$ для произвольных $0 \leq i_1 < \dots < i_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем вести индукцией по d . Если $d = 1$, то утверждение совпадает с теоремой А. Предположим, что теорема доказана для хаосов, порядок которых меньше d , и докажем ее для хаоса порядка d .

Если предположить, что утверждение не верно, то найдется индекс i_1^0 , обладающий следующим свойством: в соответствующей гиперстроке есть хотя бы один ненулевой коэффициент, а во всех предыдущих гиперстроках все коэффициенты равны 0. Иначе говоря, $a_{i_1^0, i_2, \dots, i_d} \neq 0$ для некоторых $0 \leq i_1^0 < i_2 < \dots < i_d$ и $a_{i_1, \dots, i_d} = 0$ для всех $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d$, если $0 \leq i_1 < i_1^0$.

Определим операцию: $x \oplus y = x + y \pmod{1}$, $x, y \in [0, 1]$. Так как φ периодична, то $\varphi(t_1 \oplus t_2) = \varphi(t_1 + t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

Рассмотрим множество $\tilde{E}$ всех точек $t \in E$, для которых точка $t \oplus 2^{-i_1^0-1}$ также принадлежит множеству E . Из условия следует, что его мера

$$m(\tilde{E}) = m(E \cap (E \oplus 2^{-i_1^0-1})) > 1 - 2^{-d+1}.$$

Пусть точка $t \in \tilde{E}$ произвольна. Тогда, если $f(t)$ – сумма ряда (4), то, с одной стороны, по условию

$$f(t \oplus 2^{-i_1^0-1}) - f(t) = C - C = 0, \quad (5)$$

а с другой,

$$\begin{aligned} & f(t \oplus 2^{-i_1^0-1}) - f(t) \\ &= \sum_{i_1^0 \leq i_1 < \dots < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \varphi(2^{i_1}(t \oplus 2^{-i_1^0-1})) \dots \varphi(2^{i_d}(t \oplus 2^{-i_1^0-1})) \\ &\quad - \sum_{i_1^0 \leq i_1 < \dots < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} \varphi(2^{i_1}t) \dots \varphi(2^{i_d}t) \\ &= \sum_{i_1^0 \leq i_1 < \dots < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} (\varphi(2^{i_1}(t \oplus 2^{-i_1^0-1})) \dots \varphi(2^{i_d}(t \oplus 2^{-i_1^0-1})) - \varphi(2^{i_1}t) \dots \varphi(2^{i_d}t)). \end{aligned} \quad (6)$$

При $i > i_1^0$ имеем

$$\varphi(2^i(t \oplus 2^{-i_1^0-1})) = \varphi(2^i t \oplus 2^{i-i_1^0-1}) = \varphi(2^i t).$$

Поэтому в сумме из правой части (6) ненулевые слагаемые могут присутствовать лишь в гиперстроке с индексом i_1^0 , и, значит, ввиду (5) и (6)

$$\sum_{i_1^0 < i_2 < \dots < i_d} a_{i_1^0, i_2, \dots, i_d} \varphi(2^{i_2}t) \dots \varphi(2^{i_d}t) \cdot (\varphi(2^{i_1^0}t + 1/2) - \varphi(2^{i_1^0}t)) = 0.$$

Отсюда и из (2) следует, что равенство

$$\sum_{i_1^0 < i_2 < \dots < i_d} a_{i_1^0, i_2, \dots, i_d} \varphi(2^{i_2}t) \dots \varphi(2^{i_d}t) = 0$$

выполняется для п.в. $t \in \tilde{E}$. Так как в левой части этого равенства находится ряд, соответствующий хаосу порядка $d - 1$, по предположению индукции все его коэффициенты $a_{i_1^0, i_2, \dots, i_d}$ должны быть равны нулю. Последнее противоречит выбору индекса i_1^0 , и, значит, теорема доказана.

