

О ФИНИТНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ l_p -ПРОСТРАНСТВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© С. В. АСТАШКИН

В работе найдена характеристика множества $\mathcal{F}(X)$ всех $p \in [1, \infty]$, для которых l_p финитно представимо в сепарабельном симметричном пространстве X на полуоси таким образом, что канонические орты l_p соответствуют дизъюнктым равноизмеримым функциям в X . В качестве следствия доказан вариант хорошо известной теоремы Кривине для симметричных пространств. Кроме того, на основе полученных результатов найдено описание множества $\mathcal{F}(X)$ для степенных пространств Лоренца.

§1. Введение

В 1974 г. Б. Цирельсон [1] построил пример банахова пространства, в котором нет изоморфных копий как l_p для каждого $1 \leq p < \infty$, так и c_0 . Через два года Ж. Кривине доказал теорему, ставшую еще одним блестящим подтверждением существенной разницы в свойствах бесконечных и произвольно больших, но конечных подпространств банаховых пространств. Для ее формулировки и последующего обсуждения нам понадобятся следующие понятия.

Определение. Пусть X — произвольное банахово пространство, $1 \leq p \leq \infty$, $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ — ограниченная последовательность в X . Говорят, что пространство l_p *блок-финитно представимо* в $\{z_i\}_{i=1}^\infty$, если для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n$ и $\alpha_i \in \mathbb{C}$ такие, что для векторов $u_k = \sum_{i=p_{k-1}+1}^{p_k} \alpha_i z_i$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и для произвольных $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ имеют место неравенства

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \|(a_k)_{k=1}^n\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\|_X \leq (1 + \varepsilon) \|(a_k)_{k=1}^n\|_p,$$

Ключевые слова: конечная представимость l_p -пространств, симметричные пространства, индексы Бойда, пространства Лоренца, спектр, весовые пространства.

Работа частично поддержана РФФИ, грант 07-01-96603.

где, как обычно,

$$\|(a_k)_{k=1}^n\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p}, \text{ если } p < \infty, \text{ и } \|(a_k)_{k=1}^n\|_\infty := \max_{k=1,2,\dots,n} |a_k|.$$

Определение. Пусть X — произвольное банахово пространство, $1 \leq p \leq \infty$. Говорят, что пространство l_p *финитно представимо* в X , если для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, что для произвольных $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ выполнено

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \|(a_k)_{k=1}^n\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|_X \leq (1 + \varepsilon) \|(a_k)_{k=1}^n\|_p. \quad (1.1)$$

Ввиду знаменитой теоремы Дворецкого (см. [2] или [3, теорема 5.8]) l_2 финитно представимо в любом бесконечномерном банаховом пространстве X . Так как финитная представимость пространства l_p в X вытекает из того, что оно блок-финитно представимо в некоторой последовательности $\{z_i\}_{i=1}^\infty \subset X$, то следующее утверждение, доказанное Ж. Кривине в [4], существенно дополняет упомянутую теорему Дворецкого.

Теорема 1 (см. [5, теорема 11.3.9]). Пусть $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ — произвольная нормированная последовательность банахова пространства X , элементы которой образуют в X не предкомпактное множество. Тогда существует такое $1 \leq p \leq \infty$, что l_p блок-финитно представимо в $\{z_i\}_{i=1}^\infty$.

Эта теорема, несомненно, является одним из центральных результатов геометрической теории банаховых пространств и имеет многочисленные приложения (см., например, [5] и [3]). В связи с ней возникает естественная задача описания всех $p \in [1, \infty]$, для которых l_p финитно представимо в том или ином банаховом пространстве. Оказалось, что важную роль в этом вопросе играет то, какой тип и котип (Радемахера) имеет это пространство. Пусть $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) — функции Радемахера, т.е. $r_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$. Банахово пространство X имеет *тип* $1 \leq p \leq 2$, если существует такая константа $K > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt \leq K \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

Банахово пространство X имеет *котип* $q \geq 2$, если существует такая константа $K > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq K \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt.$$

В случае $q = \infty$ левая часть последнего неравенства должна быть заменена на $\max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$. Говорят, что X имеет *тривиальный тип* (*тривиальный котип*), если это пространство имеет лишь тип, равный 1 (лишь бесконечный котип). Детальную информацию об этих понятиях можно найти в [6] и [7]. Введем обозначения

$$p_X := \sup\{p \in [1, 2] : X \text{ имеет тип } p\}$$

и

$$q_X := \inf\{q \in [2, \infty] : X \text{ имеет котип } q\}.$$

Нетрудно проверить, что если l_p финитно представимо в банаховом пространстве X , то $p \in [p_X, q_X]$. Более того, Морэ и Пизье доказали следующее уточнение теоремы 1 [8].

Теорема 2 (Морэ–Пизье). *Для любого бесконечномерного банахова пространства X пространства l_{p_X} и l_{q_X} финитно представимы в X .*

Предположим, что теперь банахово пространство X наделено структурой частичного порядка, относительно которой является банаховой решеткой. Тогда если l_p финитно представимо в X и, кроме того, элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ в X , соответствующие каноническим ортам l_p , можно выбирать каждый раз дизъюнктивными, то говорят, что l_p *решеточно финитно представимо* в банаховой решетке X . В этом случае роль, аналогичную типу и котику, играют верхняя и нижняя оценки банаховой решетки.

Напомним, что банахова решетка X допускает *верхнюю p -оценку*, если существует такая константа $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных дизъюнктивных $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq M \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p} \quad (p < \infty)$$

и

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq M \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\| \quad (p = \infty).$$

Банахова решетка X допускает *нижнюю q -оценку*, если существует такая константа $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных дизъюнктивных $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq M \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \quad (q < \infty)$$

и

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \quad (q = \infty).$$

Пусть

$$s(X) := \sup\{p \geq 1 : X \text{ допускает верхнюю } p\text{-оценку}\}$$

и

$$\sigma(X) := \inf\{q \geq 1 : X \text{ допускает нижнюю } q\text{-оценку}\}.$$

Тогда если l_p решеточно финитно представимо в банаховой решетке X , то $p \in [s(X), \sigma(X)]$. Кроме того, в [9] доказан следующий вариант теорем Кривине и Морэ–Пизье для банаховых решеток.

Теорема 3 (Шепп). *Пусть X — бесконечномерная банахова решетка. Тогда $l_{s(X)}$ и $l_{\sigma(X)}$ решеточно финитно представимы в X .*

Далее мы будем рассматривать специальный класс функциональных банаховых решеток — симметричные пространства (определения см. в следующем параграфе). Для произвольной измеримой на $[0, \alpha]$ функции $x(t)$ ($0 < \alpha \leq \infty$) обозначим $n_x(\tau) := m(\{s \in [0, \alpha] : |x(s)| > \tau\})$, где здесь и всюду далее m — мера Лебега.

Определение. Пусть X — симметричное пространство на $[0, \infty)$. Тогда $\mathcal{F}(X)$ — множество всех таких $p \in [1, \infty]$, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $x_k \in X$ ($k = 1, 2, \dots, n$), что $\text{supp } x_i \cap \text{supp } x_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $n_{x_k}(\tau) = n_{x_1}(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $\tau > 0$), и для произвольных $a_k \in \mathbb{C}$

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \|(a_k)_{k=1}^n\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|_X \leq (1 + \varepsilon) \|(a_k)_{k=1}^n\|_p \quad (1.2)$$

(с естественной модификацией при $p = \infty$).

Если α_X и β_X — индексы Бойда симметричного пространства X , то нетрудно показать, что $\mathcal{F}(X) \subset [1/\beta_X, 1/\alpha_X]$. Кроме того, в монографии [7] без доказательства приведен следующий вариант теоремы Кривине (см. также [10, замечание после доказательства теоремы 3.3]).

Теорема 4 (см. [7, теорема 2.b.6]). *Если X — произвольное симметричное пространство, то $\max \mathcal{F}(X) = 1/\alpha_X$, а $\min \mathcal{F}(X) = 1/\beta_X$.*

Последняя теорема, а также структура множества $\mathcal{F}(X)$ играют важную роль как при исследовании геометрической структуры симметричных пространств (см., например, [11]), так и при изучении нормальной разрешимости и обратимости функциональных операторов, что, в свою очередь, используется в теории функционально-дифференциальных уравнений, в теории динамических систем и т.д. (см. [12], а также литературу, цитированную там).

