

Посвящаю Асе – за терпение и понимание

УДК 517.5+517.982

ФУНКЦИИ РАДЕМАХЕРА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© г. С.В.АСТАШКИН

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	1
§ 0. Определения, обозначения, предварительные сведения	3
1. Банаховы идеальные пространства.	3
2. Симметричные пространства.	4
3. Несколько понятий и результатов из теории вероятностей.	7
4. Базисные последовательности и лакунарные системы.	8
5. Интерполяция операторов и пространства вещественного метода.	11
§ 1. Простейшие свойства функций Радемахера	13
§ 2. Суммы Радемахера в L_p -пространствах и их распределение	25
§ 3. Система Радемахера в симметричных пространствах, "далеких" от L_∞	33
§ 4. Система Радемахера в симметричных пространствах, "близких" к L_∞	42
§ 5. Функции Радемахера и конусы ступенчатых функций	60
§ 6. Хаос Радемахера в симметричных пространствах	69
§ 7. Подпространство $\text{Rad } X$	89
§ 8. Системы, эквивалентные по распределению системе Радемахера	96
§ 9. Выделение лакунарных подсистем	108
§ 10. Пространство мультипликаторов, порожденное системой Радемахера	127
Список литературы	148
Предметный указатель	153
Указатель обозначений	156

ПРЕДИСЛОВИЕ

Система Радемахера или, иначе, последовательность Бернулли независимых одинаково и симметрично распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 , является классическим объектом теории ортогональных рядов и теории вероятностей, имеющим многочисленные приложения как внутри этих разделов, так и в ряде других смежных, прежде всего, в геометрической теории банаховых пространств, теории операторов, гармоническом анализе и математической статистике. Тема этой книги более конкретна: изучение системы Радемахера в симметричных (перестановочно инвариантных) функциональных пространствах. Если не считать классических результатов для L_p -пространств, таких, как неравенство Хинчина, то первой работой, посвященной этой тематике, явилась статья В.А. Родина и Е.М. Семенова, опубликованная в 1975 году. В ней, с одной стороны, был решен ряд принципиальных вопросов, относящихся к поведению системы Радемахера в симметричных пространствах, с другой, были намечены пути для дальнейшего исследования. Напомним, что пятидесятые - шестидесятые годы прошлого века — это время выхода в свет первых работ (прежде всего, Г. Лоренца и Е.М. Семенова), посвященных общим симметричным пространствам. Опубликованные вскоре монографии С.Г. Крейна,

©РУДН

Ю.И. Петунина и Е.М. Семенова "Интерполяция линейных операторов" и Й. Линденштраусса и Л. Цаффрири "Классические банаховы пространства" подвели определенный итог проводившимся исследованиям.

Новый импульс изучение системы Радемахера в симметричных пространствах получило немного позднее, в девяностые годы после работ С. Монтгомери-Смита и П. Хитченко, сумевших существенно уточнить неравенство Хинчина. При этом явно или неявно центральную роль в этих работах играл $\mathcal{K}$ -функционал Петре, один из основных инструментов в современной теории интерполяции операторов. Позднее, в работах автора было показано, что эта теория и, прежде всего, вещественный $\mathcal{K}$ -метод, представляет из себя весьма естественное и, самое главное, действенное средство как при описании подпространств, порожденных системой Радемахера в симметричных пространствах, так и при сравнении ее с общими системами измеримых функций (случайных величин). Пожалуй, именно изучение связи между свойствами системы Радемахера и интерполяционными конструкциями является главной темой этой книги.

Следует сказать несколько слов о том, почему именно симметричные пространства являются наиболее естественной "ареной" для системы Радемахера, почему в этом случае возникает достаточно содержательная и интересная теория. Дело, видимо, прежде всего, в том, что функции Радемахера порождают в каждом симметричном пространстве симметричное же пространство последовательностей, которое, как правило, допускает достаточно простое описание, причем, как мы увидим далее, во многих случаях не единственное.

Для чтения книги требуется определенное знакомство с теорией симметричных пространств и теорией интерполяции операторов. Для удобства читателя в § 0 производится краткий экскурс в эти и некоторые другие разделы функционального анализа и теории функций. Затем, в § 1, излагаются классические факты, относящиеся к системе Радемахера, связанные, главным образом, со сходимостью рядов и оценками L_p -норм полиномов. Центральное место здесь принадлежит неравенству Хинчина и его вариантам. Здесь же получены некоторые используемые в дальнейшем свойства системы Радемахера в общих симметричных пространствах. В § 2 приводятся более поздние результаты, уточняющие неравенства Хинчина, которые до сих пор не получили какого-либо отражения в монографической литературе; отсюда начинается интенсивное применение интерполяционных методов. Основное содержание § 3 и § 4 составляет изучение подпространства симметричного пространства, порожденного системой Радемахера. Как выясняется при этом, свойства его определяются, прежде всего, степенью "близости" симметричного пространства к пространству L_∞ . В следующем, § 5, рассматривается еще одна возможность описания этого подпространства — в виде конуса ступенчатых функций. В § 6 речь идет о хаосе Радемахера; найдены необходимые и достаточные условия его безусловности в симметричном пространстве. В § 7 рассматриваются свойства подпространства симметричного пространства на квадрате, порожденного системой Радемахера с векторными коэффициентами. Следующие два параграфа, § 8 и § 9, менее других связаны с теорией симметричных пространств, хотя интерполяционные методы продолжают по-прежнему играть важную роль. Здесь изучаются проблемы сравнения произвольных систем измеримых функций (случайных величин) с системой Радемахера, а также выделения лакунарных подсистем, эквивалентных по распределению этой "модельной" системе. И наконец, последний, § 10, посвящен изучению пространства мультипликаторов, порожденных системой Радемахера. Нас интересует, прежде всего, ответ на вопрос, при каких условиях это пространство является симметричным. Каждый параграф имеет свою собственную нумерацию. Для указания на то, что равенство является определением, мы вместо знака $=$ используем знак $:=$. Через $\text{card } E$ будет обозначаться число элементов конечного множества E , а через $[x]$ — целая часть вещественного числа x .

Заметим, что за пределами этой книги остались как вопросы изучения векторно-значных рядов Радемахера, так и приложения функций Радемахера в геометрической теории банаховых пространств. Проблематика, связанная с каждой из этих тем, в последнее время весьма интенсивно развивается и может стать достаточным основанием для написания отдельной книги.

Каждый параграф, начиная с § 1, завершается комментариями и литературными указаниями, относящимися к его содержанию. Их роль состоит не столько в перечислении первоисточников, сколько в указании на связь вопросов, рассматриваемых в этой книге, с близкой проблематикой.

Разумеется, не все работы, достойные внимания, отмечены. Мы стремились указать, в основном, на ключевые работы, что в некоторой мере компенсирует эту неполноту.

Материал первых трех параграфов книги послужил основой спецкурса, прочитанного студентам Самарского госуниверситета весной и осенью 2004 года. Кроме того, результаты, составляющие содержание книги, неоднократно докладывались автором на различных семинарах, школах и конференциях. Так, часть результатов из § 4 и § 10 составила содержание докладов на конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Самара, 1996), на Всероссийской зимней математической школе (Воронеж, 1997 и 2001), на кафедральном семинаре по теории функций Самарского госуниверситета (Самара, 2002 и 2007), на семинаре технологического университета г. Лулео (Швеция, 2002), на семинарах университетов г. Мадрид и г. Севилья (Испания, 2002 и 2003). С результатами из § 6 автор выступал на семинарах в МИРАН под руководством член-корр. РАН Б.С.Кашина (Москва, 1997) и в МГУ под руководством член-корр. РАН П.Л.Ульянова и Б.С.Кашина (Москва, 1998), на конференции "Алгебра и анализ" (Казань, 1997), на международных конференциях по математическому анализу (Санкт-Петербург, 1998) и "Гармонический анализ и аппроксимация" (Армения, 1998), на Всероссийской зимней математической школе (Воронеж, 2007). И наконец, результаты § 8 и § 9 докладывались на семинарах в МИРАН под руководством член-корр. РАН Б.С.Кашина (Москва, 1999) и в МГУ под руководством член-корр. РАН П.Л.Ульянова и Б.С.Кашина (Москва, 1999), на Всероссийской школе-коллоквиум по стохастическим методам (Самара, 1999), на международных конференциях по математическому анализу (Санкт-Петербург, 1999), "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 1999) и "Функциональные пространства" (Вроцлав, 2001).

Я благодарен своему учителю Е.М.Семенову, а также соавтору и другу Ф.А.Сукочеву, которые прочитали рукопись этой книги и сделали ряд ценных критических замечаний. Особо признателен своему ученику К.В.Лыкову, фактически выполнившему роль научного редактора книги, благодаря самоотверженной работе которого удалось значительно уменьшить количество ошибок и опечаток.

§ 0

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. БАНАХОВЫ ИДЕАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств множества T . Совокупность всех почти всюду конечных измеримых вещественнозначных функций (классов эквивалентности) на T с естественными алгебраическими операциями и топологией сходимости по мере μ на множествах конечной меры является линейным топологическим пространством, которое мы будем обозначать через $S(T, \Sigma, \mu)$. Как обычно, функции, совпадающие почти всюду, отождествляются, а запись $x \leq y$ ($x, y \in S(T, \Sigma, \mu)$) означает, что $x(t) \leq y(t)$ при почти всех (п.в.) $t \in T$.