Полагая $\varphi(t) = r_1(t)$, получаем как частный случай следующий результат для хаосов Радемахера.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если ряд (1) сходится к постоянной C на множестве $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 1 - 2^{-d}$, то $C = 0$ и $a_{i_1, \dots, i_d} = 0$ для всех $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d$. В частности, хаос Радемахера порядка d является системой 2^{-d} -единственности.

Возникает естественный вопрос: существует ли ряд по хаосу Радемахера порядка d , у которого не все коэффициенты равны нулю и который сходится к нулю на множестве $E \subset [0, 1]$ с мерой $m(E) = 1 - 2^{-d}$? Ответ положителен; приведем пример.

ПРИМЕР 1. Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ рассмотрим произведение

$$f_d(t) = \prod_{i=1}^d (r_{2i-1}(t) + r_{2i}(t)). \quad (7)$$

Прежде всего, ясно, что после раскрытия скобок получается ряд по хаосу Радемахера порядка d . Далее, поскольку функции $r_i(t)$ независимы на $[0, 1]$ относительно меры Лебега и $m\{t \in [0, 1] : r_{2i-1}(t) + r_{2i}(t) \neq 0\} = 1/2$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$m\{t \in [0, 1] : f_d(t) \neq 0\} = \prod_{i=1}^d m\{t \in [0, 1] : r_{2i-1}(t) + r_{2i}(t) \neq 0\} = 2^{-d},$$

откуда следует, что $m\{t \in [0, 1] : f_d(t) = 0\} = 1 - 2^{-d}$.

Теорема 1 и следствие 1 могут быть обобщены на случай системы, являющейся объединением хаосов Радемахера всех порядков, не превышающих некоторого $d \in \mathbb{N}$.

Пусть функция $\varphi(t)$ – такая же, как и в теореме 1. Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty} (a_{i_1} \varphi(2^{i_1} t) + a_{i_1, i_2} \varphi(2^{i_1} t) \varphi(2^{i_2} t) + \dots + a_{i_1, \dots, i_d} \varphi(2^{i_1} t) \dots \varphi(2^{i_d} t)), \quad (8)$$

сходимость которых понимается опять как сходимость соответствующих прямоугольных сумм.

Доказательство следующей теоремы практически ничем не отличается от доказательства теоремы 1, и поэтому мы его не приводим.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд (8) сходится к постоянной C на множестве $E \subset [0, 1]$ с мерой $m(E) > 1 - 2^{-d}$, то $C = 0$ и $a_{i_1, \dots, i_k} = 0$ для всех $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $1 \leq k \leq d$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если ряд

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty} (a_{i_1} r_{i_1}(t) + a_{i_1, i_2} r_{i_1, i_2}(t) + \dots + a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1, \dots, i_d}(t)) \quad (9)$$

сходится к постоянной C на множестве $E \subset [0, 1]$ с мерой $m(E) > 1 - 2^{-d}$, то $C = 0$ и $a_{i_1, \dots, i_k} = 0$ для всех $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $1 \leq k \leq d$. В частности, объединение хаосов Радемахера всех порядков, не превосходящих некоторого $d \in \mathbb{N}$, является системой 2^{-d} -единственности.

Разумеется, уже пример 1 показывает точность утверждения следствия 2. Приведем еще один пример, в котором участвуют функции всех хаосов, порядок которых не превышает фиксированного $d \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 2. Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$g_d(t) = \prod_{i=1}^d (1 + r_i(t)) - 1.$$

Легко видеть, что после раскрытия скобок получается линейная комбинация функций из хаосов Радемахера порядков $\leq d$. Кроме того, ввиду независимости функций Радемахера

$$m\{t \in [0, 1] : g_d(t) \neq -1\} = \prod_{i=1}^d m\{t \in [0, 1] : 1 + r_i(t) \neq 0\} = 2^{-d},$$

