



О некоторых вероятностных аналогах неравенства Розенталя

С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров

Получены вероятностно-комбинаторные неравенства для независимых случайных величин, являющиеся усилением известного неравенства Розенталя. Как следствие доказано, что обобщенное неравенство Розенталя для одинаково распределенных независимых функций остается справедливым в случае квазинормированных симметричных пространств.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^n$, измеримых на $[0, 1]$, рассмотрим соответствующую ей “дизъюнктную сумму”

$$F(t) := \sum_{k=1}^n f_k(t - k + 1) \chi_{(k-1, k]}(t), \quad t > 0. \quad (1) \quad \{\text{eq1}\}$$

Как легко видеть,

$$m\{t > 0 : |F(t)| > \tau\} = \sum_{k=1}^n m\{t \in [0, 1] : |f_k(t)| > \tau\}, \quad \tau > 0, \quad (2) \quad \{\text{eq2}\}$$

где m – мера Лебега. Пусть $F^*(t)$ – невозрастающая непрерывная слева перестановка функции $F(t)$ (определения см. ниже), а $\chi_{[0, 1]}$ – как обычно, характеристическая функция отрезка $[0, 1]$. Тогда если X – произвольное квазинормированное симметричное пространство (СП) на $[0, 1]$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждой последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено неравенство

$$\|F^* \chi_{[0, 1]}\|_X + \sum_{k=1}^n F^*(k) \leq C_X \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \quad (3) \quad \{\text{eq3}\}$$

[1; теорема 1]. В классическом случае, когда $X = L_p$ ($1 \leq p < \infty$), неравенство (3) доказано в замечательной работе Розенталя [2], и поэтому оно часто называется *неравенством Розенталя*. Сделаем здесь два замечания. Во-первых, неравенство, противоположное по отношению к (3), верно не всегда, а только для СП, достаточно “удаленных” от пространства L_∞ (подробнее см. [1], [3] и [4]). Во-вторых, в [2] получено аналогичное соотношение для последовательностей симметрично распределенных независимых функций в L_p (см. также [5; теорема 2] и [6]). Обобщения

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 3341).

этого варианта неравенства Розенталя для произвольных СП содержатся в работах [1] и [7].

Доказательство соотношения (3) сводится к доказательству двух неравенств:

$$\begin{aligned} \|F^* \chi_{[0,1]}\|_X &\leq A_X \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X, \\ \sum_{k=1}^n F^*(k) &\leq B_X \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X. \end{aligned} \quad (4) \quad \{\text{eq4}\}$$

Первое из них – непосредственное следствие известного вероятностного неравенства (см., например, [8; предложение 2.1])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m\{t \in [0, 1] : F^*(t) \chi_{[0,1]}(t) > \tau\} &\leq m\left\{t \in [0, 1] : \max_{k=1,2,\dots,n} f_k(t) > \tau\right\} \\ &\leq m\{t \in [0, 1] : F^*(t) \chi_{[0,1]}(t) > \tau\}, \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

а также определения СП. Что касается неравенства (4), то его доказательство в [1] основано на использовании свойств квазинормированных СП, в частности, на применении факторизационной теоремы Никишина [9]. Более общее неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n F^*(k) e_k \right\|_E \leq D_{X,E} \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|, \quad (5) \quad \{\text{eq5}\}$$

где E – произвольное СП последовательностей, а $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – стандартный базис в E , было доказано в [10] (см. также [11]) для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ в случае, когда X и E – банаховы СП. Ключевой момент доказательства неравенства (5) в обеих упомянутых работах при этом состоит в использовании двойственности, отсутствующей в квазинормированной ситуации, и поэтому оно в принципе не может быть обобщено на этот случай.

Основная цель этой заметки состоит в доказательстве того факта, что на самом деле неравенства типа (4) и (5) являются следствием некоторых вероятностных нижних оценок и поэтому они имеют исключительно вероятностно-комбинаторную природу. Этот подход, в частности, позволит доказать (5) в случае одинаково распределенных функций для произвольных *квазинормированных* СП E и X .