В дальнейшем важную роль будет играть следующее понятие.

Определение. Пусть $A : X \rightarrow X$ — линейный оператор, ограниченный в банаховом пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\|u_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) называется *аппроксимативным собственным вектором*, соответствующим *аппроксимативному собственному значению* $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора A , если $\|Au_n - \lambda u_n\| \rightarrow 0$.

Нетрудно показать [3, 12.1], что любой ограниченный оператор имеет хотя бы одно аппроксимативное собственное значение. Основной результат этой работы — следующая характеристика множества $\mathcal{F}(X)$ для произвольного сепарабельного симметричного пространства на $[0, \infty)$, одним из простых следствий которой, в частности, будет теорема 4.

Теорема 5. Пусть X — произвольное сепарабельное симметричное пространство на $[0, \infty)$. Тогда $p \in \mathcal{F}(X)$, если и только если число $\lambda := 2^{1/p}$ является аппроксимативным собственным значением оператора растяжения $Tx(t) := x(t/2)$.

Доказательству этой теоремы в основном посвящен §3 (после того, как в §2 будут введены основные определения и обозначения). Как следствие затем будет доказана теорема 4 (напомним, что в [7] она приведена без доказательства). Во второй части работы (см. §5) получено полное описание множества $\mathcal{F}(X)$ в случае, когда X — степенное пространство Лоренца. Будет показано, что в зависимости от функции, порождающей это пространство, $\mathcal{F}(X)$ либо совпадает со всем отрезком $[1/\beta_X, 1/\alpha_X]$, либо является объединением двух отрезков. При этом в доказательстве существенно используются результаты работы [13], где полностью охарактеризованы свойства образа оператора $S_\lambda = S - \lambda I$ (S — оператор сдвига, I — тождественный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$) в весовом l_p -пространстве. Последние детально представлены в §4. И наконец, §6 содержит некоторые примеры и замечания.

§2. Определения и обозначения

Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ комплекснозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0, \alpha)$ ($0 < \alpha \leq \infty$), называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если из того, что $y \in X$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$ ($t \in [0, \alpha)$), следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Здесь и далее $x^*(t)$ — невозрастающая непрерывная справа *перестановка* функции $|x(s)|$, т.е. $x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) \leq t\}$ ($t > 0$).

Симметричное пространство (с. п.) называется *максимальным* (или имеет *свойство Фату*), если из того, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$, $f_n \rightarrow f$ п.в. на $[0, \alpha)$ и $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$, следует $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X$. В дальнейшем, следуя [7], будем считать, что с. п. X сепарабельно или максимально.

Для любого с. п. X на $[0, \infty)$ справедливы непрерывные вложения

$$L_1 \cap L_\infty \subseteq X \subseteq L_1 + L_\infty.$$

Через X_0 далее будет обозначаться замыкание $L_1 \cap L_\infty$ в X ; это множество называют *сепарабельной частью* пространства X . Если $X \neq L_1 \cap L_\infty$, то X_0 сепарабельно.

Если X — с. п., то функция $\varphi_X(t) := \|\chi_A\|_X$, где $A \subset (0, \infty)$, $\lambda(A) = t$, а χ_A — характеристическая функция этого множества, называется *фундаментальной функцией* X . Другой важной характеристикой с. п. являются его индексы Бойда. Напомним их определение в случае пространств на $[0, \infty)$. Если $\tau > 0$, то оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau)$ ограничен в любом с. п. X и $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ ($\tau > 0$) [14, теорема 2.4.4]. Числа

$$\alpha_X := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_X := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда* пространства X ; всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$.

Функция растяжения положительной функции $\psi(t)$, $t \in (0, \infty)$, определяется соотношением

$$M_\psi(s) = \sup_{t>0} \frac{\psi(st)}{\psi(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

При этом числа

$$\gamma_\psi = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln M_\psi(s)}{\ln s} \quad \text{и} \quad \delta_\psi = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln M_\psi(s)}{\ln s}$$

называются *нижним и верхним показателями растяжения* функции $\psi(t)$. Если ψ квазивогнута, т.е. $\psi(t)$ возрастает, а функция $\psi(t)/t$ убывает при $t > 0$, то $0 \leq \gamma_\psi \leq \delta_\psi \leq 1$ [14, с. 76].

Важными примерами с. п. являются L_p -пространства ($1 \leq p \leq \infty$), а также их обобщение — пространства Орлича. Пусть Φ — функция Орлича на $[0, \infty)$, т.е. Φ — непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. *Пространство Орлича* L_Φ на полуоси состоит из всех функций f , измеримых на $[0, \infty)$, для которых конечна норма $\|f\|_{L_\Phi} = \inf\{\rho > 0 : \int_0^\infty \Phi(|f(t)|/\rho) dt \leq 1\}$.

Другой класс с. п., рассматриваемый во второй части этой работы — степенные пространства Лоренца. Пусть $1 \leq q < \infty$, а ψ — положительная функция на $(0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (а) показатели растяжения ψ нетривиальны, т.е. $0 < \gamma_\psi \leq \delta_\psi < 1$;
- (б) функция $\psi(t)^q/t$ убывает.

Пространство Лоренца $\Lambda_q(\psi)$ состоит из всех измеримых на $(0, \infty)$ функций $x(t)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda_q(\psi)} := \left(\int_0^\infty x^*(t)^q \psi(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty. \quad (2.1)$$

Это сепарабельное с. п., для которого, как легко проверить, индексы Бойда совпадают с соответствующими показателями растяжения функции ψ , т.е. $\alpha_{\Lambda_q(\psi)} = \gamma_\psi$, $\beta_{\Lambda_q(\psi)} = \delta_\psi$. Кроме того, ввиду нетривиальности показателей растяжения ψ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте [14, следствие 2.1.2], и, значит, мы можем считать, что эта функция квазивогнута. Подробнее о с. п. см. монографии [14, 7] и [15].

В заключение приведем обозначения и определения, которые будут использоваться в доказательстве теоремы 5. Пусть E — пространство комплекснозначных последовательностей, в котором канонические орты e_n ($n \in \mathbb{N}$) образуют симметричный базис. Всюду далее $c_{0,0}$ — множество всех финитных последовательностей, т.е. $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_{0,0}$, если для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $x_n = 0$. Для произвольных векторов $x = (x_n), y = (y_n) \in c_{0,0}$ через $x \oplus y$ будет обозначаться их дизъюнктивная сумма. Под ней понимается вектор из $c_{0,0}$, все ненулевые координаты которого совпадают со всеми ненулевыми координатами векторов x и y , взятыми в произвольном порядке. Например, если $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$, то дизъюнктивная сумма $x \oplus y$ может быть определена так:

$$x \oplus y = \sum_{n=1}^{n_0} x_n e_n + \sum_{n=n_0+1}^\infty y_{n-n_0} e_n.$$

Заметим, что ввиду симметричности базиса $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ в E норма $\|x \oplus y\|_E$ не зависит от способа задания вектора $x \oplus y$.

Будем говорить, что вектор x *заменяем* (ε -*заменяем*) вектором y , если для произвольных $u, v \in c_{0,0}$ выполнено

$$\|u \oplus x \oplus v\|_E = \|u \oplus y \oplus v\|_E$$

(соответственно

$$|\|u \oplus x \oplus v\|_E - \|u \oplus y \oplus v\|_E| < \varepsilon).$$

Все банаховы пространства рассматриваются над полем комплексных чисел. Выражение $f \asymp g$ означает, что $cf \leq g \leq Cf$ для некоторых констант $c > 0$ и $C > 0$, не зависящих от всех или части аргументов функций (квазинорм) f и g .

§3. Характеризация множества $\mathcal{F}(X)$ для с. п. на полуоси

Доказательство теоремы 5. Заметим, прежде всего, что оператор T ограничен в X и $1 \leq \|T\|_{X \rightarrow X} \leq 2$ (см. предыдущий параграф).

