

EXTRAPOLATION DESCRIPTION OF REARRANGEMENT INVARIANT SPACES AND RELATED PROBLEMS.

S. V. Astashkin, K. V. Lykov

Россия, Самарский Государственный Университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru, alkv@list.ru

Аннотация

Работа посвящена теории экстраполяции в шкале L_p -пространств. Представлено экстраполяционное по отношению к шкале L_p описание пространств Орлича, близких к L_∞ . Предложен новый подход, позволяющий, в частности, получить все известные экстраполяционные пространства Орлича единым методом. Введен новый класс симметричных пространств на отрезке $[0, 1]$, содержащий все наиболее известные до сих пор пространства, экстраполяционные относительно шкалы L_p при $p \rightarrow \infty$. Найдена простая характеристика этого класса. Как приложение получена новая экстраполяционная теорема для операторов, ограниченных в L_p -пространствах.

Введение и предварительные сведения

В 1951 году Яно опубликовал работу [1], которая стала отправной точкой для теории экстраполяции. Мы сформулируем теорему Яно в том виде, в котором она сформулирована в монографии [2, гл. 12, теорема 4.41], в значительной степени способствовавшей популяризации этой теоремы.

Теорема (Яно). Пусть T — линейный оператор, определенный на некотором подмножестве $L_1[0, 1]$.

1) Если T действует в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in (1, p_0]$ и

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O((p-1)^{-\alpha}) \text{ при } p \rightarrow 1 \text{ и некотором } \alpha > 0,$$

то T можно доопределить до оператора на пространстве Лоренца $L(\log L)^\alpha$, действующего ограничено в L_1 :

$$\|Tx\|_{L_1} \leq C \|x\|_{L(\log L)^\alpha}, \text{ где } \|x\|_{L(\log L)^\alpha} := \int_0^1 \log^\alpha(e/t) x^*(t) dt,$$

$x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$.

2) Если T действует в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in [p_0, \infty)$ и

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O(p^\alpha) \text{ при } p \rightarrow \infty \text{ и некотором } \alpha > 0,$$

то T действует из L_∞ в пространство Орлича $\text{Exp } L^{1/\alpha}$:

$$\|Tx\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} \leq C \|x\|_{L_\infty}, \text{ где } \|x\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} := \sup_{0 < t \leq 1} \log^{-\alpha}(e/t) x^*(t).$$

Заметим, что у самого Яно была сформулирована только первая часть теоремы, без двойственного результата, который в работе [1] не требовался. В [1] и [2] также представлены приложения к различным вопросам анализа. В частности, в своей работе Яно показывает, что известные соотношения для различных важных операторов анализа, таких, как максимальный оператор Харди-Литтльвуда, оператор перехода к сопряженной функции в гармоническом анализе и др., имеют зависимый характер. Именно, из известных оценок в шкале пространств L_p следуют оценки в пространствах на концах шкалы.

После работы Яно появлялись отдельные публикации по экстраполяции (см., например, [3, 4, 5]), но единой унифицирующей теории не было. В работах [3, 4], в частности, переоткрывается результат Яно.

В конце 80-х — начале 90-х годов прошлого века началась разработка общих подходов теории экстраполяции, связанная прежде всего с именами Яверса и Мильмана [6-9]. В частности, используя введенные ими функторы пересечения Δ и суммы Σ они получили экстраполяционное описание пространств, фигурирующих в теореме Яно (см., например, [8, с. 22-23]):

$$\Delta_{p_0 < p < \infty} (p^{-\alpha} L_p) = \text{Exp } L^{1/\alpha} \text{ и } \Sigma_{1 < p < p_0} ((p-1)^{-\alpha} L_p) = L(\log L)^\alpha.$$

Рассмотрим подробнее функтор пересечения Δ . Если $\{A_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ — семейство банаховых пространств, непрерывно вложенных в одно и тоже банахово пространство $\mathcal{A}$,

то

$$\Delta_{\theta \in \Theta}(A_\theta) = \left\{ a \in \mathcal{A} : \|a\|_\Delta = \sup_{\theta \in \Theta} \|a\|_{A_\theta} < \infty \right\},$$

т.е.

$$\|a\|_\Delta = \left\| \|a\|_{A_\theta} \right\|_{L_\infty}, \quad (1)$$

где L_∞ — пространство ограниченных функций на Θ . Согласно описанию Мильмана и Яверса

$$\|x\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} = \left\| \frac{\|x\|_p}{p^\alpha} \right\|_{L_\infty(p_0, \infty)}, \quad (2)$$

откуда, с учетом простого соотношения

$$\|x\|_{L_\infty} = \left\| \|x\|_p \right\|_{L_\infty(p_0, \infty)},$$

мы сразу получаем вторую часть теоремы Яно.

В настоящей работе в качестве шкалы $\{A_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ рассматривается шкала пространств L_p ($1 \leq p < \infty$) на отрезке $[0, 1]$. В первом параграфе мы исследуем вопрос, когда для пространства Орлича L_M (определение далее) выполняется

$$L_M = \Delta_{1 \leq p < \infty}(\omega(p)L_p)$$

с некоторой ограниченной измеримой функцией $\omega(p)$.

В работах Мильмана и Яверса в качестве шкал $\{A_\theta\}$ рассматриваются преимущественно шкалы, порожденные вещественным методом интерполяции. Напомним, что для совместимой банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$ (т.е. такой пары банаховых пространств, что оба пространства A_0 и A_1 вложены в общее отделимое линейное топологическое пространство) пространство $\vec{A}_{\theta, q}$ вещественного метода интерполяции определяется нормой:

$$\|a\|_{\vec{A}_{\theta, q}} := \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, a; A_0, A_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при } q < \infty$$

и

$$\|a\|_{\vec{A}_{\theta, \infty}} := \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} \mathcal{K}(t, a; A_0, A_1),$$

где

$$\mathcal{K}(t, a; A_0, A_1) := \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}$$

— $\mathcal{K}$ -функционал Петре пары (A_0, A_1) . Пространство $\vec{A}_{W,q}$ определяется аналогично с заменой $t^{-\theta}$ на функцию $W(t)$. В работах Мильмана и Яверса вычисляется функтор пересечения:

$$\Delta_{0<\theta<1} \left(M(\theta) \vec{A}_{\theta,\infty} \right) = \vec{A}_{W,\infty},$$

где

$$W(t) = \sup_{\theta} t^{-\theta} M(\theta).$$

В случае же, если функция $M(\theta)$ подчинена дополнительному условию (tempered)

$$M(\theta) \asymp M\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ при } \theta \rightarrow 0, \quad M(\theta) \asymp M\left(\frac{1+\theta}{2}\right) \text{ при } \theta \rightarrow 1,$$

наблюдается следующая устойчивость экстраполяционной конструкции Δ :

$$\Delta_{0<\theta<1} \left(M(\theta) \langle \vec{A}_{\theta,q} \rangle \right) = \Delta_{0<\theta<1} \left(M(\theta) \langle \vec{A}_{\theta,r} \rangle \right),$$

где

$$\langle \vec{A}_{\theta,q} \rangle := (\theta(1-\theta)q)^{\frac{1}{q}} \vec{A}_{\theta,q}$$

— удобная перенормировка пространств $\vec{A}_{\theta,q}$. В частности, рассматривая банахову пару $\vec{A} = (L_1, L_\infty)$ пространств функций на отрезке $[0,1]$ и используя равномерность вложений

$$\langle \vec{A}_{\theta,1} \rangle \subset L_p = \langle \vec{A}_{\theta,p} \rangle \subset \langle \vec{A}_{\theta,\infty} \rangle \text{ при } \theta = 1 - \frac{1}{p},$$

получаем описание пространств

$$\Delta_{1 \leq p < \infty} (\omega(p) L_p) = \Delta_{0<\theta<1} M(\theta) \vec{A}_{\theta,\infty}$$

при $\omega(p) \asymp \omega(2p)$ при $p \rightarrow \infty$, так как в этом случае

$$M(\theta) = M\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \omega(p) \asymp \omega(2p) = M\left(1 - \frac{1}{2p}\right) = M\left(\frac{1+\theta}{2}\right).$$

В первом параграфе настоящей работы пространства $\Delta(\omega(p) L_p)$ вычисляются при существенно более слабых ограничениях на поведение $\omega(p)$. Во втором параграфе собраны некоторые примеры экстраполяционных пространств Орлича, в третьем рассматривается дискретный вариант функтора пересечения.

Заметим еще, что задача, которая ставится у нас в работе, вообще говоря противоположная к вычислению экстраполяционных функторов. Мы спрашиваем, как получить то или иное конкретное пространство с помощью экстраполяционных конструкций.

В работе [10] подробно рассмотрены экстраполяционные функторы $\Delta^{(r)}$, являющиеся обобщением функтора Δ :

$$\|x\|_{\Delta^{(r)}(A_\theta)} := \left\{ \int [\|x\|_{A_\theta}]^r d\theta \right\}^{1/r},$$

которые эффективно применяются к интерполяционной шкале $\{M(\theta)\vec{A}_{\theta,r}\}$. В этом случае также наблюдается упомянутая выше утойчивость при сдержанно меняющейся функции $M(\theta)$ (tempered). В [10] рассмотрены также различные приложения описанных конструкций, в частности, позволяющие получать экстраполяционные утверждения типа теоремы Яно. Конструкцию $\Delta^{(r)}$ можно получить, заменив в (1) L_∞ на L_r . Еще больше возможностей дает замена L_∞ на произвольную банахову решетку F .

Определение. Симметричное пространство E называется экстраполяционным (при $p \rightarrow \infty$), если найдется такая банахова решетка F функций аргумента $p \in [1, \infty)$, что

$$\|x\|_E \asymp \| \|x\|_{L_p} \|_F.$$

Некоторые базовые свойства таких пространств сформулированы в [12]. На основе этого определения в [13] были найдены необходимые и достаточные условия экстраполяционности важных в приложениях пространств Марцинкевича и Лоренца, исследованы границы экстраполяционного описания симметричных пространств. Попутно выяснилось весьма интересное обстоятельство, состоящее в том, что нормы многих экстраполяционных в этом смысле пространств E (хотя и не всех) допускают вышеприведенное представление с параметром $F = \tilde{E}$, состоящим из всех функций $x(u)$, измеримых на $[1, \infty)$, таких, что функция $\tilde{x}(t) := x(\log_2 2/t)$ ($0 < t \leq 1$) принадлежит самому E ; при этом $\|x\|_{\tilde{E}} = \|\tilde{x}\|_E$. Примерами таких пространств являются упоминавшиеся выше пространства Орлича $\text{Exp } L^{1/\alpha}$:

$$\|x\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} \log_2^{-\alpha} \left(\frac{2}{t} \right) x^*(t) \asymp \sup_{1 < p < \infty} (p^{-\alpha} \|x\|_{L_p}).$$

Такие пространства мы называем сильно экстраполяционными, им посвящена работа [14]. Таким образом, в сильно экстраполяционных пространствах мы наблюдаем следующее удивительное явление: нормы функций $x = x(t)$ и $y = y(t) := \|x\|_{p=\log_2 2/t}$ эквивалентны:

$$\|x(t)\|_E \asymp \| \|x\|_{\log_2 2/t} \|_E$$

Это явление, в несколько иной форме и конкретно для пространств Орлича, отмечается в [15]. В [14] найдена простая характеристика сильно экстраполяционных пространств: доказано, что симметричное пространство E обладает этим свойством тогда и только тогда, когда в E ограничен оператор $Sx(t) = x(t^2)$. Этот критерий упрощается в одном важном частном случае, который включает пространства Лоренца и Марцинкевича, и сводится к тому, что фундаментальная функция пространства удовлетворяет так называемому Δ^2 -условию. В четвертом параграфе настоящей работы, посвященном сильно экстраполяционным пространствам, мы, кроме прочего, реферируем некоторые результаты [14].

Общая теория экстраполяции [10] позволяет эффективно вычислять экстраполяционные относительно шкалы $\{L_p = \langle (L_1, L_\infty)_{1-\frac{1}{p}, p} \rangle\}$ пространства с нормой

$$\|x\| \asymp \left(\int_{\theta_0}^1 \left(M(\theta) \langle \|x\|_{\theta, q} \rangle \right)^r d\theta \right)^{\frac{1}{r}} \asymp \left(\int_{p_0}^{\infty} \left(\omega(p) \|x\|_p \right)^r dp \right)^{\frac{1}{r}}$$

при $\omega(p) \asymp \omega(2p)$, что соответствует сдержанно меняющейся функции $M(\theta)$. Мы покажем, что все такие пространства сильно экстраполяционны и, таким образом, попадают под предложенное нами описание.

Напомним теперь некоторые необходимые нам определения, обозначения и свойства.