Нижним оценкам распределений посвящено немало количество теоретико-вероятностных работ (см., например, [5], [6], [12]–[17]). Отметим, однако, что соотношения, приведенные здесь, имеют специфический характер. Во-первых, они состоят в сравнении сумм *неотрицательных* случайных величин с соответствующими “дизъюнктивными суммами” и действуют в области нормальных отклонений (в отличие, скажем, от оценок работ [6], [13] и [16], действующих в области больших и умеренных отклонений). Во-вторых, эти оценки ориентированы, прежде всего, на рассматриваемые здесь теоретико-функциональные приложения.

Пусть $x(t)$ измерима по Лебегу на полуоси $(0, \infty)$. Тогда функция $|x(t)|$ *равноизмерима* со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : m\{s \in [0, 1] : |x(s)| > \tau\} < t\}, \quad t > 0,$$

т.е.

$$m\{t > 0 : |x(t)| > \tau\} = m\{t > 0 : x^*(t) > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0.$$

Банахово пространство X , элементами которого являются измеримые по Лебегу функции на $[0, 1]$, называется *симметричным* (СП), если

- 1) из того, что $|y(t)| \leq |x(t)|$ п.в. и $x \in X$, следует: $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$;
- 2) из равноизмеримости функций $|x(t)|$ и $|y(t)|$ на $[0, 1]$ и того, что $x \in X$, следует: $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

В том случае, когда вместо неравенства треугольника в X выполняется неравенство $\|x + y\|_X \leq L(\|x\|_X + \|y\|_X)$ с некоторым $L > 1$, X называется *квазибанаховым* СП. Аналогично определяются банаховы и квазибанаховы СП последовательностей. Больше информации о СП можно найти в монографиях [18] и [19].

Через $[a]$ далее будет обозначаться целая часть действительного числа a .

2. Нижние оценки для дискретных распределений. Начнем с оценок для сумм произвольно распределенных неотрицательных независимых дискретных случайных величин, принимающих одни и те же значения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ — произвольная бистохастическая матрица, т.е.

$$0 \leq a_{i,j} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для произвольного вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$, рассмотрим набор таких независимых случайных величин ξ_i , что $P\{\xi_i = x_j\} = a_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\xi := \sum_{i=1}^n \xi_i$, то

$$P\left\{\xi \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i\right\} \geq \frac{1}{8}. \quad (6) \quad \{\text{eq6}\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E\xi$ — математическое ожидание ξ , то

$$E\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j a_{i,j} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n x_j,$$

и значит, неравенство (6) эквивалентно следующему:

$$P\left\{\xi \geq \frac{1}{2} E\xi\right\} \geq \frac{1}{8}. \quad (7) \quad \{\text{eq7}\}$$

Ввиду неравенства Пэли–Зигмунда [20; с. 19]

$$P\left\{\xi \geq \frac{1}{2} E\xi\right\} \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{(E\xi)^2}{E(\xi^2)} = \frac{1}{4} \frac{(E\xi)^2}{E(\xi^2)}. \quad (8) \quad \{\text{eq8}\}$$

Так как величины ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, независимы, то

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{i=1}^n E(\xi_i^2) + \sum_{i \neq j} E\xi_i E\xi_j \leq \sum_{i=1}^n E(\xi_i^2) + \left(\sum_{i=1}^n E\xi_i\right)^2 \\ &= (E\xi)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 a_{i,j} = (E\xi)^2 + \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq 2(E\xi)^2. \end{aligned}$$

В итоге соотношение (7) а значит, и (6), следует из (8).

Более тонкие рассуждения показывают, что в случае одинаково распределенных величин справедливо существенно более сильное утверждение.

Пусть теперь $P\{\xi_i = x_j\} = 1/n$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $x_1 > x_2 > \dots > x_n \geq 0$. Через $(\xi_i^\#(\omega))_{i=1}^n$ будем обозначать невозрастающую перестановку вектора $(\xi_j(\omega))_{j=1}^n$ для каждого ω из вероятностного пространства Ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует константа $\alpha > 0$, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$ и вектора $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, такая, что при условии независимости ξ_i*

$$P\left\{\omega \in \Omega : \xi_i^\#(\omega) \geq x_{2i-1}, i = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\} \geq \alpha. \quad (9) \quad \{\text{eq9}\}$$

