

Геометрия функциональных пространств Чезаро*

© 2011. С. В. Асташкин, Л. Малигранда

1. Введение. *Пространства последовательностей Чезаро* ces_p ($1 \leq p \leq \infty$) приобрели широкую известность в конце 60-х годов прошлого века в связи с проблемой описания их сопряженных, поставленной Математическим обществом Нидерландов [1]. Напомним, что пространство ces_p состоит из всех последовательностей вещественных чисел $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, таких, что

$$\|x\|_{\text{ces}_p} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^p \right]^{1/p} < \infty$$

(с естественной модификацией в случае $p = \infty$).

Функциональное пространство Чезаро $\text{Ces}_p = \text{Ces}_p(I)$ состоит из всех измеримых по Лебегу функций f , определенных на $I = [0, 1]$ или $I = [0, \infty)$, таких, что

$$\|f\|_{\text{Ces}_p} = \left[\int_I \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \right]^{1/p} < \infty, \quad \text{если } 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{\text{Ces}_{\infty}} = \sup_{x \in I, x > 0} \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt < \infty, \quad \text{если } p = \infty.$$

Пространство $\text{Ces}_{\infty}[0, 1]$, известное как пространство Коренблюма–Крейна–Левина K , впервые возникло еще в 1948 г. в связи с решением задач из теории сингулярных интегралов (см. [2] и [3]). Позднее пространства $\text{Ces}_p[0, \infty)$ ($1 \leq p \leq \infty$) рассматривались в работах [4]–[6].

Данная заметка посвящена изучению геометрических свойств функциональных пространств Чезаро. В частности, будет дано описание пространства, сопряженного к $\text{Ces}_p(I)$ ($1 < p < \infty$), как для $I = [0, \infty)$, так и для $I = [0, 1]$. Заметим, что в первом случае иное (неявное) описание его было получено в [6]. Кроме того, найден тип и котип пространства Чезаро и дана полная характеристизация l^q -пространств, имеющих изоморфные копии в $\text{Ces}_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$).

Приведем некоторые определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть $L^0 = L^0(I)$ — множество всех вещественнозначных конечных п.в. функций, измеримых по Лебегу на I (точнее, их классов эквивалентности). Тогда под *нормированным идеальным пространством* $X = (X, \|\cdot\|)$ понимается линейное нормированное пространство $X \subset L^0(I)$ со следующим свойством: если $|f| \leq |g|$ п.в. на I и $g \in X$, то $f \in X$ и $\|f\| \leq \|g\|$. Если дополнительно X полно, то оно называется *банаховым идеальным пространством*. Подробнее о свойствах нормированных идеальных пространств см. монографии [7]–[9].

*Работа первого автора частично поддержана Министерством образования и науки РФ, грант №3341. Работа второго автора частично поддержана Шведским научно-исследовательским советом, грант 621-2008-5058.

Если X и Y — банаховы идеальные пространства на I , то символ $X \hookrightarrow Y$ означает, что $X \subset Y$ и это вложение непрерывно, а $X \xhookrightarrow{C} Y$ — что дополнительно $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ для всех $x \in X$. Кроме того, $\text{supp } f = \{t \in I : f(t) \neq 0\}$ — носитель функции f . Начнем с перечисления более простых свойств функциональных пространств Чезаро.

Теорема 1. (а) Если $1 < p \leq \infty$, то $\text{Ces}_p(I)$ — банахово идеальное пространство, $\text{Ces}_1[0, 1] = L_w^1$ с весом $w(t) = \ln(1/t)$ ($t \in (0, 1]$) и $\text{Ces}_1[0, \infty) = \{0\}$.

(б) Пространство $\text{Ces}_p(I)$ сепарабельно, если $1 \leq p < \infty$, и не сепарабельно, если $p = \infty$.

(с) Если $1 < p \leq \infty$, то $L^p(I) \xhookrightarrow{p'} \text{Ces}_p(I)$, где $p' = p/(p-1)$, причем вложение строгое.