Всюду далее вложение одного банахова пространства в другое понимается как непрерывное, т.е. $X_1 \subset X_0$ означает, что из $x \in X_1$ следует: $x \in X_0$ и $\|x\|_{X_0} \leq C\|x\|_{X_1}$ для некоторого $C > 0$. Под равенством $X_1 = X_0$ для банаховых пространств будем подразумевать их совпадение с эквивалентностью норм. Мы будем рассматривать вещественные функции, заданные на отрезке $[0, 1]$ или на полуоси $[1, \infty)$ с обычной мерой Лебега μ , измеримые и почти всюду конечные. Как обычно, функции, равные почти всюду, отождествляются. Выражение вида $f \asymp g$ означает, что $cf \leq g \leq Cf$ для некоторых $c > 0$ и $C > 0$, причем эти константы не зависят от всех или части аргументов функций (квазинорм) f и g .

Напомним, что банахово функциональное пространство X называется банаховой решеткой, если из того, что $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$, следует: $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$.

Функция распределения $n_x(\tau)$ функции $x(t)$ определяется следующим образом

$$n_x(\tau) = \mu\{t : |x(t)| > \tau\}, \quad \tau > 0.$$

Две функции $x(t)$ и $y(t)$ называются равноизмеримыми, если их функции распределения совпадают. Перестановкой функции $x(t)$ называется неотрицательная функция $x^*(t)$, определенная на $[0, \infty)$, равноизмеримая с $x(t)$, убывающая и непрерывная слева. Перестановка всегда существует, единственна и ее можно определить по формуле [16, с. 83]:

$$x^*(t) = \inf\{\tau : n_x(\tau) < t\}.$$

В работе речь будет идти о симметричных (перестановочно инвариантных) функциональных пространствах, подробное изложение теории которых можно найти в монографиях [16, 17]. Банахова решетка E измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется симметричным (с.п.), если из того, что $y = y(t) \in X$ и $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ ($\tau > 0$), следует: $x \in X$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Важным и наиболее простым примером таких пространств являются L_p -пространства ($1 \leq p \leq \infty$) с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

При этом при $p > q$ имеет место вложение (с константой 1) $L_p \subset L_q$. Кроме того, L_∞ является самым узким из всех с.п. на $[0, 1]$, а L_1 — самым широким [16, теорема 2.4.1]. Через $\omega(p)L_p$ далее обозначается пространство L_p с нормой

$$\|\cdot\|_{\omega(p)L_p} := \omega(p) \|\cdot\|_{L_p}.$$

Пространства L_p — частный случай более широкого класса пространств $L_{p,q}$, нормы в которых определяются следующим образом:

$$\|x\|_{p,q} := \left(\frac{q}{p} \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} x^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1 \leq q < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_{p,\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} t^{\frac{1}{p}} x^*(t).$$

Другим важным обобщением L_p пространств являются пространства Орлича. Пусть $M = M(u)$ — функция Орлича, т.е. выпуклая непрерывная функция на $[0, \infty)$, $M(0) =$

0, $M(u) > 0$ при $u > 0$. Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых функций $x = x(t)$, для которых

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt < \infty$$

для некоторого λ . Норма в L_M определяется следующим образом:

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda : \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Пространства L_p представляют собой частный случай пространств Орлича. В роли соответствующих функций Орлича в данном случае выступают функции $M_p(u) = u^p$. В определении пространств Орлича на функцию M часто налагают дополнительные условия:

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{M(u)}{u} = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty.$$

Такую функцию M называют N -функцией, свойства которых и соответствующих пространств Орлича изложены в [18]. Для нас будут важны следующие свойства:

- 1) если $M_1(u) \leq M_2(Ku)$ при некотором K и $u > u_0$, то $L_{M_1} \supset L_{M_2}$;
- 2) если выпуклая функция $Q(u)$ такова, что $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{Q(u)}{u} = +\infty$, то существует N -функция $M(u)$, совпадающая с $Q(u)$ при $u > u_0$. В этом случае говорят, что $Q(u)$ главная часть N -функции $M(u)$.

Другие примеры с.п. — пространства Лоренца и Марцинкевича. Пусть $\varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, такая, что $\varphi(0) = 0$. Пространство Марцинкевича $\mathcal{M}(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\mathcal{M}(\varphi)} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{\varphi(s)}{s} \cdot \int_0^s x^*(t) dt.$$

Пространство Лоренца $\Lambda_r(\varphi)$ определяется нормой

$$\|x\|_{\Lambda_r(\varphi)} = \left(\int_0^1 x^*(t)^r d\varphi(t) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Важной характеристикой с.п. E является его фундаментальная функция $\phi_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$, где через $\chi_{(0,t)}$ обозначена характеристическая функция (индикатор) интервала $(0, t)$. В частности,

$$\phi_{\mathcal{M}(\varphi)}(t) = \varphi(t), \quad \phi_{\Lambda_r(\varphi)}(t) = \varphi(t), \quad \phi_{L_M}(t) \asymp \frac{1}{M^{-1}(1/t)} \quad \text{и} \quad \phi_{L_{p,q}}(t) = t^{1/p}.$$

При этом пространство $\Lambda(\varphi) := \Lambda_1(\varphi)$ — самое узкое, а пространство $\mathcal{M}(\varphi)$ — самое широкое из всех с.п. с фундаментальной функцией $\varphi(t)$ [16, теоремы 4.5.5 и 4.5.7]. Фундаментальная функция всегда квазивогнута (напомним, что функция $\psi(t)$, определенная на $[0, 1]$, называется квазивогнутой, если $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ положительна и возрастает, а $\psi(t)/t$ убывает). Всякая квазивогнутая функция $\psi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\tilde{\psi}(t)$, точнее, $1/2\tilde{\psi}(t) \leq \psi(t) \leq \tilde{\psi}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) [16, теорема 4.1.1].

Хорошо известно [19], что пространства Орлича L_M и Марцинкевича $\mathcal{M}(\varphi)$ с одинаковыми фундаментальными функциями, лежащие достаточно "близко" к L_∞ совпадают. Условием совпадения является следующее:

$$\int_0^1 M\left(\frac{1}{\lambda\varphi(t)}\right) dt \leq 1 \quad (3)$$

при некотором λ .

В частности, пространство Орлича $\text{Exp } L^{1/\alpha}$, построенное по N -функции с главной частью $e^{t^{1/\alpha}}$, $\alpha > 0$, которое фигурирует в теореме Яно, совпадает с пространством Марцинкевича с фундаментальной функцией $\varphi(t) \asymp \log^{-\alpha}(e/t)$.

Функция растяжения положительной функции $\varphi(t)$, $t \in (0, 1]$, определяется соотношением

$$\mathcal{M}_\varphi(s) = \sup_{0 < t \leq \min(1, 1/s)} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

При этом числа

$$\gamma_\varphi = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\log \mathcal{M}_\varphi(s)}{\log s} \quad \text{и} \quad \delta_\varphi = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{M}_\varphi(s)}{\log s}$$

называются нижним и верхним показателями растяжения функции $\varphi(t)$. Если φ квазивогнута, то $0 \leq \gamma_\varphi \leq \delta_\varphi \leq 1$ [16, с. 76].

Если (X_0, X_1) — банахова пара (т.е. банаховы пространства X_0 и X_1 , линейно и непрерывно вложенные в некоторое отделимое линейное топологическое пространство), то естественным образом определяются пересечение $X_0 \cap X_1$ и сумма $X_0 + X_1$ с нормами

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max_{i=0,1} \|x\|_{X_i} \quad \text{и} \quad \|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0, 1\}$$

соответственно. Банахово пространство X такое, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, называется интерполяционным относительно пары (X_0, X_1) , если любой линейный оператор

T , определенный на $X_0 + X_1$ и ограниченный в X_0 и в X_1 , ограничен в X . Важную роль в различных вопросах теории интерполяции операторов играет $\mathcal{K}$ -функционал Петре [20, § 3.1]:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}.$$

При фиксированном $t > 0$ он является нормой на сумме пространств $X_0 + tX_1$, а при фиксированном $x \in X_0 + X_1$ $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ — возрастающая вогнутая функция относительно переменной t . Для банаховой пары (L_1, L_∞)

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty) = \int_0^t x^*(s) ds.$$

1 Strong extrapolation spaces

Let us introduce the precise definition generalized in a natural way the approach of Jawerth and Milman by considering instead of Δ_r -parameters (see Introduction) arbitrary Banach lattices. Let F be a Banach lattice of measurable functions on $[1, \infty)$ (it will be called an *extrapolation parameter*). The set $\mathcal{L}_F$ consists of all functions $x(t)$ for which the function $f_x(p) := \|x\|_p \in F$ with the norm

$$\|x\|_{\mathcal{L}_F} := \|f_x\|_F.$$

It is not hard to check that $\mathcal{L}_F$ is an r.i. space such that $\mathcal{L}_F \subset L_p$ for every $p < \infty$.

Определение 1.1. We will say that an r.i. space X is *extrapolation (concerning to L_∞)* ($X \in \mathcal{E}$) if there is a Banach lattice F on $[1, \infty)$ for which $X = \mathcal{L}_F$ (with equivalence of norms).

The simplest example of an extrapolation space in this sense is L_∞ . Since

$$\|f\|_{L_\infty} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p,$$

then $L_\infty = \mathcal{L}_{L_\infty[1, \infty)}$. Other examples are exponential Orlicz spaces $\text{Exp } L^N$ and, in particular, Zygmund spaces $\text{Exp } L^\beta$ ($\beta > 0$). In fact, according to (??) and (??)

$$\|x\|_{\text{Exp } L^\beta} \asymp \sup_{p \geq p_0} p^{-1/\beta} \|x\|_p$$

and

$$\|x\|_{\text{Exp } L^N} \asymp \sup_{p \geq p_0} \frac{\|x\|_p}{N^{-1}(p)},$$

and we can take in either case as a parameter F a weighted L_∞ -space.

The next definition is a generalization to general Banach lattices of the Jawerth-Milman idea of a tempered weight.

Определение 1.2. An extrapolation parameter F will be called *tempered* if the operator $Df(p) := f(2p)$ is bounded in F .

Let us define the following interesting subclass of set of all extrapolation spaces [11]. If X is an r.i. space on $[0, 1]$, then by $\tilde{X}$ we denote the Banach lattice of functions f measurable on $[1, \infty)$ such that

$$\|f\|_{\tilde{X}} := \|f(\log_2(2/t))\|_X < \infty.$$

Определение 1.3. An r.i. space X is called *strong extrapolation* ($X \in \mathcal{SE}$) if $X = \mathcal{L}_{\tilde{X}}$ (with equivalence of norms), that is,

$$\|x\|_X \asymp \left\| \|x\|_{\log_2(2/t)} \right\|_X.$$

In particular, extrapolation Orlicz spaces $\text{Exp } L^N$ (and Zygmund spaces $\text{Exp } L^\beta$ ($\beta > 0$)) are strong extrapolation spaces.

One of the main results of this article is the following characterization of strong extrapolation spaces.

Теорема 1.4. *For any r.i. space X the following conditions are equivalent:*

- (a) $X \in \mathcal{SE}$;
- (b) the operator $Sf(t) = f(t^2)$ is bounded in X .
- (c) $X = \mathcal{L}_F$ with a tempered extrapolation parameter F ;

To prove Theorem 1.4 and some other statements we need the following lemma.

Лемма 1.5. *The operator $Sx(t) = x(t^2)$ is bounded in an r.i. space X if and only if $\|Sx^*\|_X \leq C\|x\|_X$ for some $C > 0$ and all $x \in X$.*

Доказательство. Since necessity is obvious, we prove sufficiency. Let $x \in E$ and let $\tau > 0$. If

$$A = \{t \in [0, 1] : |x(t)| > \tau\} \text{ и } B = \{t \in [0, 1] : |x(t^2)| > \tau\},$$

then $B = \kappa(A)$, with $\kappa(u) = \sqrt{u}$. Hence (for instance, see [38, лемма 9.5.1])

$$\mu\{t : |Sx(t)| > \tau\} = \mu(B) = \int_A \frac{du}{2\sqrt{u}} \leq \int_0^{\mu\{t : x^*(t) > \tau\}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \mu\{t : Sx^*(t) > \tau\}.$$

Thereby $(Sx)^*(t) \leq Sx^*(t)$ and the assumption of the lemma implies

$$Sx \in X \text{ and } \|Sx\|_X \leq \|Sx^*\|_X \leq C\|x\|_X.$$

□

Proof of Theorem 1.4. Firstly, show that the conditions (a) and (b) are equivalent.

Let $x = x(t)$ be a measurable function on $[0, 1]$. Consider the function

$$\tilde{x}(t) := \|x\|_{\log_2 2/t} \quad (0 < t \leq 1).$$

Since

$$\|x\|_p \geq \|x^* \chi_{[0, 2^{-p+1}]}\|_p \geq \frac{1}{2} x^*(2^{-p+1}) \quad (p \geq 1),$$

then $\|\tilde{x}\|_E \geq \frac{1}{2} \|x\|_E$. Therefore, by the definition of strong extrapolation space, condition (a) of the theorem is equivalent to the inequality

$$\|\tilde{x}\|_X \leq C \|x\|_X, \quad (4)$$

which holds for all $x \in X$ and some $C > 0$.