Приведем комбинаторную формулировку последнего утверждения. Пусть, как и ранее, $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 > x_2 > \dots > x_n \geq 0$, а также $S := \sum_{i=1}^n x_i$. Обозначим через Σ множество всех векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, “составленных” из координат вектора x , т.е. $y_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ (x_k могут повторяться). Очевидно, $\text{card } \Sigma = n^n$. Кроме того, пусть

$$\Sigma_1 = \left\{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Sigma : y_i^\# \geq x_{2i-1}, i = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}.$$

Тогда, как легко видеть, неравенство (9) эквивалентно следующему:

$$\text{card } \Sigma_1 \geq \alpha \cdot n^n, \quad (10) \quad \{\text{eq10}\}$$

и поэтому мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует такая универсальная константа $\alpha > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство (10).*

3. Нижние оценки для распределений независимых функций. Здесь на основании полученных в предыдущей части результатов будут доказаны нижние оценки для распределений сумм независимых функций, измеримых на $[0, 1]$. Напомним, что “дизъюнктивная сумма” $F(t)$, соответствующая последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$ функций, измеримых на $[0, 1]$, определяется соотношением (1).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ – произвольная последовательность неотрицательных независимых функций на $[0, 1]$. Тогда*

$$m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n F^*(k)\right\} \geq \frac{1}{8}, \quad (11) \quad \{\text{eq11}\}$$

где $F^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $F(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что

$$m\{t \in [0, 1] : f_i(t) = \tau\} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Полагая $\tau_0 := \infty$, выберем индуктивно числа $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n \geq 0$ следующим образом: если $k = 1, 2, \dots, n$ и τ_{k-1} уже определено, то

$$\tau_k := \max\left\{\tau \in [0, \tau_{k-1}] : \sum_{i=1}^n m\{t \in [0, 1] : \tau \leq f_i(t) < \tau_{k-1}\} = 1\right\}. \quad (12) \quad \{\text{eq12}\}$$

Если

$$a_{i,j} := m\{t \in [0, 1] : \tau_j \leq f_i(t) < \tau_{j-1}\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

то $a_{i,j} \geq 0$ и ввиду (12) $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, так как $f_i \geq 0$, то

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n m\{t \in [0, 1] : \tau_j \leq f_i(t) < \tau_{j-1}\} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ – бистохастическая матрица.

Далее, для каждого $\tau \in (\tau_k, \tau_{k-1})$ (см. (2) и (12))

$$\begin{aligned} m\{t > 0 : |F(t)| > \tau\} &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^n m\{t \in [0, 1] : \tau_j \leq f_i(t) < \tau_{j-1}\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n m\{t \in [0, 1] : \tau < f_i(t) < \tau_{k-1}\} < k, \end{aligned}$$

откуда по определению перестановки

$$F^*(k) \leq \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13) \quad \{\text{eq13}\}$$

Введем последовательность ступенчатых функций

$$g_i(t) := \sum_{j=1}^n \tau_j \chi_{\{\tau_j \leq f_i(t) < \tau_{j-1}\}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Функции g_i независимы,

$$m\{t \in [0, 1] : g_i(t) = \tau_j\} = a_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

и для всех $t \in [0, 1]$

$$g_i(t) \leq f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14) \quad \{\text{eq14}\}$$

Применяя предложение 1 к функциям g_i , получаем, что

$$m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{i=1}^n g_i(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tau_i\right\} \geq \frac{1}{8}.$$

Отсюда, а также из соотношений (13) и (14) следует

$$m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{i=1}^n f_i(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F^*(i)\right\} \geq m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{i=1}^n g_i(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tau_i\right\} \geq \frac{1}{8}$$

и (11) доказано.

Предположим теперь, что для некоторых $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено

$$m\{t \in [0, 1] : f_i(t) = \tau\} > 0.$$

Покажем, что неравенство (11) верно и в этом случае. Действительно, для любого $\epsilon > 0$ найдутся функции h_i , $1 \leq i \leq n$, такие, что

$$\begin{aligned} f_i(t) &\leq h_i(t) \leq f_i(t) + \epsilon \quad \text{для всех } t \in [0, 1], \\ m\{t \in [0, 1] : h_i(t) = \tau\} &= 0 \quad \text{для любого } 1 \leq i \leq n, \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пусть $(q_i)_{i=1}^n$ – независимые копии функций h_i (т.е., q_i равноизмерима с h_i для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ и $q_1, q_2, \dots, q_n$ независимы). Тогда, применяя вышеприведенные рассуждения, приходим к неравенству

$$m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n q_k(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q^*(k)\right\} \geq \frac{1}{8},$$