Пусть сначала $p \in \mathcal{F}(X)$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такой набор дизъюнктивных равноизмеримых функций $\{x_k\}_{k=1}^{2^n}$ (т.е. $\text{supp } x_i \cap \text{supp } x_j = \emptyset$ ($i \neq j$)) и $n_{x_k}(\tau) = n_{x_1}(\tau)$ для всех $\tau > 0$ и $k = 1, 2, \dots, 2^n$), что

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |a_k|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^n} a_k x_k \right\|_X \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{2^n} |a_k|^p \right)^{1/p} \quad (3.1)$$

(предполагаем далее, что $p < \infty$; случай $p = \infty$ рассматривается аналогично). Рассмотрим функции

$$y_0 := x_1, \quad y_s := \sum_{i=2^{s-1}+1}^{2^s} x_i \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Они также дизъюнктивны и, кроме того,

$$n_{y_s}(\tau) = 2^{s-1} n_{y_0}(\tau) \quad (\tau > 0), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Так как пространство X сепарабельно и симметрично, то аппроксимацией можно всегда добиться того, чтобы $\text{supp } y_0 = \text{supp } x_1 \subset [0, A]$ для некоторого $A > 0$. Тогда, если

$$z_0(t) := y_0^*(t), \quad z_s(t) := z_0(2^{1-s}t - A) \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

то $\text{supp } z_s \subset [2^{s-1}A, 2^sA]$ ($s = 1, 2, \dots, n$) (в частности, z_s дизъюнктивны) и ввиду (3.2) $n_{z_s}(\tau) = n_{y_s}(\tau) = 2^{s-1} n_{y_0}(\tau)$ ($\tau > 0$). Поэтому ввиду симметричности X

$$\left\| \sum_{s=1}^n b_s z_s \right\|_X = \left\| \sum_{s=1}^n b_s y_s \right\|_X \quad (3.3)$$

для произвольных $b_s \in \mathbb{C}$.

Из определения y_s и соотношения (3.1) следует

$$\frac{1}{2} 2^{(s-1)/p} \leq \|y_s\|_X \leq 2 \cdot 2^{(s-1)/p} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} n^{1/p} \leq \left\| \sum_{s=1}^n 2^{(1-s)/p} y_s \right\|_X \leq 2 n^{1/p},$$

откуда ввиду (3.3) для функций $\bar{z}_s(t) := 2^{(1-s)/p} z_s(t)$ получаем

$$\frac{1}{2} \leq \|\bar{z}_s\|_X \leq 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} n^{1/p} \leq \left\| \sum_{s=1}^n \bar{z}_s \right\|_X \leq 2 n^{1/p}. \quad (3.4)$$

Поэтому если

$$v_n(t) := n^{-1/p} \sum_{s=1}^n \bar{z}_s(t) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то

$$\frac{1}{2} \leq \|v_n\|_X \leq 2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

Кроме того, так как ввиду определения $\bar{z}_s$ справедливо равенство $\bar{z}_s(t/2) = 2^{1/p} \bar{z}_{s+1}(t)$ ($s = 1, 2, \dots, n-1$), то для оператора $T_\lambda := T - \lambda I$, где I — тождественный оператор, в случае $\lambda = 2^{1/p}$ выполнено

$$\begin{aligned} T_\lambda v_n(t) &= n^{-1/p} \left(\sum_{s=1}^n \bar{z}_s(t/2) - \lambda \sum_{s=1}^n \bar{z}_s(t) \right) \\ &= n^{-1/p} \left(2^{1/p} \sum_{s=1}^{n-1} \bar{z}_{s+1}(t) + \bar{z}_n(t/2) - 2^{1/p} \sum_{s=1}^n \bar{z}_s(t) \right) \\ &= n^{-1/p} \left(\bar{z}_n(t/2) - 2^{1/p} \bar{z}_1(t) \right). \end{aligned}$$

Тем самым, учитывая первое неравенство в (3.4), получаем $\|T_\lambda v_n\|_X \leq 8n^{-1/p}$, и значит, $\|T_\lambda v_n\|_X \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если $\bar{v}_n := v_n/\|v_n\|$, то из (3.5) следует $\|T_\lambda \bar{v}_n\|_X \rightarrow 0$, и, таким образом, $\lambda = 2^{1/p}$ — аппроксимативное собственное значение оператора T .

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Начнем с некоторых обозначений. Для любых $n = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$ определим промежутки $\Delta_k^n = [2^{-n}(k-1), 2^{-n}k)$, а также функции

$$f_k^n := \frac{1}{\varphi_X(2^{-n})} \cdot \chi_{\Delta_k^n}, \quad \text{где } \varphi_X(2^{-n}) = \|\chi_{\Delta_1^n}\|_X.$$

Кроме того, пусть X_n — линейная оболочка множества $\{f_k^n\}_{k=1}^\infty$, а U — линейное отображение c_{00} в X_n такое, что $Ue_k = f_k^n$ ($k = 1, 2, \dots$). Для данного с. п. X и произвольного $n \in \mathbb{N}$ определим на c_{00} норму $\|a\|_{E_n} := \|Ua\|_X$. Пополнение c_{00} относительно этой нормы, очевидно, будет с. п. последовательностей E_n , в котором $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — нормированный симметричный базис.

Заметим, что для любых $n = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$

$$Tf_k^n = \frac{1}{\varphi_X(2^{-n})} \cdot (\chi_{\Delta_{2k-1}^n} + \chi_{\Delta_{2k}^n}) = f_{2k-1}^n + f_{2k}^n.$$

Поэтому если $a = \sum a_k e_k \in c_{00}$, то ввиду симметричности базисной последовательности $\{f_k^n\}_{k=1}^\infty$ в X для произвольных $b \in c_{00}$ и $d \in c_{00}$ мы

имеем

$$\begin{aligned}
 \|b \oplus a \oplus a \oplus d\|_{E_n} &= \|Ub \oplus Ua \oplus Ua \oplus Ud\|_X \\
 &= \|Ub \oplus \sum a_k(f_{2k-1}^n + f_{2k}^n) \oplus Ud\|_X \\
 &= \|Ub \oplus T Ua \oplus Ud\|_X.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Пусть λ — аппроксимативное собственное значение оператора T , а $\{g_l\}_{l=1}^\infty \subset X$, $\|g_l\| = 1$ ($l = 1, 2, \dots$) — соответствующий собственный вектор. Так как X сепарабельно, то, не ограничивая общности, можно считать, что $g_l \in X_{n_l}$ для некоторых $n_1 < n_2 < \dots$ и

$$\|Tg_l - \lambda g_l\|_X \leq \frac{1}{l} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Покажем, что вектор $U^{-1}g_l \oplus U^{-1}g_l$ $1/l$ -заменяем вектором $\lambda U^{-1}g_l$ в пространстве E_{n_l} . Действительно, при надлежащем определении дизъюнктивных сумм для произвольных $b, d \in c_{00}$ ввиду (3.6) и предыдущего неравенства

$$\begin{aligned}
 &| \|b \oplus U^{-1}g_l \oplus U^{-1}g_l \oplus d\|_{E_{n_l}} - \|b \oplus \lambda U^{-1}g_l \oplus d\|_{E_{n_l}} | \\
 &= \| \|Ub \oplus Tg_l \oplus Ud\|_X - \|Ub \oplus \lambda g_l \oplus Ud\|_X \| \\
 &\leq \|Tg_l - \lambda g_l\|_X \leq \frac{1}{l}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для каждого $l \in \mathbb{N}$ введем теперь новое пространство последовательностей F_l , являющееся пополнением c_{00} относительно нормы

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j e_j \right\|_{F_l} := \|a_1 U^{-1}g_l \oplus a_2 U^{-1}g_l \oplus \dots \oplus a_m U^{-1}g_l\|_{E_{n_l}} \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{3.8}$$

Ясно, что последовательность ортов $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ в F_l изометрична последовательности дизъюнктивных функций в X_{n_l} , равноизмеримых с g_l .