First, we assume S to be bounded in X . Since $\|S^n x\|_X \leq \|S\|^n \|x\|_X$ ($n = 1, 2, \dots$), we infer

$$\begin{aligned} \tilde{x}(2^{-p+1}) = \|x\|_p &\leq 2 \|x^* \cdot \chi_{[0, 2^{-p}]}\|_p \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \|x^* \cdot \chi_{[2^{-2n+1}p, 2^{-2n}p]}\|_p \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} x^*(2^{-2n+1}p), \end{aligned}$$

for all $p \geq 1$ or equivalently

$$\tilde{x}(2t) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} S^{n+1} x^*(t) \quad (0 < t \leq 1/2).$$

Hence,

$$\|\tilde{x}(2t)\|_X \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} \|S\|^{n+1} \|x\|_X \leq C_1 \|x\|_X.$$

Since the dilation operator $\sigma x(t) = x(t/2)$ is bounded in every r.i. space [16, Theorem 2.4.4], the last inequality implies (4) c $C = 2C_1$.

Let now conversely $E = \mathcal{L}_{\tilde{E}}$, i.e., $\tilde{x} \in E$ whenever $x \in E$ and inequality (4) holds. If $t = 2^{-p+1}$ ($p \geq 1$), then

$$x^*(t^2) \leq x^*(2^{-2p}) \leq 4 \|x^* \cdot \chi_{[0, 2^{-2p}]}\|_p \leq 4 \|x^*\|_p = 4\tilde{x}(t).$$

Therefore,

$$\|Sx^*\|_X \leq 4 \|\tilde{x}\|_X \leq 4C \|x\|_X.$$

Applying Lemma 1.5, we conclude that S is bounded in X .

Next, prove that conditions (a) and (b) imply (c). In fact, with (a) at hand we may take $F = \tilde{X}$. Then, by condition (b) and by the boundedness of the dilation operator $\sigma_2 x(t) = x(t/2)$ in X , for an arbitrary $f = f(p) \in F$ we have

$$\|f(2p)\|_F = \|f(2 \log_2(2/t))\|_X = \|f(\log_2(4/t^2))\|_X \leq$$

$$\leq C\|f(\log_2(4/t))\|_X \leq 2C\|f(\log_2(2/t))\|_X = 2C\|f\|_F.$$

At last, check that from (c) it follows (b). Suppose that $X = \mathcal{L}_F$, where F is a tempered extrapolation parameter. Applying the Hölder inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Sx(t)|^p dt &= \int_0^1 |x(t^2)|^p dt = \int_0^1 |x(s)|^p \frac{ds}{2\sqrt{s}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 |x(s)|^{4p} ds \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^1 \frac{1}{(2\sqrt{s})^{\frac{4}{3}}} ds \right)^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

whence $\|Sx\|_p \leq C_1\|x\|_{4p}$. Since F is a tempered parameter, then

$$\|Sx\|_X \leq C_2 \left\| \|Sx\|_p \right\|_F \leq C_1 C_2 \left\| \|x\|_{4p} \right\|_F \leq C_3 \left\| \|x\|_p \right\|_F \leq C_4 \|x\|_X,$$

which implies that the operator S is bounded in X . $\square$

Следствие 1.6. *An r.i. space $X \in \mathcal{SE}$ if and only if there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x^* \chi_{[2^{-2n}, 2^{-2n+1})}\|_n \chi_{[2^{-n}, 2^{-n+1})} \right\|_X \leq C \|x\|_X$$

for all $x \in X$.

Доказательство. First of all, using once more the boundedness of the dilation operator in X [16, Theorem 2.4.4], we obtain

$$\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k}) \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_X \leq \|x\|_X \leq 2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k+1}) \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_X.$$

This inequality together with the following elementary inequality

$$x^*(2^{-k+1}) \leq 2 \|x^* \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}\|_k \leq x^*(2^{-k}), \quad (1 \leq k < \infty)$$

imply that

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x^* \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}\|_k \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_X \leq \|x\|_X \leq 4 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x^* \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})}\|_k \chi_{[2^{-k}, 2^{-k+1})} \right\|_X. \quad (5)$$

Applying Theorem 1.4, we complete the proof. $\square$

Theorem 1.4 implies that every r.i. space being an interpolation space with respect to a couple of strong extrapolation spaces is a strong extrapolation space as well. In particular, we obtain

Следствие 1.7. *Let N_1 and N_2 be two Orlicz functions. Then any r.i. space X interpolation with respect to the couple $(\text{Exp } L^{N_1}, \text{Exp } L^{N_2})$ is strong extrapolation.*

Замечание 1.8. As is easily seen, instead of the norm in $\tilde{E}$ we can use in Theorem 1.4 the seminorm

$$\|f\|_{\tilde{E}, p_0} = \|f\chi_{[p_0, \infty)}\|_{\tilde{E}},$$

with some fixed $p_0 > 1$.

Замечание 1.9. As it was noticed in Introduction, we may identify, by the Jawerth-Milman theory [10], extrapolation spaces (with respect to the L_p -scale) of the form $\Delta^{(r)}(\omega(p)L_p)$ with the norm

$$\|x\|_{\Delta^{(r)}} \asymp \left(\int_{p_0}^{\infty} (\omega(p)\|x\|_p)^r dp \right)^{\frac{1}{r}} \text{ if } r < \infty \text{ and } \|x\|_{\Delta^{(\infty)}} \asymp \sup_{p \geq p_0} (\omega(p)\|x\|_p)$$

whenever

$$\omega(p) \asymp \omega(2p) \text{ as } p \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Without loss of generality, we may assume that $\omega(p/2) \leq C\omega(p)$ if $p \geq 2p_0$. Thus,

$$\left(\int_{p_0}^{\infty} (\omega(p)f(2p))^r dp \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{2p_0}^{\infty} (\omega(p/2)f(p))^r \frac{dp}{2} \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{p_0}^{\infty} (\omega(p)f(p))^r dp \right)^{\frac{1}{r}},$$

which implies that the extrapolation parameter $F = L_r(\omega(p))$ is tempered. Therefore, all r.i. spaces of the form $\Delta^{(r)}(\omega(p)L_p)$, with $\omega(p)$ satisfying condition (6), possess property (c) from Theorem 1.4 and, according to this theorem, are strong extrapolation spaces.

Замечание 1.10. The construction resulting in strong extrapolation spaces as well as the $\Delta^{(r)}$ -construction with a tempered weight is stable in a sense.

Consider instead of the scale of L_p -spaces the scale of $L_{p,q}$ -spaces ($1 < p < \infty$), where $q \in [1, \infty]$ is fixed, and given Banach lattice F on $[1, \infty)$ define the space $\mathcal{L}_{F,q}$ consisting of all functions $x = x(t)$ measurable on $[0, 1]$ such that $\xi_{x,q} = \xi_{x,q}(p) := \|x\|_{p,q} \in F$. Arguing in the same way as in the proof of Theorem 1.4, it can be showed that either of its conditions (a), (b) and (c) is equivalent to the following ones:

(d) for every $q \in [1, \infty]$ $X = \mathcal{L}_{\tilde{X},q}$, i.e., $\|x\|_X \asymp \left\| \|x\|_{\log_2(2/t),q} \right\|_X$ ($x \in X$);

(e) there is a $q \in [1, \infty]$ such that $X = \mathcal{L}_{\tilde{X},q}$.

In some important cases condition (b) guaranteeing that an r.i. space to be a strong extrapolation space is equivalent to a much simpler condition [13].

Определение 1.11. A nonnegative function $\varphi(t)$ on $[0, 1]$ satisfies the Δ^2 -condition ($\varphi \in \Delta^2$) whenever there exists $C > 0$ such that

$$\varphi(t) \leq C\varphi(t^2), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (7)$$

Предложение 1.12. Given an r.i. space X on $[0, 1]$, consider the following conditions:

- (i) the operator $Sx(t) = x(t^2)$ is bounded in E ;
- (ii) the fundamental function $\varphi(t)$ of X satisfies the Δ^2 -condition.

Then (i) implies (ii). Conversely, if X is an interpolation space with respect to the couple $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$ of Lorentz and Marcinkiewicz spaces (in particular, if X coincides with $\Lambda(\varphi)$ or with $M(\varphi)$), then (ii) implies (i).

Доказательство. To prove the implication (i) $\Rightarrow$ (ii) it suffices to write the condition of boundedness of the operator S for the characteristic functions $\chi_{[0,t]}$ ($0 < t \leq 1$).

(ii) $\Rightarrow$ (i). For $X = \Lambda(\varphi)$, the boundedness of a linear operator continuous in the space of measurable functions with respect to convergence in measure is equivalent to its boundedness on the set of characteristic functions [16, Lemma 2.5.2]. For the operator S the last is equivalent to (7).

Examine the case of a Marcinkiewicz space. Firstly, if $\varphi \in \Delta^2$, then for every $x \in M(\varphi)$

$$\varphi(t)Sx^*(t) = \varphi(t)x^*(t^2) \leq C\varphi(t^2)x^*(t^2) \leq C \sup_{0 < s \leq 1} \varphi(s)x^*(s) \leq C\|x\|_{M(\varphi)}.$$

It is immediate that the condition $\varphi \in \Delta^2$ implies that $\delta_\varphi = 0$. Hence, using the last inequality and [16, Theorem 2.5.3], we infer

$$\|Sx^*\|_{M(\varphi)} \leq C' \sup_{0 < t \leq 1} Sx^*(t)\varphi(t) \leq C'C\|x\|_{M(\varphi)}.$$

Thereby it remains to refer to Lemma 1.5.

At last, if X is an interpolation space with respect to the couple $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$, with $\varphi \in \Delta^2$, then S is bounded in X because of by the previous arguments it is bounded in $\Lambda(\varphi)$ and in $M(\varphi)$. $\square$

Theorem 1.4 and the last proposition imply the following result (a weaker its version was proved earlier in [11]).

Теорема 1.13. *Every interpolation space with respect to the couple $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$ (in particular, $\Lambda(\varphi)$ and $M(\varphi)$) is a strong extrapolation space if and only if $\varphi \in \Delta^2$.*

Следствие 1.14. *If $\varphi \in \Delta^2$, then*

$$\|x\|_{\mathcal{M}(\varphi)} \asymp \sup_{1 \leq p < \infty} \varphi(2^{-p}) \|x\|_p \quad (8)$$

and

$$\|x\|_{\Lambda_r(\varphi)} \asymp \left(\int_1^\infty \|x\|_p^r 2^{-p} \varphi'(2^{-p}) dp \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (9)$$

Relations (8) and (9) were established for the first time in [13]. Earlier Lukomskii has proved (9) by a stronger assumption: $\varphi'(t) \leq t\varphi'(t^2)$ ($0 < t \leq 1$) and then he has used it considering the problem of convergence of trigonometric series [40].

Relations (8) and (9) can be obtained also from Jawerth-Milman theory using the functors $\Delta^{(r)}$. Let us show that for Marcinkiewicz spaces.

If $\varphi \in \Delta^2$, then, by [8, formula (4.6)],

$$\|x\|_{\Delta_p(\varphi(2^{-p})L_p)} \asymp \sup_{s>0} \frac{\mathcal{K}(s, x; L_1, L_\infty)}{\tau(s)}, \quad (10)$$

where

$$\tau(t) = \frac{t}{\sup_{p \geq 1} \varphi(2^{-p}) t^{1/p}}.$$

If $t < \frac{1}{2}$, then

$$\sup_{p \geq 1} \varphi(2^{-p}) t^{\frac{1}{p}} \geq \varphi(2^{-p}) t^{\frac{1}{p}}|_{p=\log_2(1/t)} = \frac{\varphi(t)}{2}.$$

Conversely, let $t = 2^{-p_1}$ and C be a constant from inequality (7). In the case, when $p \geq p_1$, we have $\varphi(2^{-p}) t^{\frac{1}{p}} \leq \varphi(t)$. If $p \leq p_1$, $p_1 \in [2^{n-1}p, 2^n p]$ for some positive integer n . Then

$$\varphi(2^{-p}) t^{\frac{1}{p}} \leq C^n \varphi(2^{-2^n p}) 2^{-\frac{p_1}{p}} \leq C^n 2^{-2^{n-1}} \varphi(t) \leq C_1 \varphi(t),$$

where

$$C_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} C^n 2^{-2^{n-1}} < \infty.$$

Thus,

$$\sup_{p \geq 1} \varphi(2^{-p}) t^{\frac{1}{p}} \asymp \varphi(t),$$

which implies that $\tau(t) \asymp t/\varphi(t)$. Therefore, by (10),

$$\sup_{1 \leq p < \infty} \varphi(2^{-p}) \|x\|_p = \|x\|_{\Delta_\infty(\varphi(2^{-p})L_p)} \asymp \sup_{s>0} \frac{\varphi(s)}{s} \int_0^s x^*(t) dt = \|x\|_{\mathcal{M}(\varphi)},$$

and we come to (8).