где Q – “дизъюнктивная сумма” для функций q_i . Так как q_i равноизмерима с h_i и $h_i \geq f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $Q^*(k) \geq F^*(k)$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Далее, поскольку $(f_i + \epsilon)^*(t) \geq q_i^*(t)$ для всех $1 \leq i \leq n$ и $t \in [0, 1]$, то ввиду независимости наборов $\{f_i\}$ и $\{q_i\}$

$$m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n (f_k(t) + \epsilon) \geq x\right\} \geq m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n q_k(t) \geq x\right\}$$

для любого вещественного x . Таким образом,

$$m\left\{t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n F^*(k) - n\epsilon\right\} \geq \frac{1}{8},$$

где ϵ может быть сколь угодно мало. Тем самым, пользуясь непрерывностью меры Лебега, приходим к (11).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – произвольное квазинормированное СП на $[0, 1]$. Тогда существует такая константа $B_X > 0$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$ неотрицательных независимых функций на $[0, 1]$ справедливо неравенство (4).

Аналогичным образом, используя предложение 2, можно доказать следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ – произвольная последовательность равноизмеримых неотрицательных независимых функций на $[0, 1]$. Тогда

$$m\left\{t \in [0, 1] : f_j^\sharp(t) \geq F^*(2j - 1), j = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\} \geq \alpha, \quad (15) \quad \{\text{eq15}$$

где α – константа из предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X и E – произвольные квазинормированные СП функций на $[0, 1]$ и последовательностей соответственно, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – стандартный базис в E . Тогда существует такая константа $D_{X,E}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и всякой последовательности равноизмеримых неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено неравенство (5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces”, *Ann. Probab.*, **17:2** (1989), 789–808.
- [2] H. P. Rosenthal, “On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables”, *Israel J. Math.*, **8:3** (1970), 273–303.

- [3] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach”, *Israel J. Math.*, **145**:1 (2005), 125–156.
- [4] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 483–489.
- [5] С. В. Нагаев, Н. Ф. Пинелис, “Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин”, *ТВП*, **22**:2 (1977), 254–263.
- [6] С. В. Нагаев, “О вероятностях больших отклонений в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **34**:2 (1983), 309–313.
- [7] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 35, Зап. научн. сем. ПОМИ, **345**, ПОМИ, СПб., 2007, 25–50.
- [8] P. Hitczenko, S. Montgomery-Smith, “Measuring the magnitude of sums of independent random variables”, *Ann. Probab.*, **29**:1 (2001), 447–466.
- [9] Е. М. Никишин, “Резонансные теоремы и надлинейные операторы”, *УМН*, **25**:6 (1970), 129–191.
- [10] S. Montgomery-Smith, “Rearrangement invariant norms of symmetric sequence norms of independent sequences of random variables”, *Israel J. Math.*, **131**:1 (2002), 51–60.
- [11] M. Junge, “The optimal order for the p -th moment of sums of independent random variables with respect to symmetric norms and related combinatorial estimates”, *Positivity*, **10**:2 (2006), 201–230.
- [12] S. V. Nagaev, “Large deviations of sums of independent random variables”, *Ann. Probab.*, **7**:5 (1979), 745–789.
- [13] А. А. Боровков, “Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера”, *Сиб. матем. журн.*, **41**:5 (2000), 997–1038.
- [14] С. В. Нагаев, “Нижние оценки для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин”, *ТВП*, **46**:1 (2001), 50–73.
- [15] С. В. Нагаев, “Нижние границы для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин”, *ТВП*, **46**:4 (2001), 785–792.
- [16] С. В. Нагаев, “О больших отклонениях автонормированной суммы”, *ТВП*, **49**:4 (2004), 794–802.
- [17] L. Mattner, “Lower Bounds for Tails of Sums of Independent Symmetric Random Variables”, *ТВП*, **53**:2 (2008), 397–403.
- [18] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [19] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [20] Ж.-П. Кахан, *Случайные функциональные ряды*, Мир, М., 1973.

С. В. Асташкин

Самарский государственный университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило

25.08.2010

Исправленный вариант

12.04.2011

К. Е. Тихомиров

Самарский государственный университет

E-mail: ktikhomirov@yandex.ru