Запишем все векторы из c_{00} с рациональными координатами произвольным образом в виде последовательности $(a_1^{(k)}, \dots, a_{r_k}^{(k)})_{k=1}^\infty$ и сконструируем такое убывающее семейство $(l_i^k)_{i=1}^\infty$ ($k = 1, 2, \dots$) бесконечных последовательностей натуральных чисел, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ следующий предел:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \sum_j a_j^{(m)} e_j \right\|_{F_{l_i^k}}$$

существует для всех $1 \leq m \leq k$. С помощью стандартной диагональной процедуры выберем затем подпоследовательность $(l_s)_{s=1}^\infty$, содержащуюся в каждой из подпоследовательностей $(l_i^k)_{i=1}^\infty$ с точностью до конечного

множества. Используя обычные аргументы, основанные на всюду плотности множества рациональных чисел во множестве действительных, нетрудно проверить, что предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\| \sum_j a_j e_j \right\|_{F_{l_s}}$$

существует для произвольных $a = (a_j) \in c_{00}$. Поэтому мы можем определить на c_{00} новую норму $\|a\|_F$, равную этому пределу. Пополнение c_{00} относительно нее обозначим через F . Из определения, а также [5, лемма 11.1.11] ясно, что для любых $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ существует такое $s_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $s \geq s_0$ и произвольных $a_j \in \mathbb{C}$

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \left\| \sum_{j=1}^m a_j e_j \right\|_{F_{l_s}} \leq \left\| \sum_{j=1}^m a_j e_j \right\|_F \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{j=1}^m a_j e_j \right\|_{F_{l_s}}. \quad (3.9)$$

Покажем, что сумма $e_1 + e_2$ заменяема в пространстве F вектором λe_1 . Действительно, пусть $b, d \in c_{00}$ произвольны. Из соотношений (3.7) и (3.8) следует, что для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left| \|b \oplus e_1 + e_2 \oplus d\|_{F_{l_s}} - \|b \oplus \lambda e_1 \oplus d\|_{F_{l_s}} \right| \\ &= \left| \|b' \oplus U^{-1}g_l \oplus U^{-1}g_l \oplus d'\|_{E_{n_{l_s}}} - \|b' \oplus \lambda U^{-1}g_l \oplus d'\|_{E_{n_{l_s}}} \right| \leq \frac{1}{l_s}. \end{aligned}$$

Поэтому ввиду (3.9) для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left| \|b \oplus e_1 + e_2 \oplus d\|_F - \|b \oplus \lambda e_1 \oplus d\|_F \right| \\ & \leq \left| \|b \oplus e_1 + e_2 \oplus d\|_{F_{l_s}} - \|b \oplus \lambda e_1 \oplus d\|_{F_{l_s}} \right| \\ & \quad + \delta (\|b \oplus e_1 + e_2 \oplus d\|_F + \|b \oplus \lambda e_1 \oplus d\|_F) \\ & \leq \frac{1}{l_s} + \delta (\|b \oplus e_1 + e_2 \oplus d\|_F + \|b \oplus \lambda e_1 \oplus d\|_F). \end{aligned}$$

Так как правая часть в последнем неравенстве может быть сделана сколь угодно малой, то отсюда

$$\|u \oplus e_1 + e_2 \oplus v\|_F = \|u \oplus \lambda e_1 \oplus v\|_F.$$

Если теперь $\lambda = 1$, то $\|e_1 + e_2 + \dots + e_n\|_F = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), и тогда F изометрично c_0 . Кроме того, ввиду (3.6), (3.8) и (3.9) для произвольных $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ в X существует такой набор дизъюнктивных равноизмеримых функций $w_1, w_2, \dots, w_n$, что для произвольных $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

выполнено

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_F \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k w_k \right\|_X \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|_F. \quad (3.10)$$

Тем самым $p = \infty \in \mathcal{F}(X)$.

Предположим, что $1 < \lambda \leq 2$, т.е. $\lambda := 2^{1/p}$, где $1 \leq p < \infty$. Тогда ввиду лемм 11.3.11 и 11.3.12(ii) из [5] существует последовательность $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset c_{00}$, $\|b_n\|_F = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) такая, что векторы $b_n \oplus b_n$ и $b_n \oplus b_n \oplus b_n$ $1/n$ -заменяемы в этом пространстве векторами $2^{1/p}b_n$ и $3^{1/p}b_n$ соответственно. Применяя процедуру, совершенно аналогичную той, что была использована при переходе от E_{n_i} к F , получим пространство G , в котором векторы $e_1 + e_2$ и $e_1 + e_2 + e_3$ будут уже просто заменяемы векторами $2^{1/p}e_1$ и $3^{1/p}e_1$ соответственно. Но тогда G изометрично пространству l_p [5, лемма 11.3.11]. Как и ранее, для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ в X существует такой набор дизъюнктивных равноизмеримых функций, что для ортов $\{e_k\}_{k=1}^n$ в G и произвольных $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ выполнено соотношение, аналогичное (3.10). Это означает, что $p \in \mathcal{F}(X)$, и теорема доказана. $\square$

Утверждение, аналогичное следующему (но только для оператора, обратного к оператору T_λ), есть в работе [16] (см. теорему 3.2).

Предложение 1. Пусть X — с. п. на $[0, \infty)$ с индексами Бойда α_X и β_X . Тогда оператор $T_\lambda = T - \lambda I$, где по-прежнему $Tx(t) := x(t/2)$, является изоморфизмом в X , если $|\lambda| \notin [2^{\alpha_X}, 2^{\beta_X}]$.

Доказательство. Пусть $|\lambda| > 2^{\beta_X}$. Предположим, что уравнение $T_\lambda x = y$ или эквивалентно

$$x(t/2) - \lambda x(t) = y(t) \quad (t > 0) \quad (3.11)$$

с произвольно заданной $y = y(t) \in X$ имеет решение $x = x(t) \in X$. Тогда

$$\lambda^{-1}x(t/2^2) - x(t/2) = \lambda^{-1}y(t/2).$$

Суммируя два последних равенства, получим

$$\lambda^{-1}x(t/2^2) - \lambda x(t) = y(t) + \lambda^{-1}y(t/2),$$

откуда

$$x(t) = -\lambda^{-1}(y(t) + \lambda^{-1}y(t/2)) + \lambda^{-2}x(t/2^2).$$

Действуя аналогичным образом и далее, придем к равенству

$$x(t) = -\sum_{k=1}^n \lambda^{-k} y(2^{-k+1}t) + \lambda^{-n} x(2^{-n}t) \quad (t > 0), \quad (3.12)$$

верному для любого $n \in \mathbb{N}$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2^{\beta_X + \varepsilon} < |\lambda|$. Так как по определению индексов Бойда

$$\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq C\tau^{\beta_X + \varepsilon} \quad (\tau \geq 1),$$

то

$$\|x(2^{-n}t)\|_X \leq C2^{n(\beta_X + \varepsilon)}\|x\|_X.$$

Поэтому

$$\|\lambda^{-n}x(2^{-n}t)\|_X \leq C(|\lambda|^{-1}2^{\beta_X + \varepsilon})^n\|x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и, значит, ввиду (3.12)

$$x(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} y(2^{-k+1}t) \quad (t > 0). \quad (3.13)$$

Таким образом, если решение $x \in X$ уравнения (3.11) существует, то оно представимо в виде (3.13) (заметим, что условие $|\lambda| > 2^{\beta_X}$ гарантирует абсолютную сходимость ряда из правой части (3.13)). С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что функция (3.13) — решение уравнения (3.11). В итоге это уравнение имеет единственное решение $x \in X$ для произвольной правой части $y \in X$. Тем самым оператор $T_\lambda : X \rightarrow X$ — изоморфизм.

Случай $|\lambda| < 2^{\alpha_X}$ рассматривается совершенно аналогично. $\square$

Из только что доказанного утверждения, а также теоремы 5 получаем

Следствие 1. *Спектр $\sigma(T)$ оператора T лежит внутри кольца $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \in [2^{\alpha_X}, 2^{\beta_X}]\}$, а множество $\mathcal{F}(X)$ — внутри отрезка $[1/\beta_X, 1/\alpha_X]$.*

Покажем, что все точки границы этого кольца являются аппроксимативными собственными значениями оператора T .

