



О сравнении функций распределения случайных величин

С. В. Асташкин

Доказан достаточно общий принцип сравнения функций распределения случайных величин. Как следствие получен критерий эквивалентности по распределению в векторном смысле произвольной последовательности случайных величин системе Радемахера, рассмотрены его применения в некоторых конкретных ситуациях.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Если f – случайная величина (СВ), определенная на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , то, как обычно,

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^p dP \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad Ef := \int_{\Omega} f(\omega) dP.$$

Всюду далее считаем, что все рассматриваемые СВ принадлежат пространству $L_p = L_p(\Omega, \Sigma, P)$ для всех $1 \leq p < \infty$.

В работе [1] (см. также [2]) был доказан следующий принцип сравнения функций распределения СВ.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \geq 0$ и $g \geq 0$ – две СВ, определенные на, вообще говоря, разных вероятностных пространствах, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые “копии” f и g соответственно. Предположим, что

$$\left\| \max_{i=1, \dots, n} f_i \right\|_2 \leq C_1 \left\| \max_{i=1, \dots, n} f_i \right\|_1, \quad (1)$$

$$\left\| \max_{i=1, \dots, n} g_i \right\|_1 \leq C_2 \left\| \max_{i=1, \dots, n} f_i \right\|_1, \quad (2)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от $n \in \mathbb{N}$.

Тогда найдется $C > 0$, зависящее только от C_1 и C_2 , такое, что при всех $z > 0$

$$P\{g > z\} \leq CP\left\{f > \frac{z}{C}\right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96603).

В этой заметке будет получен принцип сравнения функций распределения СВ, условия которого выражены в терминах моментов самих этих величин, без привлечения каких-либо дополнительных конструкций. При этом мы покажем, что эти условия слабее условий (1) и (2) теоремы 1. Доказанный принцип, а также главный результат работы [3] о распределении векторно-значных рядов Радемахера, позволят нам доказать критерий эквивалентности по распределению произвольной последовательности СВ системе Радемахера. В заключительной части работы будут продемонстрированы некоторые применения полученных результатов. Мы покажем, что всякая система Сидона характеров, определенных на компактной абелевой группе, а также любая последовательность вида $\{e^{i\lambda_k t}\}_{k=1}^\infty$, где $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ – топологическое множество Сидона, эквивалентна по распределению в векторном смысле системе Радемахера. В обоих случаях мы используем ранее доказанные утверждения об эквивалентности соответствующих моментов (см. [4] и [5] соответственно).

Всюду в дальнейшем μ – мера Лебега на прямой, а запись $F \asymp G$, $t \in T$, означает, что для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in T$ выполнено $C^{-1}F(t) \leq G(t) \leq CF(t)$.

2. Принцип сравнения функций распределения СВ. Для произвольной СВ $f \geq 0$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{P})$, величина $(Ef^p)^{1/p}$ непрерывна и монотонно возрастает при $p \in [1, \infty)$. Поэтому

$$\alpha_f := Ef \leq (Ef^p)^{1/p} \leq \beta_f := \lim_{p \rightarrow \infty} (Ef^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Следующий главный результат заметки показывает, что при определенных условиях из неравенств для моментов СВ вытекает неравенство для их распределений.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \geq 0$ и $g \geq 0$ – две СВ, определенные на возможно различных вероятностных пространствах. Предположим, что существуют константы $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для всех $p \geq 1$

$$(Ef^{2p})^{1/(2p)} \leq A(Ef^p)^{1/p}, \quad (3)$$

$$(Eg^p)^{1/p} \leq B(Ef^p)^{1/p}. \quad (4)$$

Тогда для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от A и B , и всех $z > 0$

$$\mathcal{P}'\{g > z\} \leq C\mathcal{P}\left\{f > \frac{z}{C}\right\}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, для любого $p \geq 1$ ввиду неравенства Пэли–Зигмунда [6; § 1.6] и условия (3)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left\{f > \frac{1}{3}(Ef^p)^{1/p}\right\} &\geq \mathcal{P}\left\{f \geq \frac{1}{2}(Ef^p)^{1/p}\right\} = \mathcal{P}\{f^p \geq 2^{-p}Ef^p\} \\ &\geq (1 - 2^{-p})^2 \frac{(Ef^p)^2}{Ef^{2p}} \geq (1 - 2^{-p})^2 A^{-2p} \geq (2A)^{-2p}, \end{aligned} \quad (6)$$