Далее будут рассматриваться, главным образом, следующие конкретные случаи пространства $S(T, \Sigma, \mu)$:

- (a) $S(I)$, где $I = [0, 1]$, с мерой Лебега;
- (b) $S(I \times I)$ с мерой Лебега;
- (c) $S(\mathbb{Z})$, $\mu(\{k\}) = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- (d) $S(\mathbb{N})$, $\mu(\{k\}) = 1$ ($k \in \mathbb{N}$);
- (e) $S(0, \infty)$ с мерой Лебега.

Всюду в дальнейшем через $m(B)$ будет обозначаться мера Лебега множества $B \subset \mathbb{R}^n$, а через $\chi_B(t)$ — характеристическая функция множества $B \subset T$, т.е.

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1, & t \in B \\ 0, & t \notin B. \end{cases}$$

Линейное подпространство $E \subset S(T, \Sigma, \mu)$ называется *идеальным*, если при всех $y \in E$ множество $\{x \in S(T, \Sigma, \mu) : |x| \leq |y|\} \subset E$. Идеальное пространство E , наделенное *монотонной* нормой (т.е. $\|x\| \leq \|y\|$ для любых $x, y \in E$ таких, что $|x| \leq |y|$), называется *нормированным идеальным* пространством. Если, кроме того, пространство полно относительно нормы, то его называют *банаховым идеальным* пространством (*банаховой решеткой*).

Любое банахово идеальное пространство E над пространством с мерой (T, Σ, μ) линейно и непрерывно вложено в отделимое линейное топологическое пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ [37, теорема 4.3.1]. Это означает, в частности, что из сходимости $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$ ($x_n, x \in E$) следует сходимость $x_n \rightarrow x$ по мере μ на множествах конечной меры из T .

Если E – банахово идеальное пространство, то *ассоциированное* (или *двойственное*) пространство E' состоит из всех $y \in S(T, \Sigma, \mu)$, для которых

$$\|y\|_{E'} = \sup \left\{ \int_T x(t)y(t) d\mu : \|x\|_E \leq 1 \right\} < \infty$$

(разумеется, в случае пространства последовательностей интеграл нужно заменить суммой). Пространство E' изометрически вложено в сопряженное E^* . Любое банахово идеальное пространство E непрерывно вложено в свое второе двойственное, которое будет обозначаться через E'' . Норма в БИП E называется *порядково полунепрерывной*, если из того, что $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$), $x \in E$ и $x_n \rightarrow x$ п.в. на T , следует: $\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E$. Норма в E порядково полунепрерывна тогда и только тогда, когда E вложено в E'' изометрически [37, теорема 6.1.6], т.е.

$$\|x\|_E = \sup \left\{ \int_T x(t)y(t) d\mu : \|y\|_{E'} \leq 1 \right\}.$$

Банахово идеальное пространство E называется *максимальным* (имеет *свойство Фату*), если из того, что $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$), $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_E < \infty$, $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ и $x_n \rightarrow x$ п.в. на T , следует: $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E$. Пространство E *максимально*, если и только, если его естественное вложение в E'' является сюръективной изометрией (иначе: $E = E''$) [37, теорема 6.1.7]. Говорят, что элемент $x \in E$ имеет в банаховом идеальном пространстве E *абсолютно непрерывную* норму, если для произвольной монотонно убывающей последовательности измеримых множеств $B_n \subset T$ ($n = 1, 2, \dots$) такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, выполнено: $\|x \cdot \chi_{B_n}\|_E \rightarrow 0$. Если E – банахово идеальное пространство над одним из ранее перечисленных пространств с мерой (а) – (е), то оно сепарабельно тогда и только тогда, когда любой $x \in E$ имеет абсолютно непрерывную норму. Кроме того, каждое из этих условий эквивалентно совпадению (изометрическому) двойственного пространства E' с сопряженным E^* . Подробное изложение теории банаховых идеальных пространств см. в монографиях [37] и [77].

2. СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Важный частный случай банаховых идеальных пространств – симметричные пространства, которые можно рассматривать как естественное обобщение пространств p -суммируемых функций. Теория симметричных (перестановочно инвариантных) пространств составляет содержание монографий [46, 114, 77]; мы здесь напомним лишь некоторые необходимые в дальнейшем определения и результаты, которые относятся, в основном, к пространствам функций, определенных на $[0, 1]$.

Для функции $x = x(t) \in S[0, 1]$, $x \geq 0$, введем функцию распределения $n_x(\tau)$:

$$n_x(\tau) = m\{t \in [0, 1] : x(t) > \tau\} \quad (\tau > 0).$$

Она неотрицательна, не возрастает и непрерывна справа. Две неотрицательные функции $x \in S[0, 1]$ и $y \in S[0, 1]$ называются *равноизмеримыми*, если $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ для всех $\tau > 0$. В частности, любая функция $x \in S[0, 1]$, $x \geq 0$ равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева перестановкой

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) < t\} \quad (0 < t \leq 1).$$

Для произвольной функции $x(t) \in S[0, 1]$ через $x^*(t)$ обозначается перестановка функции $|x(t)|$.

Определение 0.1. Банахово идеальное пространство $X \subset S[0, 1]$ называется *симметричным* (с.п.), если из того, что $x \in X$, $y \in S[0, 1]$ и функции $|x|$ и $|y|$ равноизмеримы, следует: $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Приведем примеры с.п. Во-первых, это пространства L_p ($1 \leq p \leq \infty$):

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |x(t)|, & p = \infty \end{cases},$$

а также их обобщение — семейство пространств $L_{p,q}$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$):

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \left[\frac{q}{p} \int_0^1 (t^{1/p} x^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in [0,1]} (t^{1/p} x^*(t)), & q = \infty, \end{cases}$$

играющих важную роль в теории интерполяции операторов. Хотя функционал $\|x\|_{p,q}$ не субаддитивен, он эквивалентен норме $\|x\|'_{p,q} = \|x^{**}\|_{p,q}$, где

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds.$$

Нетрудно проверить [46, лемма 2.6.5], что $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$ ($1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$) и $L_{p,p} = L_p$.

Другим естественным обобщением L_p -пространств являются пространства Орлича [45, 117]. Если $M(u)$ — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$, то *пространство Орлича* L_M состоит из всех таких $x \in S[0, 1]$, что существует $\lambda > 0$, при котором

$$\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right) dt \leq 1.$$

В дальнейшем в качестве нормы в этом пространстве мы будем использовать *норму Люксембурга* $\|x\|_{L_M} = \inf \lambda$, где точная нижняя грань берется по всем λ , для которых выполнено последнее неравенство. Пространство $(L_M)'$, двойственное к L_M , совпадает также с пространством Орлича L_{M^*} , построенным по функции $M^*(u)$, дополнительной (в смысле Юнга) к $M(u)$, т.е.

$$M^*(u) = \sup_{v \geq 0} (uv - M(v))$$

(см. [45, § 14]).

Важную роль в дальнейшем играет один функциональный класс. Напомним, что неотрицательная функция $\varphi(t)$, определенная при $t \geq 0$, называется *квазивогнутой*, если $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t)$ возрастает, а $\varphi(t)/t$ убывает. В частности, всякая неотрицательная вогнутая на полуоси $(0, \infty)$ функция, доопределенная в нуле нулем, будет квазивогнутой [46, § 2.1, с. 67]. С другой стороны, всякая квазивогнутая функция $\varphi(t)$ на множестве $[0, \infty)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\bar{\varphi}(t)$ [46, теорема 2.1.1], точнее,

$$\frac{1}{2} \bar{\varphi}(t) \leq \varphi(t) \leq \bar{\varphi}(t) \quad (t > 0).$$

Если φ — квазивогнутая функция, а $p \in [1, \infty)$, то *пространство Лоренца* $\Lambda_p(\varphi)$ состоит из всех $x \in S[0, 1]$, для которых

$$\|x\|_{\varphi,p} = \left(\int_0^1 (x^*(t))^p d\bar{\varphi}(t) \right)^{1/p} < \infty,$$

где по-прежнему $\bar{\varphi}$ — наименьшая вогнутая мажоранта φ . В частности, $\Lambda(\varphi) := \Lambda_1(\varphi)$. *Пространство Марцинкевича* $M(\varphi)$ — множество всех $x \in S[0, 1]$, для которых

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x^*(s) ds < \infty.$$

Пространства Лоренца и Марцинкевича двойственны по отношению друг к другу, т.е. $(\Lambda(\varphi))' = M(\varphi)$ и $(M(\varphi))' = \Lambda(\varphi)$ [46, теоремы 2.5.2 и 2.5.4].