In general, the condition $\varphi \in \Delta^2$ is not sufficient for an r.i. space X with the fundamental function φ to be strong extrapolation.

Теорема 1.15. *There is an r.i. space X which is a closed subspace of a Marcinkiewicz space $M(\varphi)$, with $\varphi \in \Delta^2$, such that $X \notin \mathcal{SE}$.*

Доказательство. Let φ be an increasing concave function on $[0, 1]$ such that $\varphi(+0) = \varphi(0) = 0$ and $\varphi \in \Delta^2$. Define the sequence $\{t_n\}_{n=0}^\infty \in [0, 1]$ by induction as follows: $t_0 = 1$ and t_n are chosen arbitrarily so that

$$\frac{\varphi(t_{n-1}^2)}{\varphi(t_n)} > n.$$

Clearly, $t_n \rightarrow 0$. We put

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(t_{n-1}^2)} \cdot \chi_{(t_n^2, t_{n-1}^2]}(t)$$

and

$$X_0 := \{y \in M(\varphi) : \text{there exist } B > 0 \text{ and } \beta > 0 \text{ such that } y^*(t) \leq B\bar{x}(\beta t) \text{ (} 0 < t \leq 1 \text{)}\}.$$

It is easy to see that X_0 is a linear subset of Marcinkiewicz space $M(\varphi)$. Define X as the closure of E_0 in $M(\varphi)$. Then X is an r.i. space endowed with the norm of $M(\varphi)$. In particular, the fundamental function of this space is $\varphi_E(t) = \varphi(t) \in \Delta^2$.

Show now that the function $x_1(t) := \bar{x}(t^2) \notin E$. It suffices to check that

$$\inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\|_{M(\varphi)} > 0. \quad (11)$$

Let $y \in E_0$ be arbitrary. Applying the well-known inequality [16, Theorem 2.3.1]

$$\|a - b\|_{M(\varphi)} \geq \|a^* - b^*\|_{M(\varphi)},$$

we obtain

$$\|x_1 - y\|_{M(\varphi)} \geq \|x_1 - y^*\|_{M(\varphi)} \geq \|(x_1 - y^*)\chi_{(t_n^2, t_n]}\|_{M(\varphi)}. \quad (12)$$

Choose a sufficiently large $n \in \mathbb{N}$ so that

$$1) \frac{\varphi(t_{n-1}^2)}{\varphi(t_n)} > 2B \quad \text{and} \quad \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) t_n^2 \leq t_n,$$

where $B > 0$ and $\beta \in (0, 1)$ are such that

$$y^*(t) \leq B\bar{x}(\beta t).$$

In this case

$$\begin{aligned} \|(x_1 - y^*)\chi_{(t_n^2, t_n]}\|_{M(\varphi)} &\geq \|(x_1(t_n) - B\bar{x}(\beta t))\chi_{(t_n^2/\beta, t_n]}\|_{M(\varphi)} = \\ &= (x_1(t_n) - B\bar{x}(t_{n-1}^2)) \varphi(t_n - t_n^2/\beta) \geq (\bar{x}(t_n^2) - B\bar{x}(t_{n-1}^2)) \varphi(t_n^2) = \\ &= \left(\frac{1}{\varphi(t_n^2)} - \frac{B}{\varphi(t_{n-1}^2)}\right) \varphi(t_n^2) \geq \left(\frac{1}{\varphi(t_n)} - \frac{B}{\varphi(t_{n-1}^2)}\right) \varphi(t_n^2) = \\ &= \frac{1}{\varphi(t_n)} \left(1 - \frac{B\varphi(t_n)}{\varphi(t_{n-1}^2)}\right) \varphi(t_n^2) > \frac{\varphi(t_n^2)}{\varphi(t_n)} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2C}. \end{aligned}$$

Hence, (12) implies that for every $y \in E_0$

$$\|x_1 - y\|_{M(\varphi)} \geq \frac{1}{2C},$$

and thus (11) is proven. Finally, Theorem 1.4 guarantees that the r.i. space X is not a strong extrapolation space. $\square$

By [13, Theorem 1] and [11],(?) a Marcinkiewicz space $M(\varphi)$ is a strong extrapolation space if and only if

$$\varphi(t) \leq C \cdot \sup_{p \geq 1} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{\|1/\varphi\|_p}, \quad 0 < t \leq 1. \quad (13)$$

Moreover, the last condition implies that

$$\|x\|_{M(\varphi)} \asymp \sup_{p \geq 1} \frac{\|x\|_p}{\|1/\varphi\|_p}. \quad (14)$$

If $\varphi \in \Delta^2$, then, by [13, Lemma 1],

$$\|1/\varphi\|_p \leq \frac{C^p}{(\varphi(2^{-p}))^p} \quad (p \geq 1),$$

and therefore, (14) implies (8). In this connection, a natural question arises: Is there an extrapolation Marcinkiewicz space $M(\varphi)$ generated by the function $\varphi \notin \Delta^2$? In other words, is there an extrapolation space, which cannot be obtained from Jawerth-Milman theory? We give an example showing that the answer is affirmative (other examples of this sort will be presented in next Sections).

Пример 1.16. Consider an increasing concave function $\varphi(t)$ such that $\varphi(t) \asymp \psi(t) = e^{1-\ln^\theta e/t}$ for some $\theta \in (0, 1)$. Such a function exists indeed because of $\psi(t) > 0$, $\psi'(t) > 0$, $\psi''(t) < 0$ for $t \in (0, t_0)$ (where t_0 is sufficiently small) and $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = 0$.

Show that $M(\varphi) \in \mathcal{E}$. It suffices to prove (13) with ψ instead of φ . Firstly,

$$\|1/\psi\|_p^p = \int_0^1 e^{p \ln^\theta(e/t)-p} dt = e^{-p+1} \cdot \int_1^{+\infty} e^{ps^\theta s} ds.$$

Represent the integrand in the form: $e^{ps^\theta s} = e^{ps^\theta - \beta s} \cdot e^{-(1-\beta)s}$, where $\beta \in (0, 1)$ is a parameter, and consider the function $f_\beta(s) = ps^\theta - \beta s$ ($s \geq 1$). It is not hard to check that $\max_{s \geq 1} f_\beta(s) = (1-\theta) \cdot p^{\frac{1}{1-\theta}} \cdot (\theta/\beta)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$. Consequently,

$$\begin{aligned} \|1/\psi\|_p^p &\leq e^{-p+1} \cdot \exp \left((1-\theta) p^{\frac{1}{1-\theta}} \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right) \cdot \int_0^\infty e^{-(1-\beta)s} ds = \\ &= e^{-p+1} \cdot \exp \left((1-\theta) p^{\frac{1}{1-\theta}} \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right) \cdot \frac{1}{1-\beta}, \end{aligned}$$

whence

$$\|1/\psi\|_p \leq \exp \left((1-\theta) \cdot \left(\frac{\theta p}{\beta} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Put $\beta = p^\gamma/(1+p^\gamma)$, where $\gamma = \theta/(1-\theta)$. Then

$$(1-\beta)^{-1/p} = (1+p^\gamma)^{\frac{1}{p}} \leq 2p^{\frac{\gamma}{p}} < C$$

for some $C > 0$ and all $p \geq 1$. Moreover, since $(1+x)^\gamma \leq 1 + C_\gamma x$ for all $x \in [0, 1]$, we have

$$(1-\theta) \cdot \left(\frac{\theta p}{\beta} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} = \left(\frac{p}{\beta} \right)^\gamma \cdot (1-\theta) \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} = p^\gamma \cdot \left(1 + \frac{1}{p^\gamma} \right)^\gamma \cdot (1-\theta) \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \leq (1-\theta) \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} (p^\gamma + C_\gamma),$$

and thus

$$\|1/\psi\|_p \leq C_1 \cdot \exp((1-\theta) \cdot \theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \cdot p^{\frac{\theta}{1-\theta}}). \quad (15)$$

To prove (13), verify that the inequality

$$\psi(t) \|1/\psi\|_p \leq C_2 t^{1/p} \quad (16)$$

holds for $p = \theta^{-1} \ln^{1-\theta} e/t$ with the constant $C_2 = C_1 \cdot e$. In fact, on the one hand, by (15),

$$\psi(t) \|1/\psi\|_p \leq C_1 \exp((1-\theta) \ln^\theta e/t) \exp(1 - \ln^\theta e/t) = C_2 \exp(-\theta \ln^\theta e/t).$$

On the other hand,

$$t^{1/p} = \exp(\ln t/p) = \exp(\theta \ln^{\theta-1} e/t(1 - \ln e/t)) \geq \exp(-\theta \ln^{\theta} e/t).$$

Thus, (16) is proved and $M(\varphi) \in \mathcal{E}$. At the same time, it is immediately to check that $\varphi \notin \Delta^2$.

2 Extrapolation description of the $\mathcal{K}$ -functional

The theory of extrapolation developed in [6] — [8] allows us to reverse in a sense the interpolation process. In particular, in the case of scales generated by the real method of interpolation it is possible the recovery of the $\mathcal{K}$ -functional corresponding to the initial Banach couple. More precisely, for any Banach couple $\vec{A} = (A_0, A_1)$ we have

$$\|a\|_{\Sigma_{0 < \theta < 1}(t^{\theta} \langle \vec{A}_{\theta, q} \rangle)} \asymp \mathcal{K}(t, a; A_0, A_1),$$

with a constant independent of $a \in A_0 + A_1$ and $t > 0$ [9, formula (B.26)]. As earlier,

$$\langle \vec{A}_{\theta, q} \rangle := (\theta(1 - \theta)q)^{\frac{1}{q}} \vec{A}_{\theta, q}$$

is a normalization of the spaces $\vec{A}_{\theta, q}$.

Let us consider the problem when the $\mathcal{K}$ -functional $\mathcal{K}(t, f; X, L_{\infty})$, where X is an r.i. space on $[0, 1]$, may be described by the extrapolation procedure from the previous Section. We show that under certain assumptions it is possible if and only if X is a strong extrapolation space.

Теорема 2.1. *Let X be an r.i. space on $[0, 1]$.*

(i) *If $X \in \mathcal{SE}$, then*

$$\mathcal{K}(t, f; X, L_{\infty}) \asymp \mathcal{K}(t, \|f\|_{\log_2(2/u)}; X, L_{\infty}), \quad (17)$$

with constants independent of $f \in X$ and $t > 0$;

(ii) *If there is a Banach lattice F on $[1, \infty)$, $F \supset L_{\infty}$, such that*

$$\mathcal{K}(t, f; X, L_{\infty}) \asymp \mathcal{K}(t, \|f\|_p; F, L_{\infty}[1, \infty)), \quad (18)$$

with constants independent of $f \in X$ and $t > 0$, then the fundamental function φ of X satisfies the Δ^2 -condition.

To prove this theorem, we need several auxiliary assertions. The first of them is proved in [39, Example 3]. Since the proof of the second one is similar, it is omitted as well.

Let X be an r.i. space on $[0, 1]$, $X \neq L_\infty$. Then its fundamental function $\varphi(t)$ satisfies the condition $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0$. Without loss of generality, we may assume that $\varphi(t)$ is strictly increasing on $[0, 1]$ and $\varphi(1) = 1$.

Лемма 2.2. *If $f \in X$ and $0 < t \leq 1$*

$$\|f^* \chi_{[0, \varphi^{-1}(t)]}\|_X \leq \mathcal{K}(t, f; X, L_\infty) \leq 2 \cdot \|f^* \chi_{[0, \varphi^{-1}(t)]}\|_X.$$

Let now $X \in \mathcal{E}$, i.e. $X = \mathcal{L}_F$, with a Banach lattice F on $[1, \infty)$. If $X \neq L_\infty$, then there exists $f \in X$ such that $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \infty$. Hence, the function

$$\psi(u) := \|\chi_{[u, \infty)}\|_F \quad (u \geq 1) \tag{19}$$

satisfies the condition $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = 0$. Without loss of generality, it may be assumed that ψ is strictly decreasing on $[1, \infty)$ and $\psi(1) = 1$.