Теорема 6. *Если α_X и β_X — индексы Бойда с. п. X , то любое такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что $|\lambda| = 2^{\beta_X}$ или $|\lambda| = 2^{\alpha_X}$, является аппроксимативным собственным значением оператора T . В частности, его спектральный радиус $r(T) = 2^{\beta_X}$.*

Доказательство. Пусть сначала $\lambda = 2^{\beta_X}$. Из определения индексов Бойда [14, с. 75 и с. 134] следует, что

$$\beta_X = \inf_{\tau \geq 1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Поэтому

$$\|T^n\|_{X \rightarrow X} = \|\sigma_{2^n}\|_{X \rightarrow X} \geq 2^{n\beta_X} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (3.14)$$

и мы можем применить рассуждения, аналогичные тем, что используются при доказательстве леммы 11.3.12 в [5]. Приведем их для полноты изложения.

Учитывая (3.14), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(n+1)2^{-n\beta_X} T^n\|_{X \rightarrow X} = \infty,$$

и, значит, ввиду принципа равномерной ограниченности существует $f_0 \in X$, $\|f_0\|_X = 1$ такая, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(n+1)2^{-n\beta_X} T^n f_0\|_X = \infty. \quad (3.15)$$

Очевидно, что функцию f_0 можно считать неотрицательной.

По следствию 1 оператор $T - rI$ обратим в X , если $r > 2^{\beta_X}$. Следовательно, оператор $(T - rI)^{-2}$ можно представить в виде суммы сходящегося ряда:

$$(T - rI)^{-2} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^{-n} T^n.$$

Так как $f_0 \geq 0$ и $T \geq 0$, то отсюда для каждого $r > 2^{\beta_X}$ и всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|(T - rI)^{-2} f_0\|_X \geq r^{-2} \|(n+1)r^{-n} T^n f_0\|_X,$$

и, значит, ввиду (3.15)

$$\lim_{r \rightarrow 2^{\beta_X}} \|(T - rI)^{-2} f_0\|_X = \infty.$$

Тем самым существует такая последовательность $\{r_n\}$, что $r_n \rightarrow 2^{\beta_X}$ и либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - r_n I)^{-1} f_0\|_X = \infty,$$

либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|(T - r_n I)^{-2} f_0\|_X}{\|(T - r_n I)^{-1} f_0\|_X} = \infty.$$

В каждом из этих случаев нетрудно найти такую последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\|g_n\|_X = 1$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - r_n I)g_n\|_X = 0,$$

откуда, конечно, сразу следует, что 2^{β_X} — аппроксимативное собственное значение оператора T .

Если $\lambda = 2^{\alpha_X}$, то опять ввиду [14, с. 75 и с. 134]

$$\alpha_X = \sup_{0 < \tau \leq 1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau},$$

откуда для оператора $T^{-1}f(t) = f(2t)$ выполнено

$$\|(T^{-1})^n\|_{X \rightarrow X} = \|\sigma_{2^{-n}}\|_{X \rightarrow X} \geq 2^{-n\alpha_X} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Далее, рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, получим, что $2^{-\alpha_X}$ — аппроксимативное собственное значение оператора $T^{-1} = \sigma_{1/2}$, т.е. для некоторой последовательности $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\|h_n\|_X = 1$, мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T^{-1} - 2^{-\alpha_X} I)h_n\|_X = 0.$$

Так как $1/2 \leq \|T^{-1}h_n\|_X \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. §2) и для $g_n := T^{-1}h_n / \|T^{-1}h_n\|$ справедливо равенство

$$\|(T - 2^{\alpha_X} I)g_n\|_X = \frac{2^{\alpha_X}}{\|T^{-1}h_n\|} \|(T^{-1} - 2^{-\alpha_X} I)h_n\|_X,$$

то 2^{α_X} — аппроксимативное собственное значение оператора T .

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{C}$ и, например, $|\lambda| = 2^{\beta_X}$. Тогда $\lambda = 2^{\beta_X} e^{i\theta}$ для некоторого $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Если $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ — аппроксимативный собственный вектор, соответствующий значению 2^{β_X} , то, как легко проверить, последовательность функций $f_n(t) := t^{-i\theta \log_2 e} g_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$) удовлетворяет равенству

$$(T - \lambda I)f_n = e^{i\theta} (T - 2^{\beta_X} I)g_n.$$

Так как $\|f_n\|_X = \|g_n\|_X = 1$, то отсюда следует, что λ — аппроксимативное собственное значение оператора T . Совершенно аналогично рассматривается случай, когда $|\lambda| = 2^{\alpha_X}$.

Так как 2^{β_X} — аппроксимативное собственное значение оператора T , то $2^{\beta_X} \in \sigma(T)$, и второе утверждение теоремы вытекает из определения спектрального радиуса оператора и следствия 1. $\square$

Покажем, что теорема 4 в случае с. п. на полуоси является непосредственным следствием полученных результатов (напомним, что ее формулировка без доказательства приведена в [7, теорема 2.b.6]).

Доказательство теоремы 4. Если пространство X сепарабельно, то утверждение вытекает из теорем 5, 6 и следствия 1. Иначе, X максимально. Легко проверить, что тогда для каждого $\tau > 0$ $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} = \|\sigma_\tau\|_{X_0 \rightarrow X_0}$, где X_0 — сепарабельная часть X (см. §2). Поэтому $\alpha_X = \alpha_{X_0}$ и $\beta_X = \beta_{X_0}$. Если $X \neq L_1 \cap L_\infty$, то X_0 сепарабельно, и значит, $\max \mathcal{F}(X_0) = 1/\alpha_X$, а $\min \mathcal{F}(X_0) = 1/\beta_X$. Так как X_0 — подпространство X , то отсюда с учетом следствия 1 вытекает утверждение теоремы. В случае, когда $X = L_1 \cap L_\infty$, результат очевиден. $\square$

Теоремы 5 и 6 позволяют получить полное описание множества $\mathcal{F}(X)$ в том случае, когда X — степенное пространство Лоренца. Так как существенную роль при этом будут играть результаты работы [13], начнем с их описания.

§4. О замкнутости оператора S_λ в весовом l_q -пространстве

Пусть числовая последовательность $\mu = (\mu_k)_{k=-\infty}^\infty$ удовлетворяет условиям

$$0 < \mu_k \leq \mu_{k+1} \leq 2\mu_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.1)$$

а $l_q(\mu)$ — весовое l_q -пространство с нормой

$$\|(a_k)\|_{l_q(\mu)} := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q \mu_k^q \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty).$$

Кроме того, для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ положим $S_\lambda = S - \lambda I$, где $S(a_k) := (a_{k-1})$ — оператор сдвига, а I — тождественный оператор. Тогда S_λ линейен и ограничен в пространстве $l_q(\mu)$.

Работа [13] посвящена в основном изучению вещественного метода интерполяции на подпарах коразмерности один, порожденных линейным функционалом, ограниченным на пересечении пространств исходной банаховой пары. В качестве приложения там получено полное решение вопроса о том, когда образ оператора S_λ замкнут в пространстве $l_q(\mu)$ в случае, если весовая последовательность $\mu = (\mu_k)_{k=-\infty}^\infty$ удовлетворяет условиям (4.1) (под замкнутостью оператора здесь и далее, как обычно, понимается замкнутость его образа). Для формулировки результата нам понадобится ряд определений и обозначений.

Для данной квазивогнутой на $(0, \infty)$ функции $\psi(t)$ рассмотрим три функции растяжения

$$M(t) = \sup_{s>0} \frac{\psi(ts)}{\psi(s)}, \quad M_0(t) = \sup_{0<s \leq \min(1, 1/t)} \frac{\psi(ts)}{\psi(s)}, \quad M_\infty(t) = \sup_{s \geq \max(1, 1/t)} \frac{\psi(ts)}{\psi(s)}.$$

Они полумультимпликативны на $(0, \infty)$, и, значит, можно определить следующие шесть чисел:

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \quad \alpha_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \quad \alpha_\infty = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \quad \beta_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \quad \beta_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

которые называются *показателями растяжения* функции ψ (заметим, что α и β совпадают соответственно с показателями α_ψ и β_ψ , определенными в §2). Легко видеть, что $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \beta \leq 1$ и $0 \leq \alpha \leq$

$\alpha_\infty \leq \beta_\infty \leq \beta \leq 1$. Кроме того, $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_\infty)$ и $\beta = \max(\beta_0, \beta_\infty)$ [13, лемма 1]. Пусть $\mu_k := \psi(2^k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как функция ψ квазивогнута, то μ_k удовлетворяют условию (4.1). Кроме того, введенные ранее показатели растяжения можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{n+k}}, & \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}}, \\ \alpha_0 &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \leq 0} \frac{\mu_{k-n}}{\mu_k}, & \beta_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \leq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}}, \\ \alpha_\infty &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{n+k}}, & \beta_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \geq 0} \frac{\mu_{k+n}}{\mu_k}.\end{aligned}$$

Поэтому, применяя [13, теорема 5 и предложение 2], получаем следующее утверждение (мы формулируем его здесь в несколько более общем, но эквивалентном виде).