Если X и Y — банаховы пространства, то запись $X \subset Y$ всюду в дальнейшем означает, что X линейно и непрерывно вложено в Y , т.е. из $x \in X$ следует, что $x \in Y$, структура X как

подпространства Y совпадает со структурой линейного пространства Y , а также существует такая константа $C > 0$, что для всех $x \in X$ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$. Нетрудно проверить [46, теорема 2.4.1], что среди всех с.п. на отрезке $[0, 1]$ относительно введенного порядка есть наибольшее и наименьшее. А именно, для произвольного с.п. X

$$L_\infty \subset X \subset L_1.$$

Через X° мы будем обозначать *сепарабельную часть* с.п. X , т.е. замыкание L_∞ в X . Заметим, что X° само является с.п., которое сепарабельно, если только $X \neq L_\infty$ [46, лемма 2.4.4]. В частности, пространство $M(\varphi)^\circ$ может быть охарактеризовано как множество всех таких функций $x(t)$, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x^*(s) ds = 0.$$

Важной характеристикой с.п. является его *фундаментальная функция* $\varphi_X(s) := \|\chi_{(0,s)}\|_X$ ($0 \leq s \leq 1$). Легко проверить, что

$$\varphi_{L_{p,q}}(s) = s^{1/p} \ (1 \leq q \leq \infty), \ \varphi_{\Lambda(\varphi)}(s) = \bar{\varphi}(s) \text{ и } \varphi_{M(\varphi)}(s) = \tilde{\varphi}(s), \text{ где } \tilde{\varphi}(s) = s/\varphi(s).$$

Кроме того,

$$\varphi_{L_M}(s) = \frac{1}{M^{-1}(1/s)} \ (M^{-1} \text{ — функция, обратная к } M).$$

Для любого с.п. φ_X — квазивогнутая функция на $[0, 1]$ [46, теорема 2.4.7], а пространства Лоренца и Марцинкевича экстремальны в классе с.п. с одной и той же фундаментальной функцией [46, теоремы 2.5.5 и 2.5.7]. Точнее, если φ — фундаментальная функция с.п. X , то

$$\Lambda(\varphi) \subset X \subset M(\tilde{\varphi}).$$

Функция растяжения $\mathcal{M}_f(t)$ функции f , определенной на $(0, l)$, где $l = 1$ или $l = \infty$, задается равенством:

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup \left\{ \frac{f(st)}{f(s)} : s \in (0, l \min(1, 1/t)) \right\}, \ t > 0.$$

Так как $\mathcal{M}_f$ полумультимпликативна (т.е. $\mathcal{M}_f(t_1 t_2) \leq \mathcal{M}_f(t_1) \cdot \mathcal{M}_f(t_2)$ для произвольных $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$), то существуют числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t} = \sup_{0 < t < 1} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t}$$

и

$$\delta_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t} = \inf_{1 < t < \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t},$$

называемые соответственно *нижним и верхним показателями растяжения* функции f [46, § 2.1, с. 75-76]. Если φ — квазивогнутая функция, то $0 \leq \gamma_\varphi \leq \delta_\varphi \leq 1$.

В каждом с.п. X непрерывен *оператор растяжения*

$$\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \cdot \chi_{[0, \min(1, \tau)]}(t) \ (\tau > 0)$$

и $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ [46, теорема 2.4.5]. С помощью него определяются *нижний и верхний индексы Бойда* пространства X :

$$\alpha_X = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} = \sup_{0 < \tau < 1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}$$

и

$$\beta_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} = \inf_{\tau > 1} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Для всякого с.п. X

$$0 \leq \alpha_X \leq \gamma_{\varphi_X} \leq \delta_{\varphi_X} \leq \beta_X \leq 1,$$

где γ_{φ_X} и δ_{φ_X} — нижний и верхний показатели растяжения фундаментальной функции [46, § 2.1, с. 138]. Нетрудно проверить также, что

$$\alpha_{L_{p,q}} = \beta_{L_{p,q}} = 1/p, \ \alpha_{\Lambda(\varphi)} = \gamma_\varphi, \ \beta_{\Lambda(\varphi)} = \delta_\varphi, \ \alpha_{M(\varphi)} = \gamma_{\tilde{\varphi}}, \ \beta_{M(\varphi)} = \delta_{\tilde{\varphi}}.$$

Далее нам понадобится понятие с.п. случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. А именно, если X — с.п. на $[0, 1]$, то соответствующее пространство

$X(\Omega) := X(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ состоит из всех случайных величин $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $f^* \in X$. Здесь, как обычно, $f^*(t)$ — невозрастающая непрерывная слева перестановка случайной величины f , т.е.

$$f^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} < t\} \quad (0 < t \leq 1).$$

Кроме того, $\|f\|_{X(\Omega)} := \|f^*\|_X$. Такое определение позволяет естественным образом перенести на случай $X(\Omega)$ все остальные понятия теории с.п. В частности, норму $\|f\|_{L_p(\Omega)}$ ($1 \leq p \leq \infty$) далее обозначаем просто через $\|f\|_p$. Особенно часто мы будем рассматривать случай, когда Ω — квадрат $I \times I$ с мерой Лебега.

В значительно меньшей степени мы будем касаться симметричных пространств последовательностей, которые могут быть определены следующим образом. Банахово идеальное пространство последовательностей E называется *симметричным*, если из того, что $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in E$ и $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — произвольная перестановка, следует, что "переставленная" последовательность $a_\pi = (a_{\pi(k)})_{k=1}^\infty$ также принадлежит E и $\|a_\pi\|_E = \|a\|_E$. Кроме пространств ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$),

$$\|a\|_p = \begin{cases} (\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{k=1,2,\dots} |a_k|, & p = \infty \end{cases},$$

в качестве примера приведем пространства Марцинкевича $m(\varphi)$, где φ — квазिवогнутая функция на $[0, \infty)$: $m(\varphi)$ состоит из всех ограниченных последовательностей вещественных чисел $a = (a_k)_{k=1}^\infty$ таких, что

$$\|a\|_{m(\varphi)} = \sup_{n=1,2,\dots} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^n a_k^* < \infty,$$

где $(a_k^*)_{k=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^\infty$.

Две неотрицательные функции $f(t)$ и $g(t)$ далее будем называть эквивалентными на множестве T (пишем: $f \asymp g$ ($t \in T$)), если для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in T$ выполнено:

$$C^{-1} f(t) \leq g(t) \leq C f(t).$$

Аналогичным образом понимается эквивалентность норм (или квазинорм).

3. НЕСКОЛЬКО ПОНЯТИЙ И РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Определение 0.2. Набор случайных величин (с.в.) $\{f_k\}_{k=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, называется *независимым*, если для любых интервалов I_k на прямой $\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k, k = 1, 2, \dots, n\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k\}.$$

Последовательность с.в. $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ называют *независимой*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ набор $\{f_k\}_{k=1}^n$ независим.

В дальнейшем будет неоднократно применяться следующий стандартный вариант центральной предельной теоремы [27, теорема 7.2]. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 , $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ и

$$U_n = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : U_n(\omega) < x\} = \Phi(x)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормально распределенной случайной величины, т.е. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$.

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, f — интегрируемая с.в., определенная на нем. Тогда, если $\mathcal{R}$ — σ -подалгебра σ -алгебры Σ , то существует и единственна (с точностью до меры нуль) $\mathcal{R}$ -измеримая интегрируемая с.в. $\mathbb{E}[f | \mathcal{R}]$, которая для всех $B \in \Sigma$ удовлетворяет равенству

$$\int_B f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B \mathbb{E}[f | \mathcal{R}](\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

[63, теорема 1.1]. Случайную величину $\mathbb{E}[f | \mathcal{R}]$ называют *условным математическим ожиданием* f относительно σ -алгебры $\mathcal{R}$. Если $\mathcal{R}$ — σ -подалгебра, порожденная с.в. $g_1, g_2, \dots, g_n$, то условное математическое ожидание относительно нее будет обозначаться через $\mathbb{E}[f | g_1, \dots, g_n]$. Далее также часто будет использоваться обозначение: $\mathbb{E}[f] = \int_{\Omega} f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$.

В заключение этого пункта напомним определение мартингала относительно возрастающей последовательности σ -алгебр.

Определение 0.3. Пусть $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$ — конечная или бесконечная последовательность σ -подалгебр σ -алгебры Σ , такая, что при $i, j \in I$ и $i \leq j$ выполнено: $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}_j$. Последовательность с.в. $\{\xi_i\}_{i \in I}$ называется *мартингалом* относительно $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$, если

- (i) для каждого $i \in I$ ξ_i $\mathcal{R}_i$ -измерима и интегрируема на Ω ;
- (ii) если $i, j \in I$ и $i \leq j$, то $\mathbb{E}[\xi_j | \mathcal{R}_i] = \xi_i$.

Детальное изложение приведенных фактов см. в монографиях, посвященных теории вероятностей, например, в [27] и [63].

4. БАЗИСНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЛАКУНАРНЫЕ СИСТЕМЫ.

Пусть X — банахово пространство над полем вещественных чисел.

Определение 0.4. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называют *базисной*, если она является базисом в своей замкнутой линейной оболочке $[x_n]_X$, т.е. любой $x \in [x_n]_X$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \text{ где } a_i \in \mathbb{R}.$$

Хорошо известно (см., например, [113, Proposition 1.a.3]), что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ является базисной тогда и только тогда, когда выполнены условия:

- 1) $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) семейство проекторов P_m ($m = 1, 2, \dots$), таких, что $P_m(x_i) = x_i$ ($i \leq m$) и $P_m(x_i) = 0$ ($i > m$), равномерно ограничено на $[x_n]_X$.

Наиболее существенное второе условие означает следующее: существует такая константа $K > 0$, что для любых натуральных $m < n$ и $a_i \in \mathbb{R}$ мы имеем:

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Определение 0.5. Базисная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется *безусловной*, если для любой перестановки π натурального ряда последовательность $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — также базисная в X .