Лемма 2.3. *If $a \in F$ is an increasing nonnegative function on $[1, \infty)$ and $0 < t \leq 1$, then*

$$\|a \chi_{[\psi^{-1}(t), \infty)}\|_F \leq \mathcal{K}(t, a; F, L_\infty[1, \infty)) \leq 2 \cdot \|a \chi_{[\psi^{-1}(t), \infty)}\|_F.$$

In what follows, a connection between the fundamental function φ of an extrapolation space $X = \mathcal{L}_F$ and the function ψ defined by (19) plays an important role. In particular, if $X \in \mathcal{SE}$, then

$$\psi(u) = \|\chi_{[u, \infty)}\|_{\tilde{X}} = \|\chi_{[u, \infty)}(\log_2(2/s))\|_X = \varphi(2^{1-u}) \quad (u \geq 1),$$

whence

$$\varphi(t) = \psi(\log_2(2/t)) \quad (0 < t \leq 1). \tag{20}$$

In the general case, we have the following: for every $h \in (0, 1)$ there is $A = A(h) > 0$ such that

$$\psi\left(h \log_2 \frac{2}{t}\right) \leq A \varphi(t), \quad \text{если } 0 < t \leq 2^{1-1/h}. \tag{21}$$

In fact, if $p \geq h \log_2(2/t)$, then $t^{1/p} \geq t^{\frac{1}{h \log_2 2/t}} \geq 2^{-1/h}$, and the definitions of φ and ψ imply that $\varphi(t) \geq C^{-1} 2^{-1/h} \psi\left(h \log_2 \frac{2}{t}\right)$, where C is the constant of equivalence of the norms in X and $\mathcal{L}_F$. Thereby we obtain (21) with $A = 2^{1/h} C$.

In the proof of the second part of Theorem 2.1 we will use the next statement.

Лемма 2.4. Let $X = \mathcal{L}_F$, where F is a Banach lattice on $[1, \infty)$, and let φ be the fundamental function of X . Then the following conditions are equivalent:

(a) there exists $C_1 > 0$ such that $0 < t \leq 1$

$$\varphi(t) \leq C_1 \left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)), \infty)} \right\|_F \quad (22)$$

for all $0 < t \leq 1$;

(b) there exist $C_2 > 0$ and $0 < h < 1$ such that $0 < t \leq 2^{1-1/h}$

$$\varphi(t) \leq C_2 \psi \left(h \log_2 \frac{2}{t} \right) \quad (23)$$

for all $0 < t \leq 2^{1-1/h}$.

Доказательство. First, we assume that (b) holds. If $0 < t \leq 2^{1-1/h}$, then the definition of ψ yields

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq C_2 \left\| \chi_{[h \log_2 2/t, \infty)} \right\|_F \leq 2^{1/h} C_2 \left\| t^{\frac{1}{h \log_2 2/t}} \chi_{[h \log_2 2/t, \infty)} \right\|_F \\ &\leq 2^{1/h} C_2 \left\| t^{1/p} \chi_{[h \log_2 2/t, \infty)} \right\|_F. \end{aligned}$$

Moreover, since the function ψ^{-1} decreases, then (21) implies that

$$\psi^{-1}(A\varphi(t)) \leq h \log_2(2/t) \text{ if } 0 < t \leq 2^{1-1/h}.$$

Combining this with the previous inequality, we infer

$$\varphi(t) \leq 2^{1/h} C_2 \left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(A\varphi(t)), \infty)} \right\|_F.$$

At the same time, Lemma 2.3 and the concavity of the $\mathcal{K}$ -functional yield

$$\begin{aligned} \left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(A\varphi(t)), \infty)} \right\|_F &\leq \mathcal{K}(A\varphi(t), t^{1/p}; F, L_\infty[1, \infty)) \leq \\ &\leq A \mathcal{K}(\varphi(t), t^{1/p}; F, L_\infty[1, \infty)) \leq 2A \left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)), \infty)} \right\|_F. \end{aligned}$$

Thus, (22) is proved for $0 < t \leq 2^{1-1/h}$, and hence for all $0 < t \leq 1$.

Prove now the converse implication (a) $\Rightarrow$ (b). Let h be for now an arbitrary number from the interval $(0, 1/2)$. If $0 < t \leq 2^{1-1/h}$ then $t < 1/2$. Thereby $\frac{\log_2 t}{1 - \log_2 t} \leq -\frac{1}{2}$, which implies $t^{h^{-1} \log_2^{-1} 2/t} \leq 2^{-1/(2h)}$. Therefore, assuming that $h \log_2(2/t) > \psi^{-1}(\varphi(t))$, we obtain

$$\left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)), h \log_2(2/t)]} \right\|_F \leq t^{h^{-1} \log_2^{-1} 2/t} \left\| \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)), \infty)} \right\|_F \leq 2^{-1/(2h)} \varphi(t).$$

Thus, if $h \in (0, 1/2)$ is chosen so that $2C_1 2^{-1/(2h)} < 1$ then, by (22), we have

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq C_1 \left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)), \infty)} \right\|_F \leq C_1 \left\| t^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)), h \log_2(2/t)]} \right\|_F \\
&\quad + C_1 \left\| t^{1/p} \chi_{[h \log_2(2/t), \infty)} \right\|_F \\
&\leq C_1 2^{-1/(2h)} \varphi(t) + C_1 \psi(h \log_2(2/t)) \\
&\leq (1/2) \varphi(t) + C_1 \psi(h \log_2(2/t)),
\end{aligned}$$

whence

$$\varphi(t) \leq 2C_1 \psi(h \log_2(2/t)) \quad (0 < t \leq 2^{1-1/h}).$$

Since the last inequality is a straightforward consequence of (22) in the case when $h \log_2 2/t \leq \psi^{-1}(\varphi(t))$, the proof is completed. $\square$

Proof of Theorem 2.1. Since for $X = L_\infty$ both statements of the theorem are obvious, we confine exposition to the case when $X \neq L_\infty$. Therefore, we may assume that the fundamental function φ of X satisfies the conditions mentioned before Lemma 2.2. Since $\varphi(1) = 1$, we have that $\|f\|_X \leq \|f\|_\infty$ ($f \in L_\infty$), whence

$$\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty) = \|f\|_X \quad (t \geq 1). \quad (24)$$

Moreover, $\|a\|_{\tilde{X}} \leq \|a\|_{L_\infty[1, \infty)}$ ($a \in L_\infty[1, \infty)$) and, therefore, if $a \in \tilde{X}$ then

$$\mathcal{K}(t, a; \tilde{X}, L_\infty[1, \infty)) = \|a\|_{\tilde{X}} \quad (t \geq 1).$$

The last equality and (24) imply that under the condition $X = \mathcal{L}_{\tilde{X}}$ we have

$$\mathcal{K}(t, f; X, L_\infty) \asymp \mathcal{K}(t, \|f\|_p; \tilde{X}, L_\infty[1, \infty)) \quad (t \geq 1).$$

Thus, taking into account Lemmas 2.2 and 2.3 and equality (20), we see that (i) will be proved as soon as we show that

$$\left\| \left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \right\|_{\tilde{X}} \asymp \| \|f\|_p \chi_{[V(t), \infty)} \|_{\tilde{X}} \quad (0 < t \leq 1), \quad (25)$$

where $V(t) := \log_2(2/\varphi^{-1}(t))$.

First of all, if $p \geq V(t)$ then

$$\left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \geq \varphi^{-1}(t)^{1/p} \cdot \|f\|_p \geq \varphi^{-1}(t)^{1/V(t)} \cdot \|f\|_p.$$

Since $\frac{\log_2 z}{1 - \log_2 z} \geq -1$ ($0 < z \leq 1$), the definition of $V(t)$ and the previous inequality yield

$$\left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \geq \frac{1}{2} \|f\|_p \quad (p \geq V(t)),$$

whence

$$\left\| \left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \right\|_{\tilde{E}} \geq \frac{1}{2} \| \|f\|_p \chi_{[V(t), \infty)} \|_{\tilde{E}} \quad (0 < t \leq 1). \quad (26)$$

To prove the opposite inequality, we may assume that

$$\{s \in [0, 1] : f^*(s) > 0\} \subset [0, \varphi^{-1}(t)]. \quad (27)$$

If $2^{1-p} \leq \varphi^{-1}(t)$ (which is equivalent to the inequality $p \geq V(t)$) then

$$f^*(2^{1-p}) \leq 2 \cdot \left(\int_0^{2^{1-p}} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \leq 2 \cdot \|f\|_p \chi_{[V(t), \infty)}(p).$$

From this and (27) it follows

$$\|f\|_X = \|f^*(2^{1-p})\|_{\tilde{X}} \leq 2 \cdot \| \|f\|_p \chi_{[V(t), \infty)} \|_{\tilde{X}}.$$

On the ohand, since X is a strong extrapolation space, then

$$\left\| \left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \right\|_{\tilde{X}} \leq C \|f\|_X.$$

The last two relations yield

$$\left\| \left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \right\|_{\tilde{X}} \leq 2C \| \|f\|_p \chi_{[V(t), \infty)} \|_{\tilde{X}},$$

which combined with (26) implies (25). Thus, the proof of (i) is completed.

Proceed with the proof of (ii). Firstly, since $F \supset L_\infty[1, \infty)$, we have

$$\mathcal{K}(t, a; F, L_\infty[1, \infty)) \asymp \|a\|_F \quad (t \geq 1)$$

for all $a \in F$. Combining this with (24) and (18) we obtain that $X = \mathcal{L}_F$. Hence, applying Lemmas 2.2 and 2.3 (we may assume that the function ψ defined by (19) satisfies the conditions stated before the last of them) and hypothesis (18), we infer

$$\left\| \left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p ds \right)^{1/p} \right\|_F \asymp \| \|f\|_p \chi_{[\psi^{-1}(t), \infty)} \|_F \quad (0 < t \leq 1).$$

Choosing $f = \chi_{[0,u]}$ and $t = \varphi(u)$, where $0 < u \leq 1$, we conclude that

$$\varphi(u) \asymp \|u^{1/p}\|_F \leq C \|u^{1/p} \chi_{[\psi^{-1}(\varphi(u)), \infty)}\|_F.$$

Thus, Lemma 2.4 yields (23). This fact and (21) imply that

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\leq C_2 \psi(h \log_2(2/u)) = C_2 \psi((h/2) \log_2(2/u)^2) \\ &\leq C_2 \psi((h/2) \log_2(2/u^2)) \leq C_2 A(h/2) \varphi(u^2) \end{aligned}$$

for some $h \in (0, 1)$ and all $0 < u \leq 2^{1/2-1/h}$, i.e., $\varphi \in \Delta^2$. The proof is completed. $\square$

As it was showed there are Marcinkiewicz spaces $M(\varphi) \in \mathcal{E}$ such that $\varphi \notin \Delta^2$ (see Example 1.16). At the same time, from Theorems 1.13 and 2.1 it follows the following result.

Следствие 2.5. *If X is an interpolation space with respect to a Banach couple $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$ (in particular, if $X = \Lambda(\varphi)$ or $X = M(\varphi)$), then the following conditions are equivalent:*

(i) *there exists a Banach lattice F on $[1, \infty)$ such that $F \supset L_\infty$ and equivalence (18) is valid with constants independent of $f \in X$ and $t > 0$;*

(ii) *X is a strong extrapolation space.*

In both cases relation (18) is fulfilled for $F = \tilde{X}$.

Пример 2.6. Consider an exponential Orlicz space $\text{Exp}L^\Phi$ generated by the function $e^{\Phi(u)} - 1$, where Φ is an increasing convex function on the half-line $(0, \infty)$ and $\Phi(0) = 0$. As it is well-known [19, 41], we have $\text{Exp}L^\Phi = M(\varphi)$ (to within equivalence of norms), where $\varphi(u) = 1/\Phi^{-1}(\log_2(2/u))$. Since Φ^{-1} is a concave function, then

$$\Phi^{-1}(\log_2(2/u^2)) \leq \Phi^{-1}(2 \log_2(2/u)) \leq 2\Phi^{-1}(\log_2(2/u)).$$

Therefore, $\varphi(u) \leq 2\varphi(u^2)$, which implies that $\varphi \in \Delta^2$. Thus, $\text{Exp}L^\Phi \in \mathcal{SE}$ and

$$\mathcal{K}(t, f; \text{Exp}L^\Phi, L_\infty) \asymp \|\|f\|_p \chi_{[\psi^{-1}(t), \infty)}\|_F \quad (0 < t \leq 1).$$

In this case, $\psi^{-1}(t) = \Phi(1/t)$ ($0 < t \leq 1$) and, by (8), $F = L_\infty(\varphi(2^{-p}))$. Thereby

$$\mathcal{K}(t, f; \text{Exp}L^\Phi, L_\infty) \asymp \sup_{p \geq \Phi(1/t)} \frac{\|f\|_p}{\Phi^{-1}(p)},$$

whence

$$\mathcal{K}(t, f; L_\infty, \text{Exp}L^\Phi) \asymp t \mathcal{K}(1/t, f; \text{Exp}L^\Phi, L_\infty) \asymp t \sup_{p \geq \Phi(t)} \frac{\|f\|_p}{\Phi^{-1}(p)}.$$

The last relation coincides with the statement of Proposition 1 in [36] (see also Theorem 2 in [34]) to within change of variables.