откуда следует, что $m\{t \in [0, 1] : g_d(t) = -1\} = 1 - 2^{-d}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичные результаты справедливы и для рядов вида

$$\sum_{k=1}^d \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k < \infty} a_{i_1, \dots, i_k} \varphi(2^{i_1} t) \dots \varphi(2^{i_k} t),$$

$$\sum_{k=1}^d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k < \infty} a_{i_1, \dots, i_k} r_{i_1, \dots, i_k}(t)$$

соответственно. Их отличие от рядов (8) и (9) состоит в предположении о сходимости не только всей суммы, но также и сумм, соответствующих хаосам всех порядков.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как уже отмечалось во введении, следствия 1 и 2 не вытекают из теоремы В, доказанной в [8], так как хаос Радемахера порядка ≥ 2 не является лакунарной (по Адамару) последовательностью функций Уолша (и даже не представим в виде конечного объединения таких последовательностей).

3. Хаос Радемахера как система строгой сходимости. Покажем, что хаос Радемахера является системой строгой сходимости в широком смысле и не является системой строгой сходимости в узком смысле. Первое из этих утверждений – непосредственное следствие следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Если ряд (1) сходится по мере на $[0, 1]$, то

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty} a_{i_1, \dots, i_d}^2 < \infty. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, мы применим идею декаплинга, перейдя к так называемому “разделенному” хаосу. А именно, ввиду [4; теоремы 6.9.2 и 6.3.1] существуют положительные константы k_1 , k_2 , K_1 и K_2 , зависящие лишь от размерности хаоса d , такие, что для любого $z > 0$ и произвольных натуральных $n < m$ выполнено

$$K_1 m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1, \dots, i_d}(t) \right| > k_1 z \right\}$$

$$\leq m_d \left\{ (t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > z \right\}$$

$$\leq K_2 m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1, \dots, i_d}(t) \right| > k_2 z \right\},$$

где m_d – d -мерная мера Лебега. Так как по условию ряд (1) сходится по мере на $[0, 1]$, отсюда следует, что ряд

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} < i_d < \infty} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \quad (11)$$

сходится по мере на кубе $[0, 1]^d$. Покажем, что тогда выполнено (10). Для этого опять применим индукцию по размерности хаоса d . Если $d = 1$, то ввиду независимости функций Радемахера соответствующий ряд сходится п.в. на $[0, 1]$ [10; § 4.2], и поэтому нужный результат сразу следует из известной теоремы Колмогорова [9; теорема 4.5.3]. Предположим, что из сходимости по мере на кубе $[0, 1]^{d-1}$ каждого ряда вида (11) (с заменой d на $d - 1$) следует квадратичная суммируемость последовательности его коэффициентов. Докажем аналогичное утверждение для хаоса порядка d .

Прежде всего, заметим, что согласно теореме Фубини сходимость ряда (11) по мере на кубе $[0, 1]^d$ эквивалентна тому, что для любого $\alpha > 0$

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m > n}} \int_0^1 m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \alpha \right\} dt_1 = 0. \quad (12)$$

Докажем, что тогда для п.в. $t_1 \in [0, 1]$ ряд (11) сходится по мере на $[0, 1]^{d-1}$.

Предположим, что это не так. Тогда, обозначив $v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) := \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1)$, $1 < i_2 < \dots < i_d$, найдем множество $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 0$, такое, что для каждого $t_1 \in E$ и некоторых $p = p(t_1) \in \mathbb{N}$ и $q = q(t_1) \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\limsup_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m > n}} m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{1}{p} \right\} > \frac{1}{q}.$$

Стандартные рассуждения показывают, что в этом случае существуют множество $F \subset [0, 1]$, $m(F) > 0$, а также такие константы $\beta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для всех $t_1 \in F$

$$\limsup_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m > n}} m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \beta \right\} > \varepsilon. \quad (13)$$

Тогда для любого $t_1 \in F$ найдется $N_1(t_1) \in \mathbb{N}$, при котором

$$m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=1}^{N_1(t_1)} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

Действительно, ввиду (13) найдутся такие $n_1 < m_1$, что

$$m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n_1}^{m_1} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \beta \right\} > \varepsilon.$$

Так как

$$\begin{aligned} & m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n_1}^{m_1} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \beta \right\} \\ & \leq m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=1}^{m_1} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} \\ & + m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=1}^{n_1} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\}, \end{aligned}$$

то хотя бы одно из слагаемых справа больше, чем $\varepsilon/2$. Выбирая $N_1(t_1)$ соответствующим образом, получаем (14).