Нетрудно показать (см. также [41, теорема 1.1.1] или [113, Proposition 1.c.1]), что базисная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ безусловна в X тогда и только тогда, когда из сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ ($a_i \in \mathbb{R}$) следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i a_i x_i$, где $\theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность знаков, т.е. $\theta_i = \pm 1$. Поэтому ввиду теоремы о замкнутом графике и принципа равномерной ограниченности Банаха-Штейнгауза безусловность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентна равномерной ограниченности семейства операторов расстановки знаков

$$M_{\theta} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i a_i x_i \quad (\theta_i = \pm 1),$$

определенных на подпространстве $[x_n]_X$. Иначе говоря, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ безусловна, если и только если существует такая константа K_0 , что для произвольных $n \in \mathbb{N}$, знаков θ_i и $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots$) выполнено:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i a_i x_i \right\| \leq K_0 \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Естественным обобщением последнего понятия является понятие системы случайной безусловной сходимости. Прежде, чем привести одно из его эквивалентных определений, основанное на использовании системы Радемахера, напомним, что система (x_n, x_n^*) , $x_n \in X$, $x_n^* \in X^*$ ($n = 1, 2, \dots$), называется *биортогональной*, если $x_m^*(x_n) = 0$ при $m \neq n$.

Определение 0.6. Пусть X — банахово пространство, X^* — его сопряженное. Биортогональная система (x_n, x_n^*) , $x_n \in X$, $x_n^* \in X^*$ ($n = 1, 2, \dots$), называется *системой случайной безусловной сходимости* (или согласно английской аббревиатуре *RUC-системой*), если существует такое $C > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [x_n]_X$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(s) x_i^*(x) x_i \right\|_X ds \leq C \|x\|_X.$$

В частности, если $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — ортогональная система ограниченных функций на $[0, 1]$, то (x_n, x_n) биортогональна в любом с.п. В этом случае RUC-системой будем называть саму последовательность $\{x_n\}$.

Определение 0.7. Базисная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ банахова пространства X называется *симметричной*, если она эквивалентна в X любой последовательности вида $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty$, где π — перестановка натурального ряда. Последнее означает, что существует такое $C > 0$, что для произвольных вещественных a_n ($n = 1, 2, \dots$) выполнены неравенства:

$$C^{-1} \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\|_X \leq \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_{\pi(n)} \right\|_X \leq C \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\|_X.$$

Из определений вытекает, что любая симметричная последовательность является одновременно и безусловной. Более подробно о базисах, базисных последовательностях и их свойствах см. [113, Chapters 1,3] и [41, глава 1].

В этой книге нас будут интересовать так называемые лакунарные системы функций (или случайных величин). Термин "лакунарность" означает, что их поведение в тех или иных пространствах в чем-то аналогично поведению систем независимых функций. Можно сказать, что это "разреженные" последовательности, которые не полны в том пространстве, в котором они рассматриваются. Напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ элементов банахова пространства X называется *полной*, если ее замкнутая линейная оболочка $[x_n]_X$ совпадает со всем X . Ярким представителем лакунарных систем является последовательность функций Радемахера $r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t$ ($t \in [0, 1]$), $n = 1, 2, \dots$, главный объект изучения в этой книге. Как мы увидим в следующем параграфе, эта система является не только ортогональной, но и сильно мультипликативной в смысле следующего определения.

Определение 0.8. Конечная или счетная система с.в. $\{f_n\}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, называется мультипликативной, если для произвольных попарно различных $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($k \in \mathbb{N}$) выполнено:

$$\mathbb{E}(f_{n_1} \cdot f_{n_2} \dots f_{n_k}) = 0.$$

Если дополнительно

$$\mathbb{E}(f_{n_1} \cdot f_{n_2} \dots f_{n_k} \cdot f_n^2) = 0$$

для любых попарно различных $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $n \neq n_s$ ($s = 1, 2, \dots, k$), то систему $\{f_n\}$ будем называть *сильно мультипликативной*.

Приведем некоторые наиболее важные примеры таких систем.

Пример 0.1. (Лакунарная тригонометрическая система). Пусть $f_n(x) = \sin(2\pi k_n x)$, где $(k_n)_{n=1}^\infty$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, а $x \in [0, 1]$. Непосредственная проверка показывает, что эта система мультипликативна, если $k_{n+1}/k_n \geq 2$, и сильно мультипликативна, если $k_{n+1}/k_n \geq 3$. Заметим, что разница в этих условиях существенна, так как, например, система $\{\sin(2^n \pi x)\}_{n=1}^\infty$ мультипликативна, но не сильно мультипликативна. Действительно, понижая степень, получим

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi x) \sin(4\pi x) \sin(8\pi x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \sin(4\pi x) \sin(8\pi x) dx - \int_0^1 \cos(4\pi x) \sin(4\pi x) \sin(8\pi x) dx \right) = -\frac{1}{4} \int_0^1 \sin^2(8\pi x) dx < 0.$$

Пример 0.2. (Независимые случайные величины с нулевыми средними). Конечная или счетная последовательность $\{f_n\}$ независимых с.в. таких, что $f_n \in L_2 = L_2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ и $\mathbb{E}f_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), образует сильно мультипликативную систему. Это является непосредственным следствием равенства

$$\mathbb{E}(g_1 \cdot g_2 \cdots g_k) = \mathbb{E}g_1 \cdot \mathbb{E}g_2 \cdots \mathbb{E}g_k,$$

верного для любого набора независимых функций $g_1, g_2, \dots, g_k$ [41, теорема 2.2.4].

Пример 0.3. (Мартингалыные разности). Пусть $\{\xi_i\}$ — конечный или счетный мартингал относительно некоторой возрастающей последовательности σ -алгебр $\{\mathfrak{F}_i\}$. Тогда соответствующая система мартингалыных разностей $f_i := \xi_i - \xi_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$), где $\xi_0 := \mathbb{E}\xi_1$, мультипликативна. Действительно, если $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, то ввиду свойств условного математического ожидания [63, лемма 1.13]

$$\int_{\Omega} f_{i_1} \cdots f_{i_k} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{E}(f_{i_1} \cdots f_{i_k} | \mathfrak{F}_{i_k-1}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} f_{i_1} \cdots f_{i_{k-1}} \cdot \mathbb{E}(f_{i_k} | \mathfrak{F}_{i_k-1}) d\mathbb{P} = 0,$$

так как по определению мартингала $\mathbb{E}(f_{i_k} | \mathfrak{F}_{i_k-1}) = \mathbb{E}(\xi_{i_k} | \mathfrak{F}_{i_k-1}) - \xi_{i_k-1} = 0$.

Как уже говорилось, мерой лакунарности системы является наличие у нее тех или иных свойств, сближающих ее с системами независимых функций. Приведем здесь определения наиболее важных из них.

Определение 0.9. Последовательность с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, называется *системой Сидона*, если

$$C^{-1} \sum_{n=1}^m |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_{\infty} \leq C \sum_{n=1}^m |a_n|,$$

где константа $C > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$).

Определение 0.10. Систему $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ функций, измеримых на $[0, 1]$, называют *системой Сидона-Зигмунда*, если существует множество $E \subset [0, 1]$ с мерой Лебега $m(E) > 0$ такое, что для всякого промежутка I , $m(I \cap E) > 0$ из условия $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x) \in L_\infty(I)$ следует: $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$. Если в этом определении можно взять $E = [0, 1]$, то говорят, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — *система Сидона-Зигмунда в узком смысле*.

Как следует из определений, эти свойства тесно связаны с абсолютной сходимостью лакунарных рядов. Название объясняется тем, что исходным мотивом для их введения послужила классическая теорема Сидона об абсолютной сходимости лакунарного (в смысле Адамара) тригонометрического ряда Фурье ограниченной функции [135] (см. также комментарии к § 10).

Другое лакунарное свойство тесно связано с интегрируемостью суммы ряда; его возникновение связано как с неравенствами Хинчина (см. § 1), так и аналогичным результатом для лакунарных тригонометрических рядов, доказанным А.Зигмундом [142].

Определение 0.11. Последовательность с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in L_p$ ($p > 2$) называется *лакунарной системой порядка p* (или, короче, *S_p -системой*), если

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_p \leq K_p \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_2,$$

где константа $K_p > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$). Если $\{f_n\}$ является S_p -системой при любом $p > 2$, то ее называют S_∞ -системой.

Подробнее о лакунарных системах см. обзор [32], а также монографии [39] и [41].

5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ И ПРОСТРАНСТВА ВЕЩЕСТВЕННОГО МЕТОДА.

Совокупность $\vec{X} = (X_0, X_1)$ двух банаховых пространств X_0 и X_1 называют *банаховой парой*, если они оба линейно и непрерывно вложены в одно и то же отделимое линейное топологическое пространство. Для банаховой пары можно определить *пересечение* $X_0 \cap X_1$ и *сумму* $X_0 + X_1$ как банаховы пространства с нормами

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max \{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$$

и

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf \{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0, 1\}$$

соответственно. Банахову пару образуют, например, любые два банаховых идеальных пространства E_0 и E_1 , определенные над одним и тем же пространством с мерой (T, Σ, μ) , так как $E_i \subset S(T, \Sigma, \mu)$ ($i = 0, 1$).