In the power case, i.e., $\Phi(t) = t^\beta$, we arrive at the classical Zygmund space $\text{Exp}L^\beta$ and similar equivalence

$$\mathcal{K}(t, f; L_\infty, \text{Exp}L^\beta) \asymp t \sup_{p \geq t^\beta} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\beta}} = t \sup_{p \geq t} \frac{\|f\|_{p^\beta}}{p}$$

is valid for every $\beta > 0$ [35, Theorem 2].

3 Extrapolation description of Orlicz spaces

In this Section we are interested in finding conditions under which an Orlicz space is a limiting space of the L_p -scale or, in other words, when it is possible to describe its norm via extrapolation. Analogous problems and various applications to differential equations, imbedding theorems, probability theory, orthogonal series have been considered in [10, 12, 14, 20–35]. In particular, Mamontov [24] — [30] has developed the techniques of special integral transformations which allowed to prove some imbedding theorems among Orlicz spaces and intersections of L_p -spaces.

Note that our exposition is close to that by Mamontov and Ostrovsky [?]. The main idea is to look at L_p -spaces as Orlicz spaces and the key observation is the following: an intersection of Orlicz spaces generated by the functions M_α ($\alpha \in I$) often coincides with the Orlicz space which is generated by the envelope of the family $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Лемма 3.1. *Let $M_\alpha(u)$ ($\alpha \in I$) be arbitrary Orlicz functions and let $L_\Delta := \Delta_{\alpha \in I} L_{M_\alpha}$, where L_{M_α} are Orlicz spaces generated by the functions M_α . Then*

$$L_M \subset L_\Delta \quad \text{and} \quad \|x\|_{L_\Delta} \leq \|x\|_{L_M}, \quad (28)$$

where $M(u) := \sup_\alpha M_\alpha(u)$ ($u > 0$).

Moreover, $\varphi_{L_M}(t) = \varphi_{L_\Delta}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$).

Доказательство. Since (28) is obvious, we prove the equality of fundamental functions. By the definition of the space L_Δ , $\varphi_{L_{M_\alpha}}(t) \leq \varphi_{L_\Delta}(t)$. Therefore,

$$\int_0^1 M_\alpha \left(\frac{\chi_{[0,t]}(s)}{\varphi_{L_\Delta}(t)} \right) ds \leq 1$$

for all $\alpha \in I$. On the other hand, for any $\varepsilon > 0$ there is $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ such that

$$M\left(\frac{1}{\varphi_{L_\Delta}(t)}\right) \leq (1 + \varepsilon)M_\alpha\left(\frac{1}{\varphi_{L_\Delta}(t)}\right).$$

Thus,

$$\int_0^1 M\left(\frac{\chi_{[0,t]}(s)}{\varphi_{L_\Delta}(t)}\right) ds \leq (1 + \varepsilon) \int_0^1 M_\alpha\left(\frac{\chi_{[0,t]}(s)}{\varphi_{L_\Delta}(t)}\right) ds \leq 1 + \varepsilon,$$

which implies $\varphi_{L_M}(t) \leq \varphi_{L_\Delta}(t)$. The opposite inequality is a consequence of (28). $\square$

Introduce some notation. Let $\Delta(\omega) := \Delta_{1 \leq p < \infty}(\omega(p)L_p)$, where $\omega(p)$ is a nonnegative bounded measurable function on $[1, \infty)$. It is not hard to check that $\Delta(\omega)$ is an r.i. space on $[0, 1]$ and for every $p_0 > 1$ $\Delta(\omega) = \Delta_{p_0 \leq p < \infty}(\omega(p)L_p)$ with equivalence of norms.

Setting $M_\alpha(u) = M_p(u) = \omega(p)^p u^p$, we see that the space $\Delta(\omega)$ coincides with the space L_Δ from Lemma 3.1 with equality of norms. We will examine under which conditions $L_\Delta = L_M$, where M is the envelope of the family $\{M_p\}_{1 \leq p < \infty}$, i.e., as it may be easily checked, $M(u) = \sup_{1 \leq p < \infty} \omega(p)^p u^p$ ($u > 0$). Note that it can be assumed that $\omega(p) \rightarrow 0$ as $p \rightarrow \infty$ since, otherwise, $M(u) = \infty$ for $u > 1$, or, equivalently, $L_\Delta = L_\infty$. We begin with the following result.

Теорема 3.2. *Let $M_p(u) = \omega(p)^p u^p$ and let*

$$M(u) := \sup_{p \geq 1} M_p(u) \leq \int_1^\infty M_p(u) R(p) dp, \quad \text{for } u > u_0,$$

where the nonnegative function $R(p)$ satisfies the condition

$$\int_1^\infty R(p) \lambda^{-p} dp < \infty, \tag{29}$$

with some λ . Then $\Delta(\omega) = L_M$.

Доказательство. Suppose that $x \in \Delta(\omega)$ and $\|x\|_{\Delta(\omega)} < 1$. By the definition of the functions M_p , we have

$$\int_0^1 M_p\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq \frac{1}{\lambda^p},$$

with λ from hypothesis (29). Therefore,

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq M(u_0) + \int_0^1 \int_1^\infty M_p\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) R(p) dp dt =$$

$$= M(u_0) + \int_1^\infty \left(\int_0^1 M_p \left(\frac{|x(t)|}{\lambda} \right) dt \right) R(p) dp \leq M(u_0) + \int_1^\infty \lambda^{-p} R(p) dp < \infty,$$

which implies that $x \in L_M$. The opposite imbedding follows from Lemma 3.1. $\square$

Next, we want to clarify when an Orlicz function may be represented in the form

$$M(u) = \sup_{p \geq 1} \psi(p) u^p, \quad (30)$$

with some function $\psi(p)$.

Лемма 3.3. *A function $M(u)$ may be represented in the form (30) if and only if*

$$\sup_{p \geq 1} \left(\inf_{v > 0} \frac{M(v)}{v^p} \right) u^p = M(u). \quad (31)$$

Доказательство. Firstly, if equality (31) holds then, setting $\psi(p) := \inf_{v > 0} M(v)/v^p$, we obtain (30).

Conversely, assume that (30) is fulfilled with some $\psi(p)$. Then $\psi(p) \leq M(u)/u^p$, for all $u > 0$ and $p \geq 1$. Therefore, $\psi(p) \leq \inf_{v > 0} M(v)/v^p$ and, finally,

$$M(u) = \sup_{p \geq 1} \psi(p) u^p \leq \sup_{p \geq 1} \left(\inf_{v > 0} \frac{M(v)}{v^p} \right) u^p \leq \sup_{p \geq 1} \left(\frac{M(u)}{u^p} \right) u^p = M(u).$$

$\square$

Suppose that a function $M(u)$ may be represented in the form (30). Putting $\tilde{\psi}(p) := \sup_{q \geq p} \psi(q)$, we see that

$$M(u) = \sup_{p \geq 1} \tilde{\psi}(p) u^p$$

for all $u \geq 1$. Since the Orlicz spaces generated by equivalent functions have equivalent norms we may assume that $\psi(p)$ decreases and $\psi(1) = 1$. In this case $M(u) = u$ as $0 \leq u \leq 1$.

After change of variables $u = e^t$, $v = e^s$ and taking the logarithm equality (31) turns into the following:

$$\log M(e^t) = \sup_{p \geq 1} \left\{ pt - \sup_{s \in \mathbb{R}} \{ sp - \log M(e^s) \} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Taking into account that $\log M(e^t) = t$ as $t < 0$, we make take the supremum over all $p \in \mathbb{R}$. By the well-known Fenchel–Moreau theorem [37, Remark 1.63, p. 26], the last means that the function $N(t) := \log M(e^t)$ is convex. Remind that the Legendre conjugate function N^* for a function N is defined by

$$N^*(p) = \sup_t \{ pt - N(t) \}.$$

In our case $N^*(p)$ increases for $p > 1$, $N^*(1) = 0$, and $N^*(p) = +\infty$ if $p < 1$. Thus, Lemma 3.3 implies the following statement.

Теорема 3.4. *A function $M(u)$ may be represented in the form (30) if and only if*

$$M(u) = e^{N(\log u)}, \quad (32)$$

with some convex function N such that $N(t) = t$ if $t < 0$. Moreover, $\psi(p) = e^{-N^(p)}$.*

Замечание 3.5. If $N(t) = qt + C$ ($t > 0$, $q \geq 1$), then $M(u) = C_1 u^q$ ($u > 1$) and $\psi(p) = 0$ for $p > q$.

The following results follow from Theorems 3.2, 3.4 and Lemma 3.1.

Теорема 3.6. *Let a function M be of the form (32) with some convex function $N(t)$ such that $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)/t = \infty$. If*

$$e^{N(t)} \leq \int_1^\infty e^{pt - N^*(p) + Cp} dp, \quad \text{for } t \geq t_0, \quad (33)$$

with some $C > 0$, then $L_M = \Delta(\omega)$, where

$$\omega(p) = e^{-\frac{N^*(p)}{p}}. \quad (34)$$

Доказательство. According to Theorem 3.4

$$M(u) = \sup_{p \geq 1} M_p(u), \quad \text{where } M_p(u) = \omega^p u^p = e^{p \log u - N^*(p)}.$$

After the change $t = \log u$ in (33)) we see that inequality (29) holds for $R(p) = e^{Cp}$, $\lambda = e^{C+1}$, and $u_0 = e^{t_0}$. Thereby result follows from Theorem 3.2. $\square$

Теорема 3.7. *Let a function M be of the form (32) with some convex function $N(t)$ and let the Orlicz space L_M coincides with a Marcinkiewicz space. Then $L_M = \Delta(\omega)$, where ω is defined by (34).*

Доказательство. By Theorem 3.4 and Lemma 3.1, $L_M \subset \Delta(\omega)$ with the equality of the fundamental functions. Since L_M is a Marcinkiewicz space being the largest space among all r.i. spaces with the same fundamental function [16, Theorem 2.5.7], we deduce the opposite imbedding. $\square$

Замечание 3.8. In [31], see a somewhat similar result. In this article there are as well some its applications.

Замечание 3.9. Theorems 3.6 and 3.7 will be still valid if equality (32) is assumed to be by $u \geq u_0$ with some $u_0 > 0$. In this case $N(t)$ can be changed for $t \leq t_0$ so that it became N -function [18] and then а затем взять максимум $N(t)$ и t . Since the function $N^*(p)$ will be the same by $p \geq p_0$, the corresponding extrapolation spaces coincide.

Замечание 3.10. In the case when an Orlicz space L_M coincides with a Marcinkiewicz space $M(\psi)$ their fundamental function ψ satisfies the condition: $\delta_\psi = 0$. Combining this with [16, Theorem 2.5.3], we obtain that

$$\|x\|_{M(\psi)} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t)/\psi(t).$$

Taking into account that the fundamental function of L_M is equal to the function $1/M^{-1}(1/t)$, we have that $L_M = M(\psi)$ if and only if

$$\int_0^1 M\left(\varepsilon M^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt < \infty,$$

with some $\varepsilon > 0$. Suppose that M can be represented in the form (32). Then after logarithmic change of variables we see the last condition is equivalent to following:

$$\int_{s_0}^{\infty} e^{N(N^{-1}(s)-C)-s} ds < \infty, \quad (35)$$

with some constant $C > 0$. Moreover, the change $N^{-1}(s) = x$ allows to rewrite condition (35) as follows

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{N(x-C)-N(x)} N'(x) dx < \infty. \quad (36)$$

Next, using the convexity of the function N together with (35) and (36), we obtain the following conditions guaranteeing coincidence of the Orlicz and Marcinkiewicz spaces:

$$\int_{s_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{Cs}{N^{-1}(s)}\right) ds < \infty \quad (37)$$

and

$$\int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{CN(x)}{x}\right) N'(x) dx < \infty. \quad (38)$$

Analogously, by the inequality

$$-CN'(x) < N(x - C) - N(x),$$

we conclude that the condition

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-CN'(x)} N'(x) dx = \infty \quad (39)$$

implies that the Orlicz and Marcinkiewicz spaces do not coincide.

Let us state a result dual with respect to the assertion of Theorem 3.7.