Пусть далее $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $m\{t_1 \in F : N_1(t_1) > N_1\} \leq m(F)2^{-2}$. Тогда, если $F_1 := \{t_1 \in F : N_1(t_1) \leq N_1\}$, то $m(F_1) \geq (3/2^2)m(F)$ и для каждого $t_1 \in F_1$ и некоторого $N_1(t_1) \leq N_1$ выполнено неравенство (14). Аналогичным образом, опять используя (13), можно показать, что для любого $t_1 \in F_1$ и некоторого $N_2(t_1) \geq N_1$

$$m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=N_1}^{N_2(t_1)} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

Выберем $N_2 > N_1$ так, чтобы $m\{t_1 \in F_1 : N_2(t_1) > N_2\} \leq m(F)2^{-3}$. Если теперь $F_2 := \{t_1 \in F_1 : N_2(t_1) \leq N_2\}$, то $m(F_2) \geq (5/2^3)m(F)$ и для каждого $t_1 \in F_2$ и некоторых $1 \leq N_1(t_1) \leq N_1 \leq N_2(t_1) \leq N_2$ имеют место соотношения (14) и (15). Продолжая аналогичные рассуждения, найдем множество $F_\infty := \bigcap_{i=1}^\infty F_i$, для которого $m(F_\infty) \geq m(F)/2 > 0$, и номера $N_0 := 1 < N_1 < N_2 < N_3 < \dots$, такие, что для любого $t_1 \in F_\infty$ существует последовательность $\{N_i(t_1)\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям: $N_{i-1} \leq N_i(t_1) \leq N_i$, $i = 1, 2, \dots$, и

$$m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=N_i}^{N_{i+1}(t_1)} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} > \frac{\varepsilon}{2} \quad (16)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$.

Далее, по теореме Фубини, а также ввиду известного неравенства Кwapеня–Рыхлика [11; теорема 5.4.4] для произвольных $b_{i_2, \dots, i_d} \in \mathbb{R}$, $z > 0$ и натуральных $n < m < p$ имеем

$$\begin{aligned}
 & m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} b_{i_2, \dots, i_d} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > z \right\} \\
 &= \int_0^1 \dots \int_0^1 m \left\{ t_d \in [0, 1] : \left| \sum_{i_d=n}^m \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} b_{i_2, \dots, i_d} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > z \right\} dt_2 \dots dt_{d-1} \\
 &\leq 2 \int_0^1 \dots \int_0^1 m \left\{ t_d \in [0, 1] : \left| \sum_{i_d=n}^p \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} b_{i_2, \dots, i_d} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > z \right\} dt_2 \dots dt_{d-1} \\
 &= 2m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=n}^p \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} b_{i_2, \dots, i_d} r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > z \right\}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, так как $N_i(t_1) \leq N_i$, $i = 1, 2, \dots$, то ввиду (16) для каждого $t_1 \in F_\infty$

$$\begin{aligned}
 & m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=N_i}^{N_{i+1}} \sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} v_{i_2, \dots, i_d}(t_1) r_{i_2}(t_2) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} > \frac{\varepsilon}{4},
 \end{aligned}$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$, откуда

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=N_i}^{N_{i+1}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} dt_1 \\
 &\geq \int_{F_\infty} m_{d-1} \left\{ (t_2, \dots, t_d) \in [0, 1]^{d-1} : \left| \sum_{i_d=N_i}^{N_{i+1}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{d-1} < i_d} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) \dots r_{i_d}(t_d) \right| > \frac{\beta}{2} \right\} dt_1 \\
 &\geq \frac{\varepsilon}{4} m(F_\infty) \geq \frac{\varepsilon}{8} m(F) > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Так как последнее противоречит (12), наше исходное предположение неверно, и, значит, для п.в. $t_1 \in [0, 1]$ ряд (11) сходится по мере на $[0, 1]^{d-1}$.