Для любых банаховых пар $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ через $L(\vec{X}, \vec{Y})$ обозначим банахово пространство всех линейных операторов $T : X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$, которые непрерывно отображают X_i в Y_i ($i = 0, 1$), с нормой

$$\|T\|_{L(\vec{X}, \vec{Y})} = \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow Y_i}.$$

Банахово пространство X называется *промежуточным* для пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$, если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$; совокупность (X_0, X_1, X) тогда называют *тройкой*. Говорят, что тройка (X_0, X_1, X) *интерполяционна* относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , если для любого $T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ имеем: $T : X \rightarrow Y$. В этом случае по теореме о замкнутом графике найдется такое $C > 0$, что для любого $T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq C \|T\|_{L(\vec{X}, \vec{Y})}.$$

Если в последнем неравенстве можно взять $C = 1$, то тройку (X_0, X_1, X) называют *точной интерполяционной* относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) . В частности, в случае $X_0 = Y_0$, $X_1 = Y_1$ и $X = Y$ пространство X будем называть (*точным*) *интерполяционным* относительно пары (X_0, X_1) (или между пространствами X_0 и X_1). В этом случае мы пишем: $X \in \mathcal{I}(X_0, X_1)$.

В качестве примера приведем классическую теорему Рисса-Торина [26, теорема 1.1.1]. Предположим, что (T, μ) и (T', μ') — два пространства с σ -конечной мерой, $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. Тогда, если все пространства рассматриваются над полем комплексных чисел и

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

при некотором $\theta \in [0, 1]$, то тройка $(L_{p_0}(T, \mu), L_{p_1}(T, \mu), L_p(T, \mu))$ является точной интерполяционной относительно тройки $(L_{q_0}(T', \mu'), L_{q_1}(T', \mu'), L_q(T', \mu'))$. В вещественном случае мы можем гарантировать лишь выполнение неравенства

$$\|T\|_{L_p(T, \mu) \rightarrow L_q(T', \mu')} \leq 2 \cdot \|T\|_{L(\vec{X}, \vec{Y})},$$

где $\vec{X} = (L_{p_0}(T, \mu), L_{p_1}(T, \mu))$, $\vec{Y} = (L_{q_0}(T', \mu'), L_{q_1}(T', \mu'))$ [44, § 1.2, с. 38].

Один из наиболее важных и в теории, и в приложениях способ построения интерполяционных пространств связан с использованием $\mathcal{K}$ -функционала Петре, определенного на банаховой паре (X_0, X_1) следующим образом:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\},$$

где $x \in X_0 + X_1$, а $t > 0$. Нетрудно показать, что для любой банаховой пары при фиксированном $x \in X_0 + X_1$ $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ — непрерывная неотрицательная возрастающая вогнутая функция относительно переменной $t > 0$ [26, лемма 3.1.1]. Одновременно для каждого фиксированного $t > 0$ это норма на сумме $x \in X_0 + X_1$, причем все эти нормы попарно эквивалентны. Кроме того, если $X_0 \subset X_1$ и $\|x\|_{X_1} \leq \|x\|_{X_0}$ ($x \in X_0$) (соответственно $X_1 \subset X_0$ и $\|x\|_{X_0} \leq \|x\|_{X_1}$ ($x \in X_1$)), то $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = t\|x\|_{X_1}$ при $0 \leq t \leq 1$ (соответственно $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \|x\|_{X_0}$ при $t \geq 1$).

В ряде случаев для $\mathcal{K}$ -функционала удастся найти достаточно простое эквивалентное выражение. В частности, для произвольного пространства с σ -конечной мерой и любого $p \geq 1$

$$\mathcal{K}(t, x; L_p, L_\infty) \asymp \left(\int_0^t (x^*(s))^p ds \right)^{1/p} \quad (t > 0),$$

где константы эквивалентности не зависят от $x \in L_p + L_\infty$ и $t > 0$ (при $p = 1$ эквивалентность можно заменить равенством). В дальнейшем при изучении системы Радемахера в с.п. исключительно важную роль будет играть $\mathcal{K}$ -функционал, соответствующий банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) , который мы будем обозначать через $\kappa_a(t)$ ($a = (a_k)_{k=1}^\infty$, $t > 0$). В § 4 мы получим для него эквивалентные выражения, которые затем будут использоваться на протяжении всей книги.

Далее, если F — банахова решетка двусторонних числовых последовательностей, то через $F(u_k)$, $u_k > 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) будем обозначать *весовое пространство*, состоящее из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^\infty$, для которых конечна норма

$$\|a\|_{F(u_k)} = \|(a_k u_k)\|_F$$

(аналогичным образом будет далее пониматься и функциональное весовое пространство). Произвольную банахову решетку двусторонних числовых последовательностей F такую, что $F \supset l_\infty \cap l_\infty(2^{-k})$, будем называть *параметром вещественного метода интерполяции*. Если (X_0, X_1) — банахова пара, то *пространство вещественного $\mathcal{K}$ -метода* $(X_0, X_1)_F^\mathcal{K}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$ таких, что

$$(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k \in F,$$

с нормой

$$\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k\|_F.$$

Нетрудно проверить, что $(X_0, X_1)_F^\mathcal{K}$ — точное интерполяционное пространство между X_0 и X_1 [29, предложение 1.4.2]. В частном случае $F = \ell_p(2^{-k\theta})$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$) получаем классические пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ с нормой

$$\|x\|_{(X_0, X_1)_{\theta, p}} = \left(\sum_{k=-\infty}^\infty (\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1) 2^{-k\theta})^p \right)^{1/p}$$

(с естественной модификацией при $p = \infty$). Подробное описание их свойств см., например, в монографии [26].

В качестве параметров вещественного метода интерполяции можно брать также банаховы идеальные пространства функций на $(0, \infty)$. В частности, нетрудно проверить [26, лемма 3.1.3], что для произвольных $0 < \theta < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$

$$2^{-\theta} (\ln 2)^{1/p} \|x\|_{(X_0, X_1)_{\theta, p}} \leq \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq 2 (\ln 2)^{1/p} \|x\|_{(X_0, X_1)_{\theta, p}}.$$

Важность вещественного метода интерполяции связана, в частности, с тем, что для достаточно обширного класса банаховых пар за счет него получаются все интерполяционные пространства.

Определение 0.12. Банахова пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называется *$\mathcal{K}$ -монотонной* (или *парой Кальдерона-Митягина*), если выполнение неравенства

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0)$$

для некоторых $x \in X_0 + X_1$ и $y \in X_0 + X_1$ влечет существование оператора $U \in L(\vec{X}, \vec{X})$ такого, что $y = Ux$.

Второе название объясняется тем, что исторически первым результатом в этом направлении явилась теорема о $\mathcal{K}$ -монотонности банаховой пары (L_1, L_∞) , доказанная независимо и почти одновременно А.П. Кальдероном [86] и Б.С. Митягиным [50]. Используя ранее приведенное выражение для $\mathcal{K}$ -функционала банаховой пары (L_1, L_∞) , приведем одну из эквивалентных формулировок теоремы Кальдерона-Митягина [46, теорема 2.4.3]. Для того, чтобы с.п. X на $[0, 1]$ было интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞) , необходимо и достаточно выполнение условия: если $x \in X$, $y \in L_1$ и

$$\int_0^t y^*(s) ds \leq \int_0^t x^*(s) ds$$

при всех $0 \leq t \leq 1$, то $y \in X$ и $\|y\|_X \leq C\|x\|_X$, где константа $C > 0$ зависит только от пространства X . В частности, из этой теоремы легко следует, что любое максимальное или сепарабельное с.п. интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞) .

Ввиду теоремы Брудного-Кругляка, одного из центральных результатов в теории интерполяции [29, теорема 15.1], любое пространство X , интерполяционное относительно $\mathcal{K}$ -монотонной пары (X_0, X_1) , представимо в виде

$$X = (X_0, X_1)_F^{\mathcal{K}}$$

для некоторого параметра вещественного метода F . В частности, последнее верно для произвольной пары весовых L_p -пространств, так как по теореме Спарра [136] любая такая пара $\mathcal{K}$ -монотонна. Это обстоятельство неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Детальное изложение приведенных здесь, а также многих других результатов и фактов теории интерполяции можно найти в монографиях [26, 29, 85, 46, 77, 44, 117].