(д) Если $1 < p < \infty$, то $\{f \in \text{Ces}_p[0, 1] : \text{supp } f \subset [0, a]\} \hookrightarrow L^1[0, a]$ для каждого $a \in (0, 1)$ и $\{f \in \text{Ces}_p[0, \infty) : \text{supp } f \subset [0, a]\} \hookrightarrow L^1[0, a]$ для всех $0 < a < \infty$. Кроме того, $\text{Ces}_\infty[0, 1] \xhookrightarrow{1} L^1[0, 1]$. В то же время $\text{Ces}_p[0, 1] \not\subset L^1[0, 1]$ и $\text{Ces}_p[0, \infty) \not\subset L^1[0, \infty)$ ($1 < p < \infty$).

(е) Если $1 < p < q \leq \infty$, то $\text{Ces}_q[0, 1] \xhookrightarrow{1} \text{Ces}_p[0, 1]$ и вложение строгое.

(ф) Пространство $\text{Ces}_p(I)$ не рефлексивно, но строго выпукло, если $1 < p < \infty$. Последнее означает, что из соотношений $\|f\|_{\text{Ces}_p} = \|g\|_{\text{Ces}_p} = 1$ и $f \neq g$ следует неравенство $\|(f+g)/2\|_{\text{Ces}_p} < 1$.

2. Описание сопряженных пространств. Напомним, что ассоциированным пространством к нормированному идеальному пространству X на I называется множество X' всех функций $f \in L^0(I)$, таких, что

$$\|f\|_{X'} := \sup_{g \in X, \|g\|_X \leq 1} \int_I |f(x)g(x)| dx < \infty.$$

Это банахово идеальное пространство на I . Имеет место вложение $X' \subset X^*$, где X^* — пространство, сопряженное к X . При этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно.

В следующих двух теоремах дано описание сопряженного (и ассоциированно-го) пространства к пространству $\text{Ces}_p(I)$ ($1 < p < \infty$) для $I = [0, \infty)$ и $I = [0, 1]$ соответственно. Весьма неожиданным оказалось появление во втором случае веса $(1 - x^{p-1})^{-1}$.

Пусть $1 < q < \infty$. Тогда $D(q)$ — пространство функций, определенных на $[0, \infty)$, с нормой $\|f\|_{D(q)} = \|\tilde{f}\|_{L^q}$, где $\tilde{f}(x) = \text{ess sup}_{t \in [x, \infty)} |f(t)|$.

Теорема 2. Если $I = [0, \infty)$ и $1 < p < \infty$, то

$$(\text{Ces}_p)^* = (\text{Ces}_p)' = D(p'), \quad \text{где } p' = p/(p-1),$$

причем нормы этих пространств эквивалентны.

Для каждого $1 < q < \infty$ определим банахово идеальное пространство $U(q)$ на $[0, 1]$ как множество всех функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{U(q)} = \left[\int_0^1 \left(\frac{\tilde{f}(x)}{1 - x^{1/(q-1)}} \right)^q dx \right]^{1/q}, \quad \text{где } \tilde{f}(x) = \text{ess sup}_{t \in [x, 1]} |f(t)|.$$

Легко видеть, что эквивалентная норма на $U(q)$ (с константой эквивалентности, зависящей от q) может быть задана следующим образом:

$$\|f\|_{U(q)}^0 = \left[\int_0^1 \left(\frac{\tilde{f}(x)}{1-x} \right)^q dx \right]^{1/q}.$$

Теорема 3. Если $I = [0, 1]$ и $1 < p < \infty$, то

$$(\text{Ces}_p)^* = (\text{Ces}_p)' = U(p'), \quad p' = p/(p-1),$$

причем нормы этих пространств эквивалентны.

В доказательстве этих результатов, в частности, используются факторизационные соотношения между пространствами, аналогичные тем, что в дискретной ситуации рассматриваются в [10]. Ограничиваясь случаем полуоси $[0, \infty)$, определим пространство $G(p)$ ($1 \leq p < \infty$), являющееся p -«выпуклизацией» пространства $\text{Ces}_\infty[0, \infty)$, с нормой

$$\|f\|_{G(p)} = \| |f|^p \|_{\text{Ces}_\infty}^{1/p} = \sup_{x>0} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Предложение 1. Если $1 < p < \infty$, то $\text{Ces}_p = L^p \cdot G(p')$, т. е. $f \in \text{Ces}_p$, если и только если $f = gh$, где $g \in L^p$, $h \in G(p')$, и

$$\|f\|_{\text{Ces}_p} \approx \inf \{ \|g\|_{L^p} \|h\|_{G(p')} : f = gh, g \in L^p, h \in G(p') \}.$$