Заметим, что при каждом фиксированном $t_1 \in [0, 1]$ ряд (11) построен по хаосу Радемахера порядка $d - 1$. Поэтому по предположению индукции для п.в. $t_1 \in [0, 1]$

$$\sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d < \infty} \left(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) \right)^2 < \infty.$$

Тем самым для произвольно малого $\delta > 0$ найдется такое множество $G \subset [0, 1]$, $m(G) \geq 1 - \delta$, что для всех $t_1 \in G$ и некоторого $K > 0$

$$\sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d < \infty} \left(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) \right)^2 \leq K,$$

откуда после интегрирования по G получаем

$$\sum_{1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d < \infty} \int_G \left(\sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1, \dots, i_d} r_{i_1}(t_1) \right)^2 dt_1 \leq Km(G).$$

В то же время, как известно (см., например, [12; лемма 2.3.1]), число $\delta > 0$ может быть выбрано настолько малым, что для некоторой абсолютной константы $c_0 > 0$ и всех $(b_i)_{i=1}^\infty \in l_2$ будет выполнено

$$\int_G \left(\sum_{i=1}^\infty b_i r_i(s) \right)^2 ds \geq c_0 \|(b_i)\|_{l_2}^2.$$

В итоге из двух последних соотношений следует, что

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < \infty} a_{i_1, \dots, i_d}^2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{d-1} < i_d} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1, \dots, i_d}^2 \leq Kc_0^{-1}m(G) < \infty,$$

и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Хаос Радемахера $\{r_{i_1, i_2, \dots, i_d}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d < \infty}$ является системой строгой сходимости в широком смысле и не является таковой в узком смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, ввиду аналога теоремы Карлесона для системы Уолша (см., например, [1; теорема 9.2.1]) хаос Радемахера любого порядка – система сходимости. Применяя теорему 3, получаем, что он является, более того, системой строгой сходимости в широком смысле. В то же время, рассмотрим следующий ряд, построенный по хаосу Радемахера порядка d :

$$\sum_{k=2d}^\infty c_k f_{d-1}(t) r_k(t), \quad \text{где} \quad f_{d-1}(t) := \prod_{i=1}^{d-1} (r_{2i-1}(t) + r_{2i}(t)).$$

Здесь $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность такая, что имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ и $\sum_{k=1}^\infty c_k^2 = \infty$. Так как функции Радемахера независимы, то $f_{d-1}(t) = 0$ для всех t из некоторого множества E меры $1 - 2^{-d+1}$. Тем самым этот ряд сходится на E к нулю как ряд по подсистеме Уолша (и тем более, в смысле сходимости прямоугольных сумм). Таким образом, хаос Радемахера не является системой строгой сходимости в узком смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $d = 2$ первое из утверждений следствия 3 вытекает также из [4; следствие 6.7.2].

4. Дополнительные замечания. Полученные здесь результаты свидетельствуют о том, что хаос Радемахера имеет несомненные “лакунарные” свойства. В то же время, его “лакунарность” не охватывается классическими определениями: как уже говорилось (см. введение), хаос Радемахера порядка ≥ 2 не принадлежат к классу лакунарных последовательностей функций Уолша даже в том случае, когда последние трактуются достаточно широко. В связи с этим может представлять интерес подход к лакунарности, основанный на понятии комбинаторной размерности, которое было введено и изучено в монографии [13]. Приведем некоторые содержащиеся в ней, а также в работе [14] определения и обозначения.