Теорема 7. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $1 \leq q < \infty$. Тогда оператор S_λ замкнут в $l_q(\mu)$, если и только если

$$|\lambda| \in [0, 2^\alpha) \cup (2^{\beta_0}, 2^{\alpha_\infty}) \cup (2^{\beta_\infty}, 2^{\alpha_0}) \cup (2^\beta, \infty).$$

Кроме того, если $|\lambda| \in [0, 2^\alpha) \cup (2^{\beta_\infty}, 2^{\alpha_0}) \cup (2^\beta, \infty)$, то $\text{Im } S_\lambda = l_q(\mu)$; если $|\lambda| \in (2^{\beta_0}, 2^{\alpha_\infty})$, то $\text{Im } S_\lambda$ — замкнутое подпространство пространства $l_q(\mu)$ коразмерности один. Оператор S_λ обратим тогда и только тогда, когда $|\lambda| \in [0, 2^\alpha) \cup (2^\beta, \infty)$. Если $|\lambda| \in (2^{\beta_0}, 2^{\alpha_\infty})$, то он инъективен, а если $|\lambda| \in (2^{\beta_\infty}, 2^{\alpha_0})$, то не инъективен.

Заметим, что ранее более слабый результат, использующий лишь четыре показателя растяжения, был получен в [17].

В следующем параграфе мы применим теорему 7, чтобы получить аналогичный результат для оператора растяжения в степенном пространстве Лоренца.

§5. Описание множества $\mathcal{F}(X)$ для пространств Лоренца

Пусть $1 \leq q < \infty$, ψ — положительная функция на $(0, \infty)$, удовлетворяющая условиям (а) и (б) из §2, а $\Lambda_q(\psi)$ — пространство Лоренца, норма которого определяется соотношением (2.1). Как уже говорилось, это сепарабельное с. п., индексы Бойда которого совпадают с соответствующими показателями растяжения функции ψ , т.е. $\alpha_{\Lambda_q(\psi)} = \gamma_\psi$, $\beta_{\Lambda_q(\psi)} = \delta_\psi$. Кроме того, ввиду условия (а) функцию ψ можно считать квазивогнутой.

Пусть $\Delta_k := [2^k, 2^{k+1})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и для произвольной последовательности комплексных чисел $a = (a_k)_{k=1}^\infty$

$$h_a(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_k}(t).$$

Тогда ввиду [18, предложение 5.1(2)]

$$\|h_a\|_{\Lambda_q(\psi)} \asymp \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q \int_{\Delta_k} \psi(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

с константами, не зависящими от последовательности (a_k) . Так как ψ квазивогнута, то

$$\int_{\Delta_k} \psi(t)^q \frac{dt}{t} \asymp \psi(2^k)^q \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда

$$\|h_a\|_{\Lambda_q(\psi)} \asymp \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^q \psi(2^k)^q \right)^{1/q}$$

с константами, зависящими лишь от ψ и q . Таким образом, если $\mu_k = \psi(2^k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то в обозначениях предыдущего параграфа

$$\|h_a\|_{\Lambda_q(\psi)} \asymp \|(a_k)\|_{l_q(\mu)}, \quad (5.1)$$

т.е. пространство $l_q(\mu)$ изоморфно подпространству $[\chi_{\Delta_k}]$, порожденному в $\Lambda_q(\psi)$ системой характеристических функций двоичных промежутков.

Пусть, как и ранее, $Tx(t) = x(t/2)$ и $T_\lambda := T - \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), где I — тождественный оператор в $\Lambda_q(\psi)$. Покажем, что между операторами T_λ и $S_\lambda = S - \lambda I$ (см. §4) существует простая связь. Во-первых, для произвольной последовательности (a_k)

$$\begin{aligned} T_\lambda h_a(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_k}(t/2) - \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_k}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_{k+1}}(t) - \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_k}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (S_\lambda a)_k \chi_{\Delta_k}(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отсюда, в частности, ввиду (5.1) получаем

$$\|T_\lambda h_a\|_{\Lambda_q(\psi)} \asymp \|S_\lambda a\|_{l_q(\mu)}. \quad (5.3)$$

В дальнейшем нам также понадобится следующее утверждение.

Предложение 2. Для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо следующее:

- (i) T_λ инъективен тогда и только тогда, когда S_λ инъективен;
- (ii) если T_λ замкнут, то замкнут и S_λ ;
- (iii) если S_λ инъективен и замкнут, то и T_λ замкнут.

Доказательство. Прежде всего, покажем, что оба утверждения предложения достаточно доказать в случае, когда $\lambda \geq 0$. Действительно, пусть $\lambda = |\lambda| \cdot e^{i\theta}$, где $\theta \in [0, 2\pi]$. Для каждой функции $x \in \Lambda_q(\psi)$ определим функцию $y(t) = t^{-i\theta \log_2 e} \cdot x(t)$. Тогда $y \in \Lambda_q(\psi)$, $\|y\|_{\Lambda_q(\psi)} = \|x\|_{\Lambda_q(\psi)}$ и

$$T_\lambda y(t) = t^{-i\theta \log_2 e} 2^{i\theta \log_2 e} x(t/2) - t^{-i\theta \log_2 e} \lambda x(t) = t^{-i\theta \log_2 e} e^{i\theta} T_{|\lambda|} x(t).$$

Отсюда $\|T_\lambda y\|_{\Lambda_q(\psi)} = \|T_{|\lambda|} x\|_{\Lambda_q(\psi)}$, и поэтому оператор T_λ инъективен (замкнут) тогда и только тогда, когда инъективен (замкнут) оператор $T_{|\lambda|}$.

Аналогичное утверждение справедливо и для операторов S_λ и $S_{|\lambda|}$. В этом случае, если $a = (a_k) \in l_q(\mu)$, а $b = (b_k)$, $b_k := a_k e^{-i\theta k}$, то опять $b \in l_q(\mu)$ и $\|b\|_{l_q(\mu)} = \|a\|_{l_q(\mu)}$. Кроме того,

$$(S_\lambda b)_k = a_{k-1} e^{-i\theta k} e^{i\theta} - \lambda a_k e^{-i\theta k} = e^{-i\theta(k-1)} (S_{|\lambda|} a)_k,$$

а значит, $\|S_\lambda b\|_{l_q(\mu)} = \|S_{|\lambda|} a\|_{l_q(\mu)}$, откуда и вытекает нужное утверждение.

(i) То, что из инъективности T_λ вытекает инъективность S_λ , является непосредственным следствием соотношения (5.3). Так как операторы T и S инъективны, то обратное утверждение достаточно получить в случае, когда $\lambda > 0$.

Предположим, что $x \in \Lambda_q(\psi)$, $x \neq 0$ и $T_\lambda x = 0$. Так как $|T_\lambda x| \geq ||x(t/2)| - \lambda|x(t)||$, то можно считать функцию $x(t)$ неотрицательной. Из равенства

$$x(t/2) = \lambda \cdot x(t), \quad (5.4)$$

выполненного для всех $t > 0$, кроме, быть может, множества меры нуль, следует, что

$$\int_{\Delta_k} x(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\Delta_k} x(t/2) dt = \frac{2}{\lambda} \int_{\Delta_{k-1}} x(t) dt$$

или

$$\int_{\Delta_k} x(t) dt = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^k \int_{\Delta_0} x(t) dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Так как пространство $\Lambda_q(\psi)$ сепарабельно, то оно интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞) [14, следствие из теоремы 2.4.10]. Поэтому оператор усреднения

$$Qy(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \int_{\Delta_k} y(s) ds \cdot \chi_{\Delta_k}(t) \quad (5.5)$$

ограничен в $\Lambda_q(\psi)$ [14, с. 111], откуда ввиду (5.1) последовательность $a(x) := (2^{-k} \int_{\Delta_k} x(s) ds)_{k=-\infty}^{\infty}$ принадлежит пространству $l_q(\mu)$. Тем самым из предыдущего соотношения следует, что последовательность $a = (a_k)$, где $a_k := \lambda^{-k} \int_{\Delta_0} x(s) ds$, также принадлежит этому пространству. Одновременно, как легко проверить, $S_\lambda a = 0$. Так как $x \geq 0$ и $x \neq 0$, то, учитывая соотношение (5.4), получаем отсюда, что $a \neq 0$. Поэтому оператор S_λ неинъективен, и утверждение (i) доказано.