Предложение 2. Если $1 < p < \infty$, то $D(p) \cdot G(p) = L^p$ и

$$\|f\|_{L^p} = \inf \{ \|g\|_{D(p)} \|h\|_{G(p)} : f = gh, g \in D(p), h \in G(p) \}.$$

Замечание 1. Теоремы 2 и 3 показывают, в частности, что и в случае $I = [0, \infty)$, и в случае $I = [0, 1]$ пространство $(\text{Ces}_p)^*$ несепарабельно.

Замечание 2. Как уже говорилось, пространство $\text{Ces}_\infty[0, 1] := K$ было введено Коренблумом, Крейном и Левиным [2]. В [11] Люксембург и Заанен показали, что $K' = \tilde{L}^1$ с равенством норм, где $\|f\|_{\tilde{L}^1} = \|\tilde{f}\|_{L^1}$, $\tilde{f}(x) = \text{ess sup}_{t \in [x, 1]} |f(t)|$. Несколько ранее Тандори [12] нашел сопряженное пространство к пространству K_0 , сепарабельной части пространства K : $(K_0)^* = \tilde{L}^1$ (также с равенством норм).

3. Копии l^q -пространств в пространствах Ces_p . В [13] показано, что для каждого $1 < p < \infty$ пространство Чезаро $\text{Ces}_p(I)$ содержит асимптотически изометрическую копию l^1 -пространства, т. е. существуют последовательность $\{\varepsilon_n\} \subset (0, 1)$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и последовательность функций $\{f_n\} \subset \text{Ces}_p(I)$, такие, что для произвольных $\{\alpha_n\} \in l^1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) |\alpha_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \right\|_{\text{Ces}_p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Если это свойство сближает пространство $\text{Ces}_p(I)$ с $L^1(I)$, то следующий результат показывает близость пространства $\text{Ces}_p(I)$ с пространством $L^p(I)$. Рассмотрим характеристические функции $g_n = \chi_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]}$ ($n = 1, 2, \dots$). Нетрудно показать, что $\|g_n\|_{\text{Ces}_p} \approx \|g_n\|_{L^p} \approx 2^{-n/p}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Теорема 4. Для каждого $1 < p < \infty$ пространство $\text{Ces}_p(I)$ содержит порядково изоморфную и дополняемую копию пространства l^p . А именно, если $\bar{g}_n = g_n / \|g_n\|_{\text{Ces}_p}$ ($n = 1, 2, \dots$), то последовательность $\{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty$ эквивалентна каноническому базису пространства l^p и порождает подпространство, дополняемое в $\text{Ces}_p(I)$.

Напомним, что банахово пространство X обладает свойством Данфорда–Петтиса, если из того, что $x_n \rightarrow 0$ слабо в X и $f_n \rightarrow 0$ слабо в сопряженном пространстве X^* , следует, что $f_n(x_n) \rightarrow 0$. Классические примеры банаховых пространств со свойством Данфорда–Петтиса — AL- и AM-пространства [9, разд. 1b].

Следствие 1. Пространства $\text{Ces}_p(I)$ ($1 < p < \infty$) не обладают свойством Данфорда–Петтиса.

Хорошо известно [14, теорема 6.4.19], что в случае $1 \leq p \leq 2$ ($2 < p < \infty$) пространство l^q изоморфно вложено в $L^p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $p \leq q \leq 2$ (соответственно $q = p$ или $q = 2$). Аналогичное описание изоморфных копий пространств l^q может быть дано и для пространств Чезаро.

Теорема 5. (а) Если $1 \leq p \leq 2$, то пространство l^q изоморфно вложено в $\text{Ces}_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $q \in [1, 2]$.

(б) Если $2 < p < \infty$, то пространство l^q изоморфно вложено в $\text{Ces}_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $q \in [1, 2]$ или $q = p$.