Для произвольных $d \in \mathbb{N}$ и $N \in \mathbb{N}$ обозначим:

$$\mathbb{N}^d := \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_d, \quad [N] := \{1, 2, \dots, N\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $F \in \mathbb{N}^d$ и $F_N := F \cap [N]^d$ ($N \in \mathbb{N}$). Говорят, что множество F имеет *комбинаторную размерность* α (пишем: $\dim F = \alpha$), если существуют такие $N_0 \in \mathbb{N}$ и положительные константы C_1 и C_2 , что для всех $N \geq N_0$ выполнено:

$$\text{card}(F_N \cap (A_1 \times \cdots \times A_d)) \leq C_1 \left(\max_{1 \leq j \leq d} \text{card } A_j \right)^\alpha,$$

где множества $A_j \subset [N]$ ($j = 1, 2, \dots, d$) произвольны, и

$$\text{card } F_N \geq C_2 N^\alpha.$$

Далее мы ограничимся рассмотрением множеств

$$\Delta^d = \{(i_1, \dots, i_d) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_d < \infty\}, \quad d \in \mathbb{N},$$

являющихся множествами индексов для хаосов. Как доказано в [13; Chapter XIII], для произвольных $d \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [1, d]$ существует множество $F \subset \Delta^d$, комбинаторная размерность которого равна α .

Определим также множество $\Delta^\infty \subset \mathbb{N}^\infty$, состоящее из всех последовательностей $(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)$ таких, что для некоторого $d \in \mathbb{N}$ (d зависит от последовательности) выполнено: $1 \leq i_1 < \cdots < i_d$ и $i_k = 0$, если $k > d$. Тогда произвольное множество вида $E = \bigcup_{j=1}^m \Delta^{d_j}$, можно естественным образом рассматривать как некоторое подмножество Δ^∞ . Кроме того, нетрудно проверить, что $\dim\{\bigcup_{k=1}^d \Delta^d\} = \dim \Delta^d = d$. Тем самым возникает следующая, казалось бы, естественная гипотеза: если комбинаторная размерность множества $F \subset \Delta^d$ равна α , то соответствующая подпоследовательность функций Уолша $\{r_{i_1, \dots, i_d}\}_{(i_1, \dots, i_d) \in F}$ является системой $2^{-\alpha}$ -единственности. Тем не менее, следующий простой пример показывает, что, по крайней мере, в такой сильной форме это утверждение не верно.

ПРИМЕР 3. Пусть $F = \mathbb{N} \cup \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Легко проверить, что $\dim F = 1$. В то же время, произведение $f(t) := (1 - r_2(t))(r_1(t) + r_3(t))$, с одной стороны, является линейной комбинацией функций Уолша, соответствующих множеству F , а с другой, $f(t) = 0$ для всех $t \in E$ с мерой $m(E) = 3/4$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Изд-во ЛКИ, М., 2008.
- [2] S. V. Astashkin, “Rademacher chaos in symmetric spaces”, *East J. Approx.*, **4**:3 (1998), 311–336.
- [3] S. V. Astashkin, “Rademacher chaos in symmetric spaces. II”, *East J. Approx.*, **6**:1 (2000), 71–86.
- [4] S. Kwapień, W. A. Wołczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Probab. Appl., Birkhäuser Boston, Boston, 1992.
- [5] В. Ф. Гапошкин, “Лакунарные ряды и независимые функции”, *УМН*, **21**:6 (1966), 3–82.
- [6] С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов, “О множествах единственности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **26**:2 (1962), 211–222.
- [7] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [8] J. Coury, “Some results on lacunary Walsh series”, *Pacific J. Math.*, **45**:2 (1973), 419–425.
- [9] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958.
- [10] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980.
- [11] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [12] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
- [13] R. Blei, *Analysis in Integer and Fractional Dimensions*, Cambridge Stud. Adv. Math., **71**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [14] R. Blei, S. Janson, “Rademacher chaos: tail estimates versus limit theorems”, *Ark. Mat.*, **42**:1 (2004), 13–29.

С. В. Асташкин

Самарский государственный университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило

31.03.2011

Р. С. Суханов

Самарский государственный университет

E-mail: surose@yandex.ru