Suppose that $\{A_\theta\}_{0 \leq \theta \leq 1}$ is a scale of Banach spaces such that $A_0 \subset A_\theta \subset A_1$. Recall that

$$\Sigma(A_\theta) := \left\{ a \in A_0 + A_1 : a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in A_{\theta_n}, \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_{A_{\theta_n}} < \infty \right\},$$

with the norm

$$\|a\|_{\Sigma} := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_{A_{\theta_n}} : a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}.$$

Теорема 3.11. *Let*

$$\varphi(t) \asymp te^{L(\log(1/t))},$$

with a concave positive function $L(u)$ such that $\lim_{u \rightarrow \infty} L(u)/u = 0$. If the Lorentz space $\Lambda(\varphi)$ coincides with a Orlicz space, then

$$\Lambda(\varphi) = \Sigma_{1 < p < p_0} \left(e^{\frac{N^*(p')}{p'}} L_p \right),$$

where $N^(p)$ is a Legendre conjugate function to the Orlicz function $N(t) = L^{-1}(t)$ and $p' = p/(p-1)$.*

Доказательство. Firstly, the Marcinkiewicz space $\mathcal{M}(\tilde{\varphi})$, where $\tilde{\varphi}(t) = t/\varphi(t)$, coincides with the Orlicz space L_M , $M(u) = e^{N(\log u)}$. At the same time, by [16, Theorem 2.5.2], $\mathcal{M}(\tilde{\varphi}) = (\Lambda(\varphi))^*$. Therefore, according to Theorem 3.7

$$\|y\|_{\mathcal{M}(\tilde{\varphi})} \asymp \sup_{p'_0 < p' < \infty} \exp \left(-\frac{N^*(p')}{p'} \right) \|y\|_{p'}. \quad (40)$$

By [16, Theorem 2.5.4],

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} \leq \sup \left\{ \int_0^1 x(t)y(t) dt : y \in L_\infty, \|y\|_{\mathcal{M}(\tilde{\varphi})} = 1 \right\}.$$

Hence, for any representation $x = \sum_{i=1}^{\infty} \infty x_i$ (convergence in L_1) we have

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x(t)y(t) dt \right| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_0^1 x_i(t)y(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_p \|y\|_{p'} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\frac{N^*(p')}{p'}} \|x_i\|_p e^{-\frac{N^*(p')}{p'}} \|y\|_{p'} \leq \\ &\leq \sup_{p'} \left\{ e^{-\frac{N^*(p')}{p'}} \|y\|_{p'} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} e^{\frac{N^*(p')}{p'}} \|x_i\|_p \right\}. \end{aligned}$$

Combining the last inequality with (40), we conclude that

$$\Lambda(\varphi) \supset \Sigma_{1 < p < p_0} \left(e^{\frac{N^*(p')}{p'}} L_p \right).$$

To prove the opposite inequality, estimate the fundamental function of the space $\Sigma := \Sigma_{1 < p < p_0} \left(e^{\frac{N^*(p')}{p'}} L_p \right)$. Since by (40),

$$\frac{t}{\varphi(t)} \asymp \|\chi_{(0,t)}\|_{\mathcal{M}(\tilde{\varphi})} \asymp \sup_{p'_0 < p' < \infty} e^{-\frac{N^*(p')}{p'}} \|\chi_{(0,t)}\|_{p'} = \sup_{p'_0 < p' < \infty} e^{-\frac{N^*(p')}{p'}} t^{\frac{1}{p'}},$$

then

$$\phi_{\Sigma}(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_{\Sigma} \leq \inf_{1 < p < p_0} e^{\frac{N^*(p')}{p'}} \|\chi_{(0,t)}\|_p = \frac{t}{\sup_{p'_0 < p' < \infty} e^{-\frac{N^*(p')}{p'}} t^{\frac{1}{p'}}} \asymp \varphi(t).$$

Recall that the Lorentz space is the smallest one among all r.i. spaces with the same fundamental function [16, Theorem 2.5.5]. Therefore, the last inequality implies that

$$\Lambda(\varphi) \subset \Lambda(\phi_{\Sigma}) \subset \Sigma \left(e^{\frac{N^*(p')}{p'}} L_p \right),$$

which completes the proof. $\square$

It is instructive to compare Theorem 3.11 with the following result which follows from Jawerth-Milman theory.

Consider the Banach couple $\vec{A} = (L_1, L_{\infty})$ of spaces on $[0, 1]$ and the corresponding spaces $\vec{A}_{\theta,1,J}$ of the real J -method of interpolation which coincide (up to equivalence of norms) with the Lorentz spaces $L_{p,1}$, for $\theta = 1 - 1/p$ (see, for example, [20]). By [8, Ch. 2, Theorem 2],

$$\Sigma_{0 < \theta < 1} \left(M(\theta) \vec{A}_{\theta,1,J} \right) = \Lambda(\psi),$$

where

$$\psi(t) = t \cdot \tau(1/t), \quad \tau(t) := \inf_{0 < \theta < 1} M(\theta) t^{\theta}.$$

Moreover, assume that M is a tempered function, which implies, in particular, that $M(\theta) \asymp M(2\theta)$ as $\theta \rightarrow 0$. Then, using [8, Ch. 2, Theorem 5], we infer

$$\Sigma_{0 < \theta < 1} \left(M(\theta) \vec{A}_{\theta,1,J} \right) = \Sigma_{0 < \theta < 1} \left(M(\theta) \langle \vec{A}_{\theta,q} \rangle \right).$$

Since

$$\langle \vec{A}_{\theta,1} \rangle \subset L_p = \langle \vec{A}_{\theta,p} \rangle \subset \langle \vec{A}_{\theta,\infty} \rangle, \quad \text{for } \theta = 1 - \frac{1}{p},$$

with uniformly bounded constants, then the condition $\omega(p') \asymp \omega(2p')$ as $p' \rightarrow \infty$ implies that

$$\Sigma_p \left(\frac{1}{\omega(p')} L_p \right) = \Lambda(\psi), \quad \psi(t) = \frac{t}{\sup_{p'} \omega(p') t^{\frac{1}{p'}}}.$$

????

We see that this result is consistent with Theorem 3.11, but the last one contains essentially weaker assumptions on the weight $\omega(p')$. We may say the same also on Theorem 3.7 (see Introduction).

In conclusion, by Theorems 3.11 and 3.7, we consider some examples of extrapolation Orlicz spaces. Emphasize that only the first of them which appeared in the second part of Yano's theorem may be derived using theorems of Yawerth–Milman theory. In this connection, we will repeatedly make use of the property indicated in Remark 3.9.

Пример 3.12. Let $\alpha > 0$ and $M(u) = e^{u^\alpha}$ if $u \geq u_0$, where $u_0 > 0$ is large enough. This function is representable in the form (32), with $N = N(t) = e^{\alpha t}$. It is not hard to verify that this function satisfies condition (35) and hence the corresponding Orlicz space $\text{Exp } L^\alpha$ coincides with the Marcinkiewicz space $\mathcal{M}(\varphi)$, where $\varphi(t) = \log^{-1/\alpha}(e/t)$. Therefore, by Theorem 3.7, the corresponding Orlicz space $\text{Exp } L^\alpha$ is an extrapolation one. Moreover, elementary calculations show that

$$N^*(p) = \frac{p}{\alpha} \log \left(\frac{p}{\alpha} \right) - \frac{p}{\alpha},$$

and we infer

$$\|x\|_{\text{Exp } L^\alpha} \asymp \sup_{p \geq 1} \frac{\|x\|_p}{p^{1/\alpha}}.$$

Пример 3.13. Let $\alpha > 1$ and $\gamma > 0$. Consider the Orlicz space $L_{M_{\alpha,\gamma}}$ generated by the function $M_{\alpha,\gamma}(u) = e^{\gamma \log^\alpha(u)}$ if $u \geq u_{\alpha,\gamma}$, where $u_{\alpha,\gamma} > 0$ is large enough. This function

is of the form (32), with $N_{\alpha,\gamma}(t) = \gamma t^\alpha$. Moreover, since condition (37) holds, $L_{M_{\alpha,\gamma}}$ is a Marcinkiewicz space. Taking into account that

$$N_{\alpha,\gamma}^*(p) = \frac{p^\beta}{\beta(\gamma\alpha)^{\beta-1}} \quad \text{if } p \geq p_0, \text{ where } \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$$

and using Theorem 3.7, we infer

$$L_{M_{\alpha,\gamma}} = \mathcal{L} \left(\exp \left(-\frac{p^{\beta-1}}{\beta(\gamma\alpha)^{\beta-1}} \right) \right),$$

which means that

$$\|x\|_{L_{M_{\alpha,\gamma}}} \asymp \sup_{p \geq 1} \|x\|_p \cdot \exp \left(-\frac{p^{\beta-1}}{\beta(\gamma\alpha)^{\beta-1}} \right).$$

In the case when $\gamma = 1/\alpha$ these expressions are simplified and for the function $M_\alpha(u) = e^{\alpha^{-1} \log^\alpha(u)}$ ($u \geq u_\alpha$) we have the following extrapolation formula

$$\|x\|_{L_{M_\alpha}} \asymp \sup_{p \geq 1} \|x\|_p \cdot \exp \left(-\frac{p^{\beta-1}}{\beta} \right).$$

Пример 3.14. Let $\gamma \geq 1$. Consider the Orlicz space generated by the function of the form (32), with $N(t) = N_\gamma(t) = t \log^\gamma t$ if $t \geq t_\gamma$, where t_γ is large enough. Since these functions grow essentially more slowly than the functions $N_{\alpha,\gamma}(t)$ from Example 3.13, the corresponding Orlicz spaces are wider than the ones from Example 3.13. However, these spaces are extrapolation as well. In fact, since

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-2 \log^\gamma x} \log^\gamma x \, dx < \infty$$

if $\gamma \geq 1$, then (38) holds. Therefore, they coincide with the corresponding Marcinkiewicz spaces.

It is not hard to find the Legendre conjugate function to a function which is equivalent to N_γ as an Orlicz function (see, for example, [18, c. 52]). But it is insufficient because the corresponding Orlicz spaces may be different. At the same time, to find in general case the Legendre conjugate function N_γ^* is not an easy thing. However, if $\gamma = 1$ and $\gamma = 2$ elementary calculations show that

$$N_1^*(p) = e^{p-1} \quad \text{and} \quad N_2^*(p) = p e^{\sqrt{p+1}-1} / \sqrt{p+1},$$

respectively. Therefore, by Theorem 3.7, we have

$$\|x\|_{L_{M_1}} \asymp \sup_{p \geq 1} \|x\|_p \exp \left(-\frac{e^{p-1}}{p} \right) \quad \text{and} \quad \|x\|_{L_{M_2}} \asymp \sup_{p \geq 1} \|x\|_p \exp \left(-\frac{e^{\sqrt{p+1}-1}}{\sqrt{p+1}} \right),$$

where

$$M_1(u) = \exp(\log u \log \log u) \quad \text{and} \quad M_2(u) = \exp(\log u \log^2 \log u),$$

respectively.

Note that in the case $\gamma = 1$ we may make use of Theorem 3.6 as well, without exploiting the fact of coincidence of Orlicz and Marcinkiewicz spaces. We must check only condition (33) which is a consequence of the following inequality

$$e^{t \log t} \leq \int_0^\infty e^{pt - e^{p-1} + p} dp \quad \text{при } t \geq t_0.$$

In fact, the integrand attains its maximum at the point $p_0 = \log(t+1) + 1$. Therefore,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{pt - e^{p-1} + p} dp &\geq \int_{p_0}^{p_0 + \frac{1}{t}} e^{pt - e^{p-1} + p} dp \geq \\ &\geq \frac{1}{t} \exp \left(\left(p_0 + \frac{1}{t} \right) t - e^{p_0 + \frac{1}{t} - 1} + p_0 + \frac{1}{t} \right) = \\ &= \exp \left((t+1) \log(t+1) + t + 2 + \frac{1}{t} - (t+1)e^{\frac{1}{t}} - \log t \right) \geq e^{t \log t} \end{aligned}$$

if t is large enough, because of

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left((t+1) \log(t+1) + t + 2 + \frac{1}{t} - (t+1)e^{\frac{1}{t}} - \log t - t \log t \right) = 1.$$

At last, we give an example of Orlicz spaces generated by functions of the form (32) which do not satisfy the condition of Theorem 3.7.

Пример 3.15. Let the function N_γ be of the same form as in the previous example but now $\gamma \in (0, 1)$. Since

$$\int_{x_0}^\infty e^{-C \log^\gamma x} \log^\gamma x dx = \infty$$

then (39) holds, and the corresponding Orlicz space doesn't coincide with any Marcinkiewicz space. Analogously, Theorem 3.7 cannot be used for the function

$$N(t) = t \log \log t \quad \text{if } t \geq t_0.$$

4 Дискретизация экстраполяционных соотношений

В этом параграфе мы будем рассматривать шкалу пространств L_p с целыми p . В частности, мы увидим, что в некоторых (но не всех) случаях экстраполяционный функтор Δ , примененный к дискретной и непрерывной шкале дает одинаковый результат.

Прежде всего покажем, что в случае дискретной экстраполяции с помощью супремума всегда получается пространство Орлича. Точнее, что норма

$$\|x\|_{\mathcal{L}^d(\omega)} := \sup_{k \in \mathbb{N}} \omega(k) \|x\|_k$$

всегда есть норма Орлича. В силу леммы 3.1, достаточно доказать вложение

$$L_\Delta = \Delta_k L_{M_k} \subset L_M,$$

где

$$M_k(u) = \psi(k)u^k, \quad M(u) = \sup_k \psi(k)u^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$M^1(u) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(u).$$

Пусть

$$x \in L_\Delta \quad \text{и} \quad \|x\|_{L_\Delta} < 1.$$

Тогда

$$\int_0^1 M_k(|x(t)|) dt \leq 1.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 M^1\left(\frac{|x(t)|}{2}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 M_k\left(\frac{|x(t)|}{2}\right) dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

откуда

$$\|x\|_{L_M} \leq \|x\|_{L_{M^1}} \leq 2,$$

т.е. $x \in L_M$. Видно также, что константа вложения L_Δ в L_M не превосходит 2.