§ 1

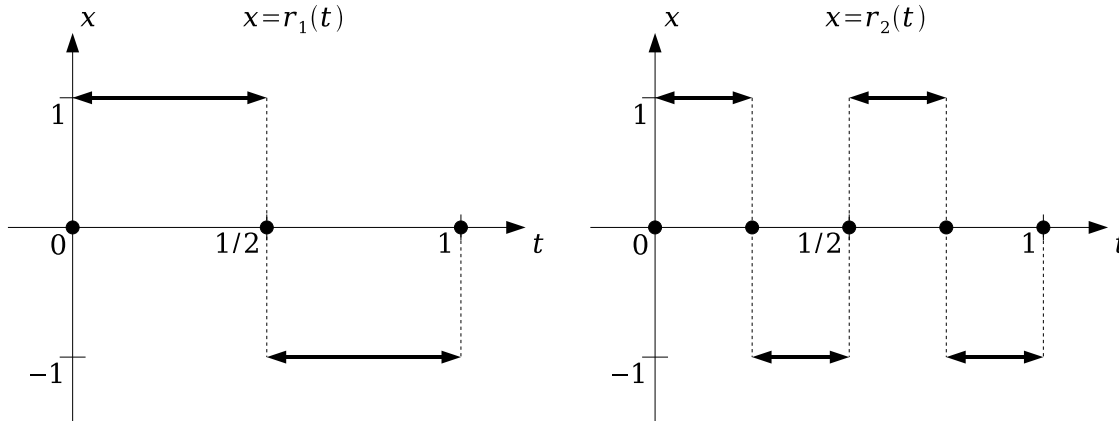
ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА

Определение 1.1. Всюду в дальнейшем Δ_n^k — двоичные интервалы из $[0, 1]$, т.е.

$$\Delta_n^k = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, 2^n).$$

Система Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ состоит из функций, определенных на $[0, 1]$ следующим образом:

$$r_n(t) = (-1)^{k-1}, \text{ если } t \in \Delta_n^k \quad (k = 1, 2, \dots, 2^n), \text{ и } r_n(k2^{-n}) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2^n).$$



Более компактное (и эквивалентное) определение функций Радемахера можно задать формулой

$$r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Отметим, прежде всего, связь функций $r_n(t)$ с разложением чисел из отрезка $[0, 1]$ в двоичную дробь. Пусть двоично-иррациональное число $t \in [0, 1]$ представимо в виде бесконечной двоичной дроби

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i 2^{-i}, \quad \text{где } \theta_i = \theta_i(t) = 0 \text{ или } 1.$$

Тогда для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i 2^{-i} < t < \sum_{i=1}^n \theta_i 2^{-i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_{i=1}^n \theta_i 2^{-i} + 2^{-n},$$

откуда для некоторого целого $m \geq 0$

$$\frac{\theta_n + 2m}{2^n} < t < \frac{\theta_n + 2m + 1}{2^n}.$$

Тем самым из определения функций Радемахера следует, что $\theta_n(t) = 0$ для тех и только тех двоично-иррациональных t , для которых $r_n(t) = 1$. В итоге

$$r_n(t) = 1 - 2\theta_n(t) = (-1)^{\theta_n(t)}, \quad t \in (0, 1), \quad t \neq \frac{j}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, 2^n). \quad (1.1)$$

Многие важные свойства системы Радемахера являются следствием ее независимости.

Предложение 1.1. *Функции Радемахера $r_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) независимы на $[0, 1]$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных функций $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$*

$$\int_0^1 \varphi_1(r_1(t)) \varphi_2(r_2(t)) \dots \varphi_n(r_n(t)) dt = \prod_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_k(r_k(t)) dt. \quad (1.2)$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_k\}_{k=1}^n$ — произвольный набор интервалов. Докажем равенство

$$m\{x \in [0, 1] : r_k(x) \in I_k, k = 1, 2, \dots, n\} = \prod_{k=1}^n m\{x \in [0, 1] : r_k(x) \in I_k\}. \quad (1.3)$$

Если $\{+1, -1\} \cap I_k = \emptyset$ при некотором k , то обе части соотношения (1.3) равны 0. Иначе оно сводится к равенству

$$m\{x \in [0, 1] : r_{k_i}(x) = \theta_i, i = 1, 2, \dots, m\} = \prod_{i=1}^m m\{x \in [0, 1] : r_{k_i}(x) = \theta_i\},$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$, а $\theta_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Но тогда из определения функций Радемахера сразу следует, что обе части последнего равенства равны 2^{-m} . Перейдем теперь к проверке равенства (1.2). Так как $\int_0^1 \varphi_k(r_k(t)) dt = (\varphi_k(1) + \varphi_k(-1))/2$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то правая часть этого соотношения равна

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} (\varphi_k(1) + \varphi_k(-1)) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_k = \pm 1, k=1, \dots, n} \varphi_1(\theta_1) \varphi_2(\theta_2) \dots \varphi_n(\theta_n) \\ &= \int_0^1 \varphi_1(r_1(t)) \varphi_2(r_2(t)) \dots \varphi_n(r_n(t)) dt. \end{aligned}$$

□

Следствие 1.1. *Пусть $\{A_j\}_{j=1}^m$ — произвольный набор дизъюнктивных подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, а φ_j — функция, зависящая от k_j вещественных аргументов, $k_j = \text{card } A_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда функции $f_j(t) := \varphi_j(r_i(t), i \in A_j)$ образуют систему независимых функций.*

Следствие 1.2. *Для любых целых $k_1, k_2, \dots, k_s$ и попарно различных $i_1, i_2, \dots, i_s \in \mathbb{N}$ интеграл*

$$\int_0^1 r_{i_1}^{k_1}(t) r_{i_2}^{k_2}(t) \dots r_{i_s}^{k_s}(t) dt$$

равен 1, если все числа $k_1, k_2, \dots, k_s$ четные, и 0, если хотя бы одно из них нечетно. В частности, $\{r_k\}$ — сильно мультипликативная система функций на $[0, 1]$.

Следствие 1.3. *Функции Радемахера образуют ортонормированную систему.*

Замечание 1.1. Система Радемахера не полна в $L_p[0, 1]$ для любого $1 \leq p \leq \infty$. Действительно, функция $z(t) := r_1(t)r_2(t)$ ввиду следствия 1.2 ортогональна всем функциям этой системы, т.е. $\int_0^1 z(t)r_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Отсюда следует, что $z(t)$ не принадлежит замкнутой линейной оболочке системы Радемахера в $L_p[0, 1]$ при любом $1 \leq p \leq \infty$.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости рядов по системе Радемахера почти всюду. Исчерпывающую информацию по этому поводу дают две следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty, \quad (1.4)$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \quad (1.5)$$

сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть функция $F(x)$, определенная на $[0, 1]$, дифференцируема в точке $t \in [0, 1]$. Если $0 \leq a_k < t < b_k \leq 1$ и $b_k - a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(b_k) - F(a_k)}{b_k - a_k} = F'(t).$$

Доказательство. Обозначая $\mu_k = (b_k - t)/(b_k - a_k)$ и $\nu_k = (t - a_k)/(b_k - a_k)$, оценим

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(b_k) - F(a_k)}{b_k - a_k} - F'(t) \right| &= \left| \frac{F(b_k) - F(t)}{b_k - t} \mu_k + \frac{F(t) - F(a_k)}{t - a_k} \nu_k - F'(t) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{F(b_k) - F(t)}{b_k - t} - F'(t) \right| \mu_k + \left| \frac{F(t) - F(a_k)}{t - a_k} - F'(t) \right| \nu_k \leq \varepsilon(\mu_k + \nu_k) = \varepsilon, \end{aligned}$$

если k достаточно большое. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $S_n = S_n(t)$ — частичная сумма ряда (1.5). Так как по следствию 1.3 $\{r_k\}$ — ортонормированная система на $[0, 1]$, то в силу равенства Парсеваля для произвольных $1 \leq n < m$

$$\|S_m - S_n\|_2 = \left(\sum_{k=n+1}^m a_k^2 \right)^{1/2},$$

и значит, по условию (1.4) ввиду полноты пространства $L_2[0, 1]$ существует такая $f \in L_2[0, 1]$, что $\|S_n - f\|_2 \rightarrow 0$. Отсюда для произвольных $0 \leq a < b \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - S_n(t))^2 dt = 0,$$

что вместе с интегральным неравенством Коши-Буняковского приводит к равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - S_n(t)) dt = 0. \quad (1.6)$$

Предположим, что I_k — интервал постоянства функции $r_k(t)$, а значит, и $S_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$). Легко видеть, что для $n > k$

$$\int_{I_k} (S_n(t) - S_k(t)) dt = 0,$$

откуда ввиду (1.6)

$$\int_{I_k} f(t) dt = \int_{I_k} S_k(t) dt. \quad (1.7)$$

Пусть E — множество всех двоично-иррациональных точек отрезка $[0, 1]$ (т.е. точек t , не представимых в виде $p/2^k$, $p, k = 0, 1, 2, \dots$), в которых функция $F(t) := \int_0^t f(u) du$ дифференцируема и $F'(t) = f(t)$. Так как $f \in L_1[0, 1]$, то $m(E) = 1$ [51, теорема 9.4.2]. Для любой $t_0 \in E$ существует такая последовательность интервалов $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $t_0 \in I_k$ ($k = 1, 2, \dots$) и функция $S_k(t)$ постоянна на I_k . Поэтому, если $I_k = (a_k, b_k)$, то из (1.7) следует

$$S_k(t_0) = \frac{1}{b_k - a_k} \int_{I_k} S_k(t) dt = \frac{1}{b_k - a_k} \int_{I_k} f(t) dt.$$

Так как $b_k - a_k \rightarrow 0$, то по лемме 1.1 последняя величина стремится к $F'(t_0) = f(t_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что ряд (1.5) сходится для любой $t_0 \in E$, т.е. п.в. на $[0, 1]$. $\square$

Теорема 1.2. Если условие (1.4) не выполнено, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$, то ряд (1.5) расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и ряд (1.5) сходится на множестве $B \subset [0, 1]$ положительной меры. Тогда, если, как и ранее, $S_n(t)$ — частичные суммы ряда (1.5), то это множество можно представить в виде объединения возрастающих множеств B_k , где B_k — множество всех таких $t \in B$, что

$$|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leq 1 \quad (1.8)$$

для всех $n \geq k$ и $p \in \mathbb{N}$. Ввиду непрерывности меры Лебега найдется такое k_0 , что $m(B_{k_0}) > 0$. После возведения в квадрат и интегрирования неравенства (1.8) при $k = k_0$ получим

$$\int_{B_{k_0}} (S_{n+p}(t) - S_n(t))^2 dt \leq m(B_{k_0})$$

или при $n \geq k_0$

$$\begin{aligned} m(B_{k_0}) &\geq \int_{B_{k_0}} \left(\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i r_i(t) \right)^2 dt = m(B_{k_0}) \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 + \\ &+ 2 \sum_{n+1 \leq i < j \leq n+p} a_i a_j \int_{B_{k_0}} r_i(t) r_j(t) dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