где последнее неравенство следует из того, что $(1 - 2^{-p})^2 \geq 2^{-2p}$, если $p \geq 1$. Тем самым, в силу определения α_f

$$\mathcal{P}\{f > z\} \geq (2A)^{-2}, \quad \text{если } 0 < z \leq \frac{\alpha_f}{3}. \quad (7)$$

С другой стороны, в силу неравенства Чебышева и неравенства (4) получаем

$$P'\{g \geq \lambda(Ef^p)^{1/p}\} \leq \lambda^{-p} \frac{Eg^p}{Ef^p} \leq \left(\frac{B}{\lambda}\right)^p$$

для произвольных $p \geq 1$ и $\lambda > 0$. В частности, если $\lambda = Be$, то

$$P'\{g \geq Be(Ef^p)^{1/p}\} \leq e^{-p}, \quad p \geq 1. \quad (8)$$

Кроме того, из последнего соотношения и определения β_f следует, что

$$P'\{g \geq z\} = 0, \quad \text{если } z \geq Be\beta_f. \quad (9)$$

Определим два функционала

$$E(s) := \sup\{p \geq 1 : (Ef^p)^{1/p} \leq s\}, \quad G(s) := \inf\{p \geq 1 : (Ef^p)^{1/p} \geq s\}, \quad s > 0$$

(считаем, что $\sup \emptyset = \inf \emptyset = 1$). Легко видеть, что эти функционалы возрастают и $G(s) \leq E(s)$, $s > 0$.

Если $0 < z < \beta_f/3$, то по определению β_f множество

$$U := \{p \geq 1 : Ef^p \geq (3z)^p\} \neq \emptyset$$

и в силу (6) для каждого $p \in U$

$$P\{f > z\} \geq P\left\{f > \frac{1}{3}(Ef^p)^{1/p}\right\} \geq (2A)^{-2p},$$

откуда по определению G

$$P\{f > z\} \geq (2A)^{-2G(3z)}.$$

Тем самым,

$$P\{f > z\} \geq e^{-C_1 G(3z)}, \quad \text{если } 0 < z < \frac{\beta_f}{3}, \quad (10)$$

где $C_1 := 2 \ln(2A) \geq 1$.

Покажем, что

$$C_1 G(3z) \leq E(3A^{[C_1]+1}z), \quad z > 0,$$

где $[C_1]$ – целая часть числа C_1 . Действительно, так как $M := 2^{[C_1]+1} \geq C_1$, в силу (3) и опять определения G

$$(Ef^{C_1 G(3z)})^{1/(C_1 G(3z))} \leq (Ef^{MG(3z)})^{1/(MG(3z))} \leq A^{[C_1]+1} (Ef^{G(3z)})^{1/G(3z)} = 3zA^{[C_1]+1},$$

и нужное нам неравенство следует из определения функционала E . Таким образом, (10) можно переписать в виде

$$P\{f > z\} \geq e^{-E(C_2 z)}, \quad \text{если } 0 < z < \frac{\beta_f}{3}, \quad (11)$$

где $C_2 := 3A^{[C_1]+1}$.