(ii) Если $a^n = (a_k^n)_{k=-\infty}^{\infty} \in l_q(\mu)$ ($n = 1, 2, \dots$) и $S_\lambda a^n \rightarrow b = (b_k)$ в $l_q(\mu)$, то из (5.3) следует, что последовательность функций $\{T_\lambda h_{a^n}\}$ фундаментальна в $\Lambda_q(\psi)$. Поэтому по условию $T_\lambda h_{a^n} \rightarrow y := T_\lambda x$, где $x \in \Lambda_q(\psi)$. При этом ввиду (5.2) $y = h_b$.

Далее, рассуждая точно так же, как при выводе равенства (5.2), получим

$$x(t) = T_\lambda^{-1} h_b(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (S_\lambda^{-1} b)_k \chi_{\Delta_k}(t), \quad (5.6)$$

где $S_\lambda^{-1} b = (b_{k+1} - \lambda^{-1} b_k)_k$. Так как $x \in \Lambda_q(\psi)$, то из соотношения (5.1) следует, что $c := (S_\lambda^{-1} b)_k \in l_q(\mu)$. Таким образом, $b = S_\lambda c$, т.е. $b \in \text{Im } S_\lambda$. Следовательно, оператор S_λ замкнут.

(iii) Предположим, что оператор T_λ незамкнут. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset \Lambda_q(\psi)$ со следующими свойствами:

$$\|x_n\|_{\Lambda_q(\psi)} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad \|T_\lambda x_n\|_{\Lambda_q(\psi)} \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

Так как пространство $\Lambda_q(\psi)$ интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞) , то ввиду [14, лемма 2.4.6]

$$\|T_\lambda x_n\| \geq \|x_n^*(t/2) - \lambda x_n^*(t)\| = \|T_\lambda x_n^*\|.$$

Следовательно, можно считать, что каждая из функций x_n , удовлетворяющих соотношениям (5.7), неотрицательна и не возрастает. Далее, если

Q — оператор усреднения, определенный в (5.5), то для любой $x \in \Lambda_q(\psi)$

$$\begin{aligned} QT_\lambda x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \int_{\Delta_k} T_\lambda x(s) ds \cdot \chi_{\Delta_k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \left(\int_{\Delta_k} x(s/2) ds - \lambda \int_{\Delta_k} x(s) ds \right) \cdot \chi_{\Delta_k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \left(2 \int_{\Delta_{k-1}} x(s) ds - \lambda \int_{\Delta_k} x(s) ds \right) \cdot \chi_{\Delta_k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{k-1}(x) - \lambda a_k(x)) \cdot \chi_{\Delta_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (S_\lambda a(x))_k \cdot \chi_{\Delta_k}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, $a(x) = (2^{-k} \int_{\Delta_k} x(s) ds)_{k=-\infty}^{\infty}$. Так как с некоторым $C > 0$

$$\|Qx\|_{\Lambda_q(\psi)} \leq C \|x\|_{\Lambda_q(\psi)},$$

то ввиду (5.1) и (5.7) $\|S_\lambda a(x_n)\|_{l_q(\mu)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, из тех же соотношений и монотонности x_n следует

$$\begin{aligned} \|a(x_n)\|_{l_q(\mu)} &\geq c \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k} \int_{\Delta_k} x_n(s) ds \cdot \chi_{\Delta_k} \right\|_{\Lambda_q(\psi)} \\ &\geq c \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n(2^{k+1}) \cdot \chi_{\Delta_k} \right\|_{\Lambda_q(\psi)} \geq c \|\sigma_{1/2} x_n\| \geq \frac{c}{2} \|x_n\| = \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Так как по условию оператор S_λ инъективен, то полученные соотношения показывают, что оператор S_λ не замкнут, а это противоречит условию. $\square$

Следующее утверждение — непосредственное следствие теоремы 7 и предложения 2.

Следствие 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $1 \leq q < \infty$. Тогда оператор T_λ инъективен и замкнут в пространстве $\Lambda_q(\psi)$, если и только если

$$|\lambda| \in [0, 2^\alpha) \cup (2^{\beta_0}, 2^{\alpha_\infty}) \cup (2^\beta, \infty).$$

Кроме того, он обратим в $\Lambda_q(\psi)$ тогда и только тогда, когда $|\lambda| \in [0, 2^\alpha) \cup (2^\beta, \infty)$.

Теперь мы готовы дать полное описание множества $\mathcal{F}(X)$ в том случае, когда X — пространство Лоренца $\Lambda_q(\psi)$.

Теорема 8. Пусть $1 \leq q < \infty$, а ψ — положительная функция на $(0, \infty)$, удовлетворяющая условиям (а) и (b) из §2. Тогда если $\alpha_\infty \leq \beta_0$, то $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi)) = [1/\beta, 1/\alpha]$; если $\alpha_\infty > \beta_0$, то $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi)) = [1/\beta, 1/\alpha_\infty] \cup [1/\beta_0, 1/\alpha]$.

Доказательство. Прежде всего, если $p \notin [1/\beta, 1/\alpha]$, то $\lambda := 2^{1/p} \notin [2^\alpha, 2^\beta]$. Так как ввиду предложения 1 оператор T_λ в этом случае обратим, то λ не является аппроксимативным собственным значением оператора T . Следовательно, по теореме 5 $p \notin \mathcal{F}(\Lambda_q(\psi))$ и $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi)) \subset [1/\beta, 1/\alpha]$.

Предположим сначала, что $\alpha_\infty \leq \beta_0$ и $p \in [1/\beta, 1/\alpha]$. Тогда $\lambda = 2^{1/p} \in [2^\alpha, 2^\beta]$ и по следствию 2 оператор T_λ либо не инъективен, либо не замкнут. В обоих случаях λ — аппроксимативное собственное значение оператора T . Поэтому по теореме 5 $p \in \mathcal{F}(\Lambda_q(\psi))$. Тем самым в этом случае $[1/\beta, 1/\alpha] \subset \mathcal{F}(\Lambda_q(\psi))$.

Пусть теперь $\alpha_\infty > \beta_0$ и $p \in (1/\alpha_\infty, 1/\beta_0)$. Тогда $\lambda = 2^{1/p} \in (2^{\beta_0}, 2^{\alpha_\infty})$, и поэтому опять ввиду следствия 2 оператор T_λ замкнут и инъективен. Следовательно, существует $c > 0$, для которого

$$\|T_\lambda x\|_{\Lambda_q(\psi)} \geq c \|x\|_{\Lambda_q(\psi)} \quad (x \in \Lambda_q(\psi)).$$

Тем самым λ не является аппроксимативным собственным значением оператора T , и по теореме 5 $p \notin \mathcal{F}(\Lambda_q(\psi))$. $\square$

Замечание 1. Нетрудно показать [13], что для любых четырех чисел a, b, c , и d таких, что $0 < a \leq \min(b, c) \leq \max(b, c) \leq d < 1$, существует квазивогнутая на $(0, \infty)$ функция ψ , для которой $\alpha(\psi) = a$, $\beta_0(\psi) = b$, $\alpha_\infty(\psi) = c$ и $\beta(\psi) = d$. Тогда по теореме 8 для произвольного $1 \leq q < \infty$ $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi)) = [1/d, 1/a]$, если $c \leq b$, и $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi)) = [1/d, 1/c] \cup [1/b, 1/a]$, если $c > b$.