По следствию 1.2 функции $r_i(t)r_j(t)$ ($1 \leq i < j < \infty$) образуют ортонормированную систему на $[0, 1]$. Поэтому ввиду неравенства Бесселя при $n \geq k_1 \geq k_0$

$$\sum_{n+1 \leq i < j \leq n+p} \left(\int_{B_{k_0}} r_i(t) r_j(t) dt \right)^2 \leq \frac{(m(B_{k_0}))^2}{9}$$

(слева — сумма квадратов коэффициентов Фурье по системе $\{r_i(t)r_j(t)\}_{1 \leq i < j < \infty}$ функции $\chi_{B_{k_0}}$). Отсюда по неравенству Коши-Буняковского второе слагаемое справа в (1.9) по модулю меньше, чем

$$\frac{m(B_{k_0})}{3} \left(\sum_{i,j} (a_i a_j)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{m(B_{k_0})}{3} \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2.$$

Следовательно, из (1.9) получаем

$$m(B_{k_0}) \geq \frac{m(B_{k_0})}{3} \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2,$$

т.е. $\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i^2 \leq 3$ при $n \geq k_1$ и произвольном $p \in \mathbb{N}$. Таким образом, выполнено (1.4), а это противоречит условию теоремы. $\square$

Следующий классический результат, ставший источником многочисленных исследований, будет играть в дальнейшем исключительно важную роль.

Теорема 1.3. Пусть $p > 0$ и $S_n(t) = \sum_{i=1}^n a_i r_i(t)$ — произвольный полином по системе Радемахера с вещественными коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда

$$\int_0^1 |S_n(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{p/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{p/2}. \quad (1.10)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $p = 2m$, $m \geq 1$. Ввиду полиномиальной теоремы и следствия 1.2

$$\int_0^1 |S_n(t)|^{2m} dt = \sum_{k_1 + \dots + k_n = m, k_i \geq 0} \frac{(2m)!}{(2k_1)! \dots (2k_n)!} |a_1|^{2k_1} \dots |a_n|^{2k_n},$$

где суммирование ведется по всем целым $k_i \geq 0$ таким, что $k_1 + \dots + k_n = m$.

Так как $2^{k_i} k_i! \leq (2k_i)!$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то $2^m k_1! \dots k_n! \leq (2k_1)! \dots (2k_n)!$. Поэтому опять ввиду полиномиальной теоремы

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_n(t)|^{2m} dt &\leq \frac{(2m)!}{2^m m!} \sum_{k_1 + \dots + k_n = m, k_i \geq 0} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} |a_1|^{2k_1} \dots |a_n|^{2k_n} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^m, \end{aligned} \quad (1.11)$$

и неравенство (1.10) доказано с константой $B_{2m} := (2m)!/(2^m m!)$. При этом, так как $(m+1)(m+2) \dots 2m \leq (2m)^m$, то $B_{2m} \leq m^m$.

Перейдем к случаю произвольного $p > 0$. Тогда $2m - 2 < p \leq 2m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Так как $\|f\|_p$ возрастает по p , то, применяя (1.11), получим

$$\begin{aligned} \|S_n\|_p &= \left(\int_0^1 |S_n(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |S_n(t)|^{2m} dt \right)^{1/(2m)} \leq \\ &\leq m^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и неравенство (1.10) доказано. $\square$

Замечание 1.2. Пусть ξ — стандартная нормально распределенная с.в., т.е.

$$\mathbb{P}\{\xi < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Тогда ее момент $\mathbb{E}\xi^{2m}$ порядка $2m$ совпадает с константой B_{2m} из только что приведенного доказательства [54, § 2, с. 11]. Более того, точно те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 1.3, показывают, что правая часть в неравенстве (1.11) в точности равна $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k \xi_k\right)^{2m}$, где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые стандартные нормально распределенные с.в. Действительно, ввиду отмеченного выше свойства ξ и независимости ξ_k

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k \xi_k\right)^{2m} &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = m, k_i \geq 0} \frac{(2m)!}{(2k_1)! \dots (2k_n)!} |a_1|^{2k_1} \dots |a_n|^{2k_n} \mathbb{E}\xi_1^{2k_1} \dots \mathbb{E}\xi_n^{2k_n} \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_n = m, k_i \geq 0} \frac{(2m)!}{(2k_1)! \dots (2k_n)!} \cdot \frac{(2k_1)! \dots (2k_n)!}{2^{k_1} \dots 2^{k_n} (k_1)! \dots (k_n)!} |a_1|^{2k_1} \dots |a_n|^{2k_n} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \sum_{k_1 + \dots + k_n = m, k_i \geq 0} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} |a_1|^{2k_1} \dots |a_n|^{2k_n} = \frac{(2m)!}{2^m m!} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^m. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенству (1.11) можно придать и следующую любопытную форму сравнения четных моментов полиномов, соответствующих системам $\{r_k\}$ и $\{\xi_k\}$:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k r_k\right)^{2m} = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^{2m} dt \leq \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k \xi_k\right)^{2m}. \quad (1.12)$$

Следствие 1.4. Если $\sum_{k=1}^\infty a_k^2 < \infty$, то для любого $p > 0$ ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k r_k(t)$ сходится в пространстве L_p .

Доказательство. Пусть $m > n \geq 1$. Подставляя в (1.10) вместо S_n разность $S_m - S_n$, легко убедиться в том, что последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k r_k(t)$ фундаментальна в L_p . Таким образом, ввиду полноты этого пространства следствие доказано. $\square$

Следствие 1.5. Для некоторой универсальной константы $C > 0$ и произвольного полинома $S_n(t) = \sum_{i=1}^n a_i r_i(t)$ имеет место оценка

$$m\{t \in [0, 1] : |S_n(t)| > u\} \leq C \exp\left(-\frac{u^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}\right) \quad (u > 0). \quad (1.13)$$

Доказательство. Применяя формулу Стирлинга [49, с. 31]

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{R_n}, \text{ где } \frac{1}{12n+1} < R_n < \frac{1}{12n}, \quad (1.14)$$

оценим константу B_{2m} из доказательства теоремы 1.3 следующим образом:

$$B_{2m} \leq \sqrt{2} 2^m e^{-m} m^m.$$

Поэтому из неравенства Чебышева и соотношения (1.11) при $m = \left\lceil \frac{u^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \right\rceil$ следует

$$\begin{aligned} m \{t \in [0, 1] : |S_n(t)| > u\} &\leq u^{-2m} \mathbb{E} |S_n|^{2m} \leq B_{2m} u^{-2m} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^m \leq \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{2m \sum_{k=1}^n a_k^2}{e u^2} \right)^m \leq \sqrt{2} e^{-m} \leq e \sqrt{2} \exp \left(-\frac{u^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \right). \end{aligned}$$

□

Замечание 1.3. Нетрудно получить утверждение, обратное к только что доказанному: из экспоненциальной оценки (1.13) вытекает неравенство (1.10). Для этого достаточно воспользоваться хорошо известной формулой для нормы функции в пространстве $L_p[0, 1]$ [41, приложение 1, § 1, утв. 1]:

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty u^{p-1} m\{t \in [0, 1] : |f(t)| > u\} du.$$

С помощью теоремы 1.3 нетрудно установить следующий фундаментальный для дальнейшего факт эквивалентности норм полиномов по системе Радемахера в $L_p[0, 1]$ при всех $1 \leq p < \infty$.

Теорема 1.4 (Неравенства Хинчина). *Для любого $1 \leq p < \infty$ существует такая константа $C_p > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $a = (a_k)_{k=1}^n$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{2} \|a\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_p \leq C_p \|a\|_2. \quad (1.15)$$

Доказательство. Правая (наиболее важная) часть неравенства (1.15) доказана в теореме 1.3 с $C_p = (p/2 + 1)^{1/2}$. Докажем левую часть.

Ввиду равенства Парсеваля и неравенства Гельдера с показателями $q = 3/2$ и $q' = 3$

$$\begin{aligned} \|a\|_2^2 &= \mathbb{E} S_n^2 = \left(\int_0^1 |S_n(t)|^{2/3} \cdot |S_n(t)|^{4/3} dt \right) \\ &\leq \left(\int_0^1 |S_n(t)| dt \right)^{2/3} \left(\int_0^1 (S_n(t))^4 dt \right)^{1/3}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k r_k$. Далее, применяя (1.11) для $m = 2$, получим $\|a\|_2^2 \leq \|S_n\|_1^{2/3} (4 \|a\|_2^4)^{1/3}$, откуда $\|a\|_2 \leq 2 \|S_n\|_1$. Так как $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$ при $p \geq 1$, то неравенство (1.15) доказано. □

Следствие 1.6. *Для любого набора функций $\{f_i\}_{i=1}^n \subset L_p = L_p(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой μ , имеет место неравенство*

$$\frac{1}{2} \left\| \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \left\{ \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n f_i r_i(s) \right\|_p^p ds \right\}^{1/p} \leq C_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \quad (1.16)$$

Доказательство. По теореме 1.4 для каждого фиксированного $t \in T$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(t) \right)^{1/2} \leq \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n f_i(t) r_i(s) \right|^p ds \right\}^{1/p} \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n f_i^2(t) \right)^{1/2}.$$

Так как по теореме Фубини

$$\int_T \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n f_i(t) r_i(s) \right|^p ds d\mu = \int_0^1 \int_T \left| \sum_{i=1}^n f_i(t) r_i(s) \right|^p d\mu ds,$$

то (1.16) является следствием предыдущего неравенства ввиду монотонности нормы в L_p . $\square$

Замечание 1.4. В левой части неравенства (1.15) множитель $1/2$ можно заменить на $1/\sqrt{2}$, и, как доказал С. Шарек [138], эта константа в случае $p = 1$ является наилучшей, т.е. наибольшей возможной из $c > 0$, для которых при всех $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ выполнено

$$c \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_1.$$

Наименьшее возможное значение C_p из правой части неравенства (1.15) для всех значений p было найдено У. Хаагерупом [100] (заметим, что $\lim_{p \rightarrow \infty} C_p \sqrt{e/p} = 1$.)