Далее, если $z > Be\alpha_f$, то по определению α_f множество

$$V := \left\{ p \geq 1 : (Ef^p)^{1/p} \leq \frac{z}{Be} \right\} \neq \emptyset$$

и в силу (8) для каждого $p \in V$

$$P'\{g \geq z\} \leq P'\{g \geq Be(Ef^p)^{1/p}\} \leq e^{-p}.$$

Тем самым, по определению E получаем

$$P'\{g \geq z\} \leq e^{-E(B^{-1}e^{-1}z)}, \quad \text{если } z > Be\alpha_f. \quad (12)$$

Покажем, что неравенство (5) выполняется с константой $C := \max(BeC_2, (2A)^2)$. Пусть сначала $0 < z \leq Be\alpha_f$. Так как $A \geq 1$, то $C_2 \geq 3$ и $C \geq 3Be$. Поэтому в этом случае $z/C \leq \alpha_f/3$ и, значит, из (7) и выбора C следует, что

$$P'\{g > z\} \leq 1 \leq (2A)^2 P\left\{f > \frac{z}{C}\right\} \leq CP\left\{f > \frac{z}{C}\right\}.$$

Если $Be\alpha_f < z < Be\beta_f$, то $z/C < \beta_f/3$, и поэтому ввиду (11), (12) и неравенства $Be \leq C/C_2$

$$P'\{g > z\} \leq e^{-E(B^{-1}e^{-1}z)} \leq e^{-E(C_2z/C)} \leq P\left\{f > \frac{z}{C}\right\}.$$

И наконец, если $z \geq Be\beta_f$, то из (9) следует $P'\{g > z\} = 0$, и, тем самым, неравенство (5) опять выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 2 сильнее теоремы 1, так как ее условия (3) и (4) являются следствиями соответствующих условий теоремы 1, неравенств (1) и (2). Действительно, прежде всего, нетрудно показать [7; предложение 2], что с константой, не зависящей от СВ f и $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \max_{i=1, \dots, n} f_i \right\|_p \asymp n \left(\int_0^{n^{-p}} (f^*(t))^p dt \right)^{1/p},$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка $|f|$ относительно P , т.е.

$$f^*(t) = \inf \{ \tau \geq 0 : P\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} < t \}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Поэтому условия (1) и (2) эквивалентны соотношениям

$$\left(\int_0^{1/n^2} (f^*(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq C_1 \int_0^{1/n} f^*(t) dt, \quad \int_0^{1/n} g^*(t) dt \leq C_2 \int_0^{1/n} f^*(t) dt$$

соответственно, где константы C_1 и C_2 не зависят от $n \in \mathbb{N}$. В свою очередь, используя известные выражения для $\mathcal{H}$ -функционалов пар L_p -пространств [8; теорема 5.2.1], последние неравенства можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{H}(t, f^*; L_2, L_\infty) \leq 2C_1 \mathcal{H}(t, f^*; L_1, L_\infty), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (13)$$

$$\mathcal{H}(t, g^*; L_1, L_\infty) \leq 2C_2 \mathcal{H}(t, f^*; L_1, L_\infty), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (14)$$

соответственно. Так как с константами, не зависящими от $p \in [1, \infty)$, $(L_1, L_\infty)_{1/p', p} = L_p$ и $(L_2, L_\infty)_{1/p', p} = L_{2p}$, где $p' = p/(p-1)$, а $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$ – функтор вещественного $\mathcal{H}$ -метода [8; теорема 5.2.1], откуда мы сразу получаем соотношения (3) и (4). В то же время, можно показать, что неравенство (13) для $\mathcal{H}$ -функционалов, эквивалентное условию (1) теоремы 1, вообще говоря, не является следствием неравенств (3) и (4) (ср. [9; предложение 2]).