При доказательстве необходимости в последней теореме в случае $p > 2$ используется известная процедура Кадеца–Пелчинского [15], позволяющая по базисной последовательности нормированных в пространстве $\text{Ces}_p[0, 1]$ функций, стремящейся к нулю по мере Лебега, построить эквивалентную ей последовательность дизъюнктивных функций. Различие с ранее упомянутым результатом для $L^p[0, 1]$ связано, прежде всего, с тем, что пространство $\text{Ces}_p[0, 1]$ содержит копию пространства $L^1[0, 1]$, а именно, нормы этих пространств эквивалентны на подпространстве $\{f \in \text{Ces}_p[0, 1] : \text{supp } f \subset [h, 1-h]\}$ для каждого $h \in (0, 1/2)$.

4. Радемахеровский тип пространств Чезаро. Банахово идеальное пространство X называется q -вогнутым ($1 \leq q < \infty$) с константой $L > 0$, если

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq L \left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \right\|$$

для любых $x_1, \dots, x_n$ из X . В частности, пространство $L^p(I)$ является p -вогнутым с константой 1 ($1 \leq p < \infty$). Аналогичным свойством обладает и пространство $\text{Ces}_p(I)$, где $I = [0, \infty)$ или $I = [0, 1]$.

Используя то, что пространство $L^1[0, x]$ p -вогнуто с константой 1 для каждого $x > 0$, нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 6. Для каждого p , $1 < p < \infty$, пространство Чезаро $\text{Ces}_p(I)$ p -вогнуто с константой 1.

Пусть $r_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) — функции Радемахера, т. е. $r_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$. Говорят, что банахово пространство X имеет $\min p$, $1 \leq p \leq 2$, если существует такая константа $K > 0$, что для произвольных векторов $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt \leq K \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

Банахово пространство X имеет *котип* $q \geq 2$, если существует константа $K > 0$, такая, что для произвольных векторов $x_1, \dots, x_n$ из X

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq K \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\| dt.$$

Последнее определение будет иметь смысл и для $q = \infty$, если в левой части неравенства будет стоять $\max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$. Говорят, что пространство X имеет *тривиальный тип* (*тривиальный котип*), если оно не имеет типа, большего 1 (соответственно конечного коти́па).

Как уже говорилось, пространство $\text{Ces}_p(I)$ содержит копию пространства L^1 . Поэтому из теорем 4 и 6 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Если $1 < p < \infty$, то пространство $\text{Ces}_p(I)$ имеет тривиальный тип и котип $\max(p, 2)$. Пространство $\text{Ces}_\infty(I)$ имеет тривиальный тип и тривиальный котип.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. A. Jagers, Nieuw Arch. Wiskund. (3), **22** (1974), 113–124. [2] Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн, В. Я. Левин, Докл. АН СССР (н.с.), **62** (1948), 17–20. [3] W. Wnuk, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, Polish Scientific Publishers PWN, Warsaw, 1999. [4] J.-S. Shiue, Tamkang J. Math., **1** (1970), 91–95. [5] B. D. Hassard, D. A. Hussein, Tamkang J. Math., **4** (1973), 19–25. [6] P. W. Sy, W. Y. Zhang, P. Y. Lee, Glas. Mat. Ser. III, **22**:1 (1987), 103–112. [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977. [8] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, II. *Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979. [10] G. Bennett, *Factorizing the Classical Inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 120, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996. [11] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, Math. Ann., **162** (1965/1966), 337–350. [12] K. Tandori, Publ. Math. Debrecen., **3** (1954), 263–268. [13] S. V. Astashkin, L. Maligranda, Proc. Amer. Math. Soc., **136**:12 (2008), 4289–4294. [14] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Math., vol. 233, Springer-Verlag, New York, 2006. [15] М. И. Kadec, A. Pełczyński, Studia Math., **21** (1962), 161–176.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Технологический университет Лулео, Швеция
e-mail: lech@sm.luth.se

Поступило в редакцию
6 марта 2009 г.

УДК 515.12

О выпуклых оболочках компактных множеств вероятностных мер со счетными носителями

© 2011. В. Л. Гейнц, В. В. Филиппов

В [1] Э. Майкл доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 1. *Пусть $F: X \rightarrow L$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение паракомпакта X в банахово пространство L , значения которого яв-*