Замечание 1.5. Неравенство (1.15) неверно при $p = \infty$. В самом деле, ввиду определения функций Радемахера для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной расстановки знаков $\theta_k = \pm 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) найдется такое $i = 1, 2, \dots, 2^n$, что $\theta_k = r_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) при всех $t \in \Delta_n^i$. Поэтому для любых вещественных $a_1, \dots, a_n$ справедливо равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_\infty = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Следующее утверждение, показывающее, что ограниченность суммы ряда Радемахера на некотором промежутке гарантирует абсолютную сходимость его коэффициентов, дополняет предыдущее замечание.

Предложение 1.2. *Предположим, что выполнено условие (1.4). Тогда, если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \in L_\infty(\Delta) \tag{1.17}$$

для некоторого (непустого) промежутка $\Delta \subset [0, 1]$, то $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Доказательство. Ясно, что в качестве Δ в (1.17) можно взять некоторый двоичный промежуток Δ_m^j ($m = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, 2^m$). Тогда, так как функции $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k r_k \cdot \chi_{\Delta_m^i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$) равноизмеримы, то для всех $t \in [0, 1]$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \right| \leq \sum_{k=1}^m |a_k| + \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k r_k(t) \right| \leq C,$$

где

$$C = 2 \sum_{k=1}^m |a_k| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_\infty(\Delta)}.$$

Зафиксируем теперь произвольное натуральное n и рассмотрим такой двоичный промежуток Δ_n^k ($k = 1, 2, \dots, 2^n$), что $r_i(t) = \text{sign } a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), если $t \in \Delta_n^k$. Так как $\int_{\Delta_n^k} r_i(t) dt = 0$ при $i > n$, то

$$\sum_{i=1}^n |a_i| 2^{-n} = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Delta_n^k} r_i(t) dt = \int_{\Delta_n^k} \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(t) dt \leq C 2^{-n}.$$

Тем самым $\sum_{i=1}^n |a_i| \leq C$ при любом $n \in \mathbb{N}$, и утверждение доказано. $\square$

В §6 нам понадобится следующий вариант неравенств Хинчина для ортонормированной системы $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ на $[0, 1]$.

Предложение 1.3. *Существуют абсолютные константы $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i < j \leq n$) справедливы неравенства*

$$\int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j} r_i(t) r_j(t) \right)^4 dt \leq A \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}^2 \right)^2 \quad (1.18)$$

и

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}^2 \right)^{1/2} \leq B \int_0^1 \left| \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j} r_i(t) r_j(t) \right| dt. \quad (1.19)$$

Доказательство. Применяя следствие 1.2(так же, как при доказательстве теорем 1.3 и 1.4), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j} r_i(t) r_j(t) \right)^4 dt &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}^4 + 6 \cdot \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n, \\ 1 \leq k < m \leq n, \\ i \neq k \text{ или } j \neq m}} c_{i,j}^2 c_{k,m}^2 \\ &+ 24 \cdot \sum_{1 \leq i < k < j < m \leq n} (c_{i,j} c_{k,m} c_{i,k} c_{j,m} + c_{i,j} c_{k,m} c_{i,m} c_{k,j} + c_{i,k} c_{j,m} c_{i,m} c_{k,j}). \end{aligned}$$

Так как ввиду неравенства Коши-Буняковского последняя сумма не превосходит $A \cdot (\sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}^2)^2$, то неравенство (1.18) доказано.

Обозначим $T_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j} r_i r_j$. Действуя точно так же, как во второй части доказательства теоремы 1.4 и применяя (1.18), придем к неравенству $\|(c_{i,j})\|_2^2 \leq A^{1/3} \|T_n\|_1^{2/3} \|(c_{i,j})\|_2^{4/3}$, откуда непосредственно следует (1.19). $\square$

Следующее утверждение — о сравнении L_p - и L_q -норм полиномов Радемахера — существенно уточняет неравенства Хинчина.

Теорема 1.5. *Для любых $1 < p \leq q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$*

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_q \leq \sqrt{\frac{q-1}{p-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_p. \quad (1.20)$$

Для доказательства нам понадобится одно числовое неравенство

Лемма 1.2. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, и $l = \sqrt{(p-1)/(q-1)}$. Тогда для произвольных $u \geq 0$ и $v \geq 0$ выполнено*

$$\left(\frac{|v + lu|^q + |v - lu|^q}{2} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{|v + u|^p + |v - u|^p}{2} \right)^{1/p}.$$

Доказательство. Ввиду однородности достаточно рассмотреть случай, когда $v = 1$ (если $v = 0$, то неравенство очевидно). Предположим сначала, что $1 < p \leq q \leq 2$. Тогда биномиальные коэффициенты

$$C_{2k}^q = \frac{q(q-1)\dots(q-2k+1)}{(2k)!} \text{ и } C_{2k}^p = \frac{p(p-1)\dots(p-2k+1)}{(2k)!}$$

неотрицательны, и непосредственно проверяется, что $C_{2k}^q l^2 \leq q p^{-1} C_{2k}^p$. Следовательно, пользуясь формулой разложения в степенной ряд функции $f(x) = (1+x)^r$, а также элементарным неравенством $(1+x)^r \leq 1+rx$ ($x \geq 0, 0 \leq r \leq 1$), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{(1+lu)^q + (1-lu)^q}{2} \right)^{p/q} &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^q l^{2k} u^{2k} \right)^{p/q} \leq \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^p u^{2k} = \frac{(1+u)^p + (1-u)^p}{2}. \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана в случае $u \leq 1$. Если же $u > 1$, то достаточно применить легко проверяемое неравенство $|1 \pm lu| \leq |u \pm l|$ ($|l| \leq 1$, $|u| \geq 1$) и то, что наше неравенство уже доказано для $1/u$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{|1 + lu|^q + |1 - lu|^q}{2} \right)^{1/q} &\leq \left(\frac{|u + l|^q + |u - l|^q}{2} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq u \left(\frac{|1 + 1/u|^q + |1 - 1/u|^q}{2} \right)^{1/q} = \left(\frac{|1 + u|^q + |1 - u|^q}{2} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Тем самым рассмотрение случая $1 < p \leq q \leq 2$ закончено.

Далее, определим отображение

$$Tf(s) = \int_0^1 f(t) dt + l \int_0^1 f(t)r_1(t) dt \cdot r_1(s),$$

заметив, что неравенство, доказываемое нами, имеет место тогда и только тогда, когда норма T как оператора из $L_p[0, 1]$ в $L_q[0, 1]$ не превосходит 1. Действительно, прежде всего, нетрудно проверить, что аналогичное утверждение справедливо для сужения оператора T на двумерное подпространство $M := \{a + br_1(s), a, b \in \mathbb{R}\}$. Одновременно для любой функции $f \in L_p$ мы имеем $Tf = TPf$, где P — ортогональный проектор в L_p на M , т.е.

$$Pf(s) = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(t)r_1(t) dt \cdot r_1(s).$$

Так как непосредственные вычисления показывают, что норма P в L_p равна 1, то норма T из L_p в L_q совпадает с соответствующей нормой сужения T на M и, значит, сформулированное утверждение верно.

Кроме того, легко проверить, что оператор T самосопряжен, т.е. $T^* = T$, и $l = \sqrt{(q' - 1)/(p' - 1)}$. Следовательно, норма этого оператора из $L_p[0, 1]$ в $L_q[0, 1]$, если $2 \leq p \leq q < \infty$, также не превосходит 1, а значит, наше неравенство верно и в этом случае. В оставшейся ситуации $1 < p < 2 < q < \infty$ достаточно заметить, что $l = l_1 l_2$, где $l_1 = \sqrt{p - 1}$, а $l_2 = 1/\sqrt{q - 1}$, и поэтому по-прежнему

$$\left(\frac{|v + lu|^q + |v - lu|^q}{2} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{|v + l_1 u|^2 + |v - l_1 u|^2}{2} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{|v + u|^p + |v - u|^p}{2} \right)^{1/p}.$$

□

Доказательство теоремы 1.5. Пусть, как и ранее, $l = \sqrt{(p - 1)/(q - 1)}$ ($1 < p \leq q < \infty$). Достаточно доказать, что

$$\left(\int_0^1 \left| a_0 + l \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^q dt \right)^{1/q} \leq \left(\int_0^1 \left| a_0 + \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \quad (1.21