Применим доказанную теорему к вопросу сравнения систем СВ с “модельной” системой Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^\infty$, где, как обычно, $r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t$, $0 \leq t \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность СВ, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , такая, что

$$\left\| \left\| \sum_{n=1}^m x_n g_n \right\|_F \right\|_p \leq B \left\| \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F \right\|_p,$$

где константа B не зависит от банахова пространства F , $m \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n=1}^m \subset F$ и $p \in [1, \infty)$. Тогда существует такое $C > 0$, что для произвольного банахова пространства F и всех $m \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n=1}^m \subset F$ и $z > 0$ выполнено

$$P \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n g_n(\omega) \right\|_F > z \right\} \leq C \mu \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n(t) \right\|_F > \frac{z}{C} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что для случайной величины

$$f(t) = \left\| \sum_{k=1}^m x_k r_k(t) \right\|_F, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

неравенство (3) выполняется с константой A , не зависящей от F , $m \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n=1}^m \subset F$ и $p \in [1, \infty)$ [10; теорема 1.e.13]. Поэтому утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.

3. Системы СВ, эквивалентные по распределению системе Радемахера. Приведем сначала ряд определений. Системы СВ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на вероятностных пространствах (Ω, Σ, P) и (Ω', Σ', P') соответственно, назовем эквивалентными по распределению в векторном смысле, если существует такое $C > 0$, что для любого банахова пространства F и произвольных $m \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, $n = 1, 2, \dots, m$, и $z > 0$

$$\begin{aligned} C^{-1} P \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n f_n(\omega) \right\|_F > Cz \right\} &\leq P' \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n g_n(\omega') \right\|_F > z \right\} \\ &\leq C P \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n f_n(\omega) \right\|_F > C^{-1} z \right\}. \end{aligned}$$

Важную роль в различных разделах анализа, таких, как теория интерполяции операторов, теория аппроксимаций и т.д., играет $\mathcal{H}$ -функционал Петре, определяемый следующим образом: если (X_0, X_1) – произвольная банахова пара (т.е. два банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в одно отделимое линейное топологическое пространство), то

$$\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i \},$$

где $x \in X_0 + X_1$, а $t > 0$. Далее нам потребуется $\mathcal{K}$ -функционал

$$\mathcal{K}_{1,2}(t, a) := \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2), \quad a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2, \quad t > 0,$$

построенный по банаховой паре (l_1, l_2) . Напомним самую известную из его аппроксимаций, которая получается за счет применения так называемой формулы Хольмстедта (см. [11] или [8; теорема 3.6.1]):

$$\mathcal{K}_{1,2}(t, a) \asymp \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2}, \quad t > 0,$$

где $(a_i^*)_{i=1}^\infty$ – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^\infty$.

Далее, если $1 \leq p < \infty$, а F – банахово пространство, то последовательность $(x_n) \subset X$ называется *слабо p -суммируемой* при условии, что для каждого $x^* \in F^*$ скалярная последовательность $(x^*(x_n))$ принадлежит l_p . Множество всех слабо p -суммируемых последовательностей образует банахово пространство, обозначаемое $l_p^w(F)$, с нормой

$$\|(x_n)\| = \sup_{\|x^*\|_{F^*} \leq 1} \|(x^*(x_n))\|_{l_p}.$$

Если $(x_n) \in l_2^w(F)$, то по определению

$$\mathcal{K}_{1,2}^w(t, (x_n)) = \sup_{\|x^*\|_{F^*} \leq 1} \mathcal{K}_{1,2}(t, x^*(x_n)).$$

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующий критерий эквивалентности по распределению в векторном смысле произвольной последовательности СВ системе Радемахера.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность СВ, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) системы $\{f_n\}$ и $\{r_n\}$ эквивалентны по распределению в векторном смысле;
- 2) с константой, не зависящей от банахова пространства F , $(x_n)_{n=1}^m \subset F$, $m \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$, выполнено

$$\left\| \left\| \sum_{n=1}^m x_n f_n \right\|_F \right\|_p \asymp \left\| \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F \right\|_p;$$

- 3) с константой, не зависящей от банахова пространства F , $(x_n)_{n=1}^m \subset F$, $m \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$, выполнено

$$\left\| \left\| \sum_{n=1}^m x_n f_n \right\|_F \right\|_p \asymp \|\mathcal{R}\|_1 + \mathcal{K}_{1,2}^w(\sqrt{p}, (x_n)), \quad (15)$$

где $\mathcal{R}(t) = \|\sum_{k=1}^m x_k r_k(t)\|_F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [3] доказано, что с константой, не зависящей от банахова пространства F , $m \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n=1}^m \subset F$ и $p \in [1, \infty)$,

$$\left\| \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F \right\|_p \asymp \|\mathcal{R}\|_1 + \mathcal{K}_{1,2}^w(\sqrt{p}, (x_n)). \quad (16)$$

Тем самым, эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 3) очевидна. Так как импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из определения эквивалентности систем по распределению, остается доказать лишь импликацию 3) $\Rightarrow$ 1).

Неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\left\|\sum_{n=1}^m x_n f_n(\omega)\right\|_F > z\right\} \leq C\mu\left\{\left\|\sum_{n=1}^m x_n r_n(t)\right\|_F > \frac{z}{C}\right\}, \quad z > 0,$$

с некоторым $C > 0$ вытекает сразу из следствия 1. Покажем, что верно также и противоположное соотношение.

Определим для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^m \subset F$

$$\kappa(t, (x_n)) = \|\mathcal{R}\|_1 + \mathcal{K}_{1,2}^w(\sqrt{t}, (x_n)), \quad t > 0,$$

$$\mathcal{F}(\omega) = \left\|\sum_{n=1}^m x_n f_n(\omega)\right\|_F, \quad \omega \in \Omega.$$

Заметим, что ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала

$$\kappa(2t, (x_n)) \leq \sqrt{2}\kappa(t, (x_n)), \quad t > 0.$$

Поэтому, так как по условию (15) с некоторым $C_1 > 0$

$$C_1^{-1}\kappa(t, (x_n)) \leq (\mathbb{E}\mathcal{F}^t)^{1/t} \leq C_1\kappa(t, (x_n)), \quad t \geq 1,$$

то

$$(\mathbb{E}\mathcal{F}^{2t})^{1/(2t)} \leq C_1\kappa(2t, (x_n)) \leq \sqrt{2}C_1\kappa(t, (x_n)) \leq \sqrt{2}C_1^2(\mathbb{E}\mathcal{F}^t)^{1/t}, \quad t \geq 1.$$

Таким образом, для СВ $\mathcal{F}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, и $\mathcal{R}(t)$, $t \in [0, 1]$, выполнены условия теоремы 2. Применяя ее, получаем нужное неравенство.

Рассмотрим некоторые более конкретные приложения полученных результатов.

Пусть G – компактная абелева группа с вероятностной мерой Хаара θ , Γ – группа характеров, определенных на G , $C(G)$ – пространство непрерывных комплекснозначных функций на G . Множество $E \subset \Gamma$ называют *множеством Сидона*, если при некотором $C_E > 0$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)| \leq C_E \|f\|_\infty$$

для всякой $f \in C(G)$ такой, что

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(s)\gamma(-s) d\theta = 0, \quad \text{если } \gamma \notin E.$$

Пизье доказал следующую теорему, иллюстрирующую тесную связь между произвольной системой Сидона характеров и системой Радемахера [4; теорема 2.1].

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что $E = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ – множество Сидона, F – банахово пространство и $x_1, \dots, x_m \in F$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от константы Сидона C_E , такая, что для всех $p \in [1, \infty)$*

$$C^{-1} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_G \left\| \sum_{n=1}^m x_n \gamma_n \right\|_F^p d\theta \right)^{1/p} \leq C \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F^p \right)^{1/p}.$$

Из этого результата, а также теоремы 3 непосредственно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $E = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ – множество Сидона и F – банахово пространство. Тогда существует константа $B > 0$, зависящая только от константы Сидона C_E , такая, что для всех $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in F$ и всех $z > 0$*

$$\begin{aligned} B^{-1} \mu \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n(t) \right\|_F > Bz \right\} &\leq \theta \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n \gamma_n(g) \right\|_F > z \right\} \\ &\leq B \mu \left\{ \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n(t) \right\|_F > B^{-1}z \right\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение теоремы 5 ранее было получено в работе [1] на основе теоремы 1, приведенной во введении, и теоремы 4. Отметим, что ее вывод там не столь прост: авторам [1] понадобился целый ряд дополнительных вспомогательных утверждений.

Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию. Напомним [12], что возрастающая последовательность $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$ положительных чисел называется *топологическим множеством Сидона*, если существует компактное множество $K \subset \mathbb{R}$ и $C > 0$ такие, что для каждой последовательности чисел $(a_k)_{k=1}^\infty$

$$C^{-1} \sum_{k=1}^\infty |a_k| \leq \sup_{t \in K} \left| \sum_{k=1}^\infty a_k e^{i\lambda_k t} \right|.$$

Важный пример топологического множества Сидона – последовательность $(\lambda_k)_{k=1}^\infty$, удовлетворяющая условию Адамара, т.е. такая, что $\inf_k \lambda_{k+1} \lambda_k^{-1} \geq q > 1$ [12].

Пелчинский доказал следующий результат [5; теорема 3].

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ – топологическое множество Сидона. Тогда для каждого отрезка $\Delta = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, существует константа $C = C(\Delta)$ такая, что для произвольного банахова пространства F , всех $x_1, \dots, x_m \in F$ и $1 \leq p < \infty$ выполнено*

$$C^{-1} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b \left\| \sum_{n=1}^m x_n e^{i\lambda_n t} \right\|_F^p dt \right)^{1/p} \leq C \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n \right\|_F^p \right)^{1/p}.$$

Из этой теоремы и теоремы 3 получаем

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ – топологическое множество Сидона. Тогда для каждого отрезка $\Delta = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, существует такая константа $B = B(\Delta)$, что для произвольного банахова пространства F , всех $x_1, \dots, x_m \in F$ и $z > 0$ выполнено*

$$\begin{aligned} B^{-1} \mu \left\{ t \in [0, 1] : \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n(t) \right\|_F > Bz \right\} &\leq \mu \left\{ t \in [a, b] : \left\| \sum_{n=1}^m x_n e^{i\lambda_n t} \right\|_F > z \right\} \\ &\leq B \mu \left\{ t \in [0, 1] : \left\| \sum_{n=1}^m x_n r_n(t) \right\|_F > B^{-1}z \right\}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Asmar, S. Montgomery-Smith, “On the distribution of Sidon series”, *Ark. Mat.*, **31**:1 (1993), 13–26.
- [2] V.H. de la Peña, S.J. Montgomery-Smith, J. Szulga, “Contraction and decoupling inequalities for multilinear forms and U -statistics”, *Ann. Probab.*, **22**:4 (1994), 1745–1765.
- [3] S.J. Dilworth, S.J. Montgomery-Smith, “The distribution of vector-valued Rademacher series”, *Ann. Probab.*, **21**:4 (1993), 2046–2052.
- [4] G. Pisier, “Les inégalités de Khintchine-Kahane, d’après C. Borell”, *Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach* (1977–1978), École Polytechnique, Palaiseau, 1978, Exp. No. 7, 14 pp.
- [5] A. Pelczyński, “Commensurate sequences of characters”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:2 (1988), 525–531.
- [6] Ж.-П. Кахан, *Случайные функциональные ряды*, Мир, М., 1973.
- [7] С.В. Асташкин, “О выделении подсистем, “мажорируемых” системой Радемахера”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 483–495.
- [8] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [9] С.В. Асташкин, К.В. Лыков, “Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, “близких” к L_∞ ”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:5 (2006), 974–992.
- [10] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [11] T. Holmstedt, “Interpolation of quasi-normed spaces”, *Math. Scand.*, **26**:1 (1970), 177–199.
- [12] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland Math. Library, **2**, North-Holland Publ., Amsterdam–London, 1972.

С.В. Асташкин

Самарский государственный университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило

19.08.2008

Исправленный вариант

19.05.2009