Легко видеть, что аналогичные рассуждения применимы и в случае

$$\|x\| = \sup_{k \geq 2} \omega(k) \|x\|_{\log k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В следующем примере показано, что дискретный и непрерывный методы экстраполяции могут приводить к разным пространствам.

Пример 4.1. Рассмотрим функцию

$$x = x(t) = e^{\log^{3/4} 1/t}.$$

Покажем, используя идею асимптотического метода Лапласа, что

$$\|x\|_p \asymp e^{\gamma p^3}, \text{ где } \gamma = \frac{27}{256}. \quad (41)$$

Действительно, после замены $\log 1/t = s$,

$$\|x\|_p^p = \int_1^\infty e^{ps^{3/4}-s} ds.$$

Подынтегральная функция возрастает на $[1, s_p := (3p/4)^4]$ и убывает на (s_p, ∞) . Поэтому

$$\|x\|_p^p \geq \int_{s_p-1}^{s_p} e^{ps^{3/4}-s} ds \geq \exp \left(p \left((3p/4)^4 - 1 \right)^{3/4} - (3p/4)^4 + 1 \right),$$

откуда

$$\|x\|_p \geq ce^{\gamma p^3}.$$

С другой стороны, начиная с некоторого p ,

$$\|x\|_p^p \leq e^{p+\gamma p^4} + \int_{e^p}^\infty e^{-\frac{s}{2}} ds \leq 2e^{p+\gamma p^4}.$$

Объединяя с предыдущим неравенством, получаем (41). Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|x\|_{p+1/2}}{\|x\|_p} = \infty. \quad (42)$$

Пусть

$$\omega = \omega(p) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\|x\|_k} \chi_{[k, k+1)}(p).$$

Ясно, что

$$\omega(p) \downarrow 0, \quad x \in \mathcal{L}^d(\omega), \text{ но } x \notin \mathcal{L}(\omega)$$

в силу (42). Таким образом дискретный и непрерывный методы экстраполяции вообще говоря не эквивалентны в случае произвольного убывающего веса ω .

Покажем, что в случае более регулярного веса ω дискретная и непрерывная экстраполяция дает одно и то же пространство.

Пример 4.2. Пусть φ — квазивогнутая функция. Тогда

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-k}) \|x\|_k \asymp \sup_{p \geq 1} \varphi(2^{-p}) \|x\|_p.$$

Поэтому для пространств L_{M_α} примера 3.13 при $\alpha \geq 2$ также получаем

$$L_{M_\alpha} = \mathcal{L}^d(\exp(-k^{\beta-1}/\beta)), \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

или, подробнее,

$$\|x\|_{L_{M_\alpha}} \asymp \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x\|_k e^{-k^{\beta-1}/\beta}.$$

В заключение параграфа приведем некоторые приложения.

Пусть, как обычно, $x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds$. По с.п. E определим пространство $E(\log^{-1})$ следующим образом: оно состоит из всех таких функций $x(t)$, что $x^{**}(t) \log_2^{-1} 2/t \in E$, с нормой $\|x\|_{E(\log^{-1})} = \|x^{**}(t) \log_2^{-1} 2/t\|_E$. Пространства такого вида возникают как в теории интерполяции операторов слабого типа [16, гл. II, § 6], так и при изучении различных вопросов геометрии с.п. (см., например, [42, Theorem 2.17]). В [14] доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть T — линейный оператор, ограниченный в L_p для всех $p \geq p_0$, и для некоторого $C > 0$

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq Cp \quad (p \geq p_0). \quad (43)$$

Тогда T ограничено действует из E в $E(\log^{-1})$ для любого пространства $E \in \mathcal{SE}$.

Кроме того, это утверждение точно в следующем смысле: существует линейный оператор T_0 , удовлетворяющий условию (43) и такой, что из ограниченности T_0 из $E \in \mathcal{SE}$ в с.п. F следует, что

$$E(\log^{-1}) \subset F.$$

В качестве оператора T_0 в утверждении теоремы можно взять оператор, сопряженный к оператору Харди-Литтлвуда, т.е.

$$T_0 x(t) = \int_t^1 \frac{x(s) ds}{s}.$$

Этот оператор ограничен в L_p , если $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|T_0\|_{L_p \rightarrow L_p} = p$.

Замечание 4.4. Если $E = L_\infty$, то пространство $E(\log^{-1})$ совпадает с пространством Зигмунда $\text{Ehr } L^1$. В этом случае из теоремы 4.3 вытекает утверждение классической теоремы Яно: если выполнено (43), то оператор T ограниченно действует из L_∞ в пространство $\text{Ehr } L^1$.

Из теоремы 4.3 можно получить следующее утверждение о сходимости ортогональных рядов.

Следствие 4.5. Пусть E — сильно экстраполяционное пространство, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная система и для всех $x \in E$ и натуральных N

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n(x) \psi_n \right\|_p \leq Cp \|x\|_p \text{ при } p \geq p_0,$$

где $c_n(x)$ — коэффициенты Фурье функции x . Если система $\{\psi_n\}$ полна в E , то для любого $x \in E$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \psi_n$$

сходится к x в пространстве $E(\log^{-1})$.

Используя известные оценки для роста L_p -норм частичных сумм рядов по тригонометрической системе ($\|S_N x\|_p \leq C \|x\|_p$), получим

Следствие 4.6. Пусть E — сепарабельное сильно экстраполяционное пространство. Тогда тригонометрический ряд Фурье любой функции $x \in E$ сходится к x в норме пространства $E(\log^{-1})$.

Утверждение останется справедливым, если вместо тригонометрического ряда рассматривать ряд Фурье по системе Уолша. Утверждение следствия для пространств Лоренца доказано впервые Лукомским [40, 43], им же показано, что соответствующие нормы точны в определенном классе. Относительно пространств Марцинкевича см. [11].

Список литературы

- [1] Yano, S. An extrapolation theorem / S.Yano // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3, No. 2. P. 296-305.

- [2] Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т.2 / А.Зигмунд. М.: Мир, 1965. 538 с.
- [3] Юдович В.И. О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений / В.И.Юдович // ДАН СССР. 1961. Т.138, по.4. С. 805–808.
- [4] Симоненко, И. Б. Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича / И.Б.Симоненко // Матем. сб. 1964. Т. 63. С. 536-553.
- [5] Kerman, R.A. An integral extrapolation theorem with applications / R.A.Kerman // Studia Mathematica. 1983. Т. LXXVI. p. 183-195.
- [6] Jawerth, B. Extrapolation Spaces with applications / B.Jawerth, M.Milman // Mem. of the Amer. Math. Soc. 1991. V. 89, No. 440. 82 pp.
- [7] Jawerth, B. New Results and Applications of Extrapolation Theory / B.Jawerth, M.Milman // Interpolation spaces and related topics, Haifa, 1990. Israel Math. Conference Proc., 5. 1992. P. 81-105.
- [8] Milman, M. Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis / M.Milman. Berlin. Springer-Verlag, 1994. 162 pp. (Lecture Notes in Math. V. 1580)
- [9] M. Milman, A note on extrapolation theory, J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 282, 26–47.
- [10] Karadzhov, G. Extrapolation theory: New results and applications / G.Karadzhov, M.Milman // J. Approx. Theory. 2005. V. 133, No. 1. P. 38-99.
- [11] Лыков, К.В. Экстраполяция в шкале L_p -пространств и сходимость ортогональных рядов в пространствах Марцинкевича / К.В.Лыков // Вестник СамГУ. 2006. № 2 (42). С. 28–43.
- [12] Лыков, К.В. Критерий сепарабельности экстраполяционного пространства / К.В.Лыков // Вестник СамГУ. 2006. № 4 (44). С. 5–12.
- [13] Асташкин, С.В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞ / С.В.Асташкин, К.В.Лыков // Сиб. матем. ж. 2006. Т. 47. № 5. С. 974–992.

- [14] Асташкин, С.В. Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция / С.В.Асташкин, К.В.Лыков // Сиб. матем. ж. 2009. Т. 50. № 2. С. 250–266.
- [15] Edmunds, D. E. On decomposition in exponential Orlicz spaces / D.E.Edmunds, M.Krbec // Math. Nachr. 2000. V. 213. P. 77-88.
- [16] Крейн, С.Г. Интерполяция линейных операторов / С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семенов. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [17] Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces 2, Function spaces*, J.Lindenstrauss, L.Tzafriri. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979. 244 p.
- [18] Красносельский, М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А.Красносельский, Я.Б.Рутницкий. М.: Физматгиз, 1958. 272 с.
- [19] Рутницкий, Я.Б. О некоторых классах измеримых функций / Я.Б.Рутницкий // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. № 4. С. 205–208.
- [20] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 264 с.
- [21] Edmunds, D. E. Decomposition and Moser’s lemma / D.E.Edmunds, M.Krbec // Rev. Matem. Compl. 2002. V. 15, № 1. P. 57–74.
- [22] Neves, J. On decompositions in generalized Lorentz-Zygmund spaces / J.Neves // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8). 2001. V. 4, No. 1. P. 239-267.
- [23] Fiorenza, A. On an optimal decomposition in Zygmund spaces / A.Fiorenza, M.Krbec // Georgian Math. Jour. 2002. V. 9. No. 2. P. 271-286.
- [24] Мамонтов, А. Е. Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро и медленно растущими N –функциями / А.Е.Мамонтов // Актуальные проблемы современной математики. НГУ. 1996. Т. 2. С. 95-103.
- [25] Мамонтов, А. Е. Шкалы пространств L_p и их связь с пространствами Орлича / А.Е.Мамонтов // Вестник НГУ. Серия “Математика, механика, информатика”. 2006. Т. VI. № 2. С. 33-56.

- [26] Мамонтов, А. Е. О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье-Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости, I / А.Е.Мамонтов // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 2. С. 408-420.
- [27] Мамонтов, А. Е. О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье-Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости, II / А.Е.Мамонтов // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 3. С. 635-649.
- [28] Мамонтов, А. Е. Интегральные представления и преобразования N -функций, I / А.Е.Мамонтов // Сиб. матем. ж. 2006. Т. 47. № 1. С. 123-145.
- [29] Мамонтов, А. Е. Интегральные представления и преобразования N -функций, II / А.Е.Мамонтов // Сиб. матем. ж. 2006. Т. 47. № 4. С. 811-830.
- [30] Mamontov, A.E. Extrapolation from L_p into Orlicz spaces via integral transforms of Young functions / A.E.Mamontov // Journal of Analysis and Applications. 2006. V. 4. No 42. P. 77-118.
- [31] Ostrovsky, E. Exponential Orlicz Spaces: new Norms and Applications / E.Ostrovsky //Electronic Publ., arXiv/FA/0406534, v.1, 25.06.2004.
- [32] Ostrovsky, E. A remark on the inequalities of Bernstein-Markov type in exponential Orlicz and Lorentz spaces / E.Ostrovsky //Electronic Publ., arXiv/FA/0411617, v.1, 27.11.2004.
- [33] Ostrovsky, E. Some new moment rearrangement invariant spaces; theory and applications / E.Ostrovsky //Electronic Publ., arXiv/FA/0605732, v.1, 29.05.2006.
- [34] Асташкин, С.В. Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p -пространств / С.В.Асташкин // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37. № 3. С. 73-77.
- [35] Асташкин, С. В. Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространств / С.В.Асташкин / Матем. сборник. 2003. Т. 194. № 6. С. 23-42.
- [36] Асташкин, С.В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции / С.В.Асташкин // Сиб. матем. ж. 2005. Т. 46. № 2. С. 264-289.

- [37] S. Simons, Minimax and Monotonicity, Lect. Notes in Math. - Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [38] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П.Натансон. М.: Наука, 1974. 480 с.
- [39] L. Maligranda, The K-functional for symmetric spaces, Lect. Notes in Math. 1984. V. 1070, 169–182. Proc. Conf. "Interpolation spaces and Allied Topics in Analysis", Lund, Aug. 29 – Sept. 1, 1983.
- [40] Lukomskii, S.F. Convergence of Fourier series in Lorentz spaces / S.F.Lukomskii // East J. on Approx. 2003. V. 9, No. 2. P. 229-238.
- [41] Lorentz, G.G. Relations between function spaces / G.G.Lorentz // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
- [42] Astashkin S.V., Curbera G.P. *Symmetric kernel of Rademacher multiplier spaces*// J. Funct. Anal. 2005. V. 226. P. 173–192.
- [43] Лукомский, С.Ф. О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L_∞ / С.Ф.Лукомский // Матем. заметки. 2001. Т. 70, No. 6. С. 882-889.