§6. Заключительные примеры и замечания

Пример 1 (см. также [9]). Для произвольных $1 < p < r < \infty$ рассмотрим квазивогнутые функции $\psi_1(t) = \max(t^{1/p}, t^{1/r})$ и $\psi_2(t) = \min(t^{1/p}, t^{1/r})$. Как легко проверить, $M(\psi_i) = \psi_i$ ($i = 1, 2$), $M_0(\psi_1)(t) = M_\infty(\psi_2)(t) = t^{1/r}$ и $M_\infty(\psi_1)(t) = M_0(\psi_2)(t) = t^{1/p}$. Поэтому $\alpha(\psi_i) = 1/r$, $\beta(\psi_i) = 1/p$ ($i = 1, 2$), $\alpha_0(\psi_1) = \beta_0(\psi_1) = \alpha_\infty(\psi_2) = \beta_\infty(\psi_2) = 1/r$, а $\alpha_\infty(\psi_1) = \beta_\infty(\psi_1) = \alpha_0(\psi_2) = \beta_0(\psi_2) = 1/p$. Таким образом, по теореме 8 для любого $1 \leq q < \infty$ $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi_1)) = \{p, r\}$ и $\mathcal{F}(\Lambda_q(\psi_2)) = [p, r]$. Заметим, что

$$\Lambda_q(\psi_1) = \Lambda_q(t^{1/p}) \cap \Lambda_q(t^{1/r}), \quad \text{а} \quad \Lambda_q(\psi_2) = \Lambda_q(t^{1/p}) + \Lambda_q(t^{1/r}).$$

Пример 2. Пусть теперь $1 \leq p < r \leq \infty$, $X = L_p(0, \infty) \cap L_r(0, \infty)$, а $Y = L_p(0, \infty) + L_r(0, \infty)$ с обычными нормами:

$$\|f\|_X := \max(\|f\|_{L_p}, \|f\|_{L_r})$$

и

$$\|f\|_Y = \inf\{\|g\|_{L_p} + \|h\|_{L_r} : f = g + h, g \in L_p, h \in L_r\}.$$

Тогда $\psi_1(t) = \max(t^{1/p}, t^{1/r})$ и $\psi_2(t) = \min(t^{1/p}, t^{1/r})$ — фундаментальные функции пространств X и Y соответственно, и поэтому, как и в предыдущем примере, $\alpha_X = \alpha_Y = 1/r$, а $\beta_X = \beta_Y = 1/p$. Ввиду предложения 1 оператор $T_\lambda = T - \lambda I$ является изоморфизмом пространства $L_s(0, \infty)$ при условии, если $\lambda \neq 2^{1/s}$. Следовательно, для каждого λ , отличного от $2^{1/p}$ и $2^{1/r}$, существует такое $c > 0$, что

$$\|T_\lambda f\|_{L_p} \geq c\|f\|_{L_p} \quad (f \in L_p) \quad \text{и} \quad \|T_\lambda f\|_{L_r} \geq c\|f\|_{L_r} \quad (f \in L_r).$$

Отсюда $\|T_\lambda f\|_X \geq c\|f\|_X$ и, значит, такое λ не является аппроксимативным собственным значением оператора T_λ в X . Поэтому ввиду теорем 4 и 5 $\mathcal{F}(X) = \{p, r\}$.

Для того чтобы найти $\mathcal{F}(Y)$, покажем, что оператор T_λ не инъективен на пространстве Y , если $2^{1/r} < \lambda < 2^{1/p}$. Действительно, пусть f_0 — произвольная положительная функция из пространства $L_\infty[1, 2]$. Как легко проверить, для функции

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-n} f_0(2^{-n}t) \chi_{[2^n, 2^{n+1})}(t),$$

определенной на $(0, \infty)$, справедливо равенство $T_\lambda f = 0$. Кроме того, по определению нормы в сумме пространств

$$\begin{aligned} \|f\|_Y &\leq \left\| \sum_{n=0}^{-\infty} \lambda^{-n} f_0(2^{-n}t) \chi_{[2^n, 2^{n+1})}(t) \right\|_{L_p} + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} f_0(2^{-n}t) \chi_{[2^n, 2^{n+1})}(t) \right\|_{L_r} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{-\infty} \lambda^{-np} \int_{2^n}^{2^{n+1}} |f_0(2^{-n}t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-nr} \int_{2^n}^{2^{n+1}} |f_0(2^{-n}t)|^r dt \right)^{1/r} \\ &\leq \left\{ \left(\sum_{n=0}^{-\infty} \lambda^{-np} 2^n \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-nr} 2^n \right)^{1/r} \right\} \|f_0\|_{L_\infty[1, 2]} \end{aligned}$$

(мы рассматриваем случай, когда $r < \infty$, для $r = \infty$ рассуждения аналогичны). Так как $2^{1/r} < \lambda < 2^{1/p}$, то оба ряда из правой части последнего неравенства сходятся. Следовательно, $f \in Y$, и T_λ не инъективен на

этом пространстве. Таким образом, любое $\lambda \in (2^{1/r}, 2^{1/p})$ является собственным значением оператора T . Применяя теоремы 5 и 4, получаем, что $\mathcal{F}(Y) = [p, r]$.

Замечание 2. Если через $\alpha, \alpha_0, \alpha_\infty, \beta, \beta_0$ и β_∞ обозначить соответствующие индексы растяжения фундаментальной функции симметричного пространства, то результаты последнего примера получаются за счет формального применения теоремы 8 (хотя, разумеется, в этом случае ее применять нельзя, так как X и Y из этого примера не являются пространствами Лоренца). Тем самым весьма естественной выглядит гипотеза о том, что сфера действия теоремы 8 шире, чем класс пространств Лоренца. В частности, было бы интересно доказать аналогичный результат для пространств Орлича на полуоси (пространства примера 2 принадлежат к этому классу). Заметим, что для пространств Орлича $X = L_M[0, 1]$ на отрезке мы всегда имеем равенство $\mathcal{F}(X) = [1/\beta_X, 1/\alpha_X]$ (см. [19, теорема 4.а.9] и [7, замечание на с. 140–141]).

Список литературы

- [1] Цирельсон Б. С., *Не в любое банахово пространство можно вложить l_p или c_0* , Функци. анализ и его прил. **8** (1974), №2, 57–60.
- [2] Dvoretzky A., *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Jerusalem Acad. Press, Jerusalem, 1961, pp. 123–160.
- [3] Milman V. D., Schechtman G., *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1200, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [4] Krivine J. L., *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), 1–29.
- [5] Albiac F., Kalton N. J., *Topics in Banach space theory*, Grad. Texts in Math., vol. 233, Springer, New York, 2006.
- [6] Diestel J., Jarchow H., Tonge A., *Absolutely summing operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [7] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces, II. Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Bd. 97, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [8] Maurey B., Pisier G., *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. (2) **58** (1976), 45–90.
- [9] Schep A. R., *Krivine's theorem and the indices of a Banach lattice*, Acta Appl. Math. **27** (1992), 111–121.
- [10] Rosenthal H. P., *On a theorem of J. L. Krivine concerning block finite representability of l^p in general Banach spaces*, J. Funct. Anal. **28** (1978), 197–225.
- [11] Astashkin S. V., *Tensor product in symmetric function spaces*, Function Spaces (Zielona Góra, Poland, 1995), Collect. Math. **48** (1997), no. 4–6, 375–391.
- [12] Антонович А. Б., *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*, Белорус. ун-т, Минск, 1988.
- [13] Astashkin S. V., Sunehag P., *Real method of interpolation on subcouples of codimension one*, Studia Math. **185** (2008), no. 2, 151–168.

- [14] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [15] Bennett C., Sharpley R., *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., vol. 129, Acad. Press, Boston, 1988.
- [16] Astashkin S. V., *Images of operators in rearrangement invariant spaces and interpolation*, Function Spaces (Wroclaw, Poland, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, pp. 49–64.
- [17] Асташкин С. В., *Интерполяция пересечений вещественным методом*, Алгебра и анализ **17** (2005), №2, 33–69.
- [18] Kalton N. J., *Calderón couples of rearrangement invariant spaces*, Studia Math. **106** (1993), no. 3, 233–277.
- [19] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces. I. Sequence spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Bd. 92, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.

Самарский
государственный университет
443011, Самара
ул. Академика Павлова, 1
Россия
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило 7 октября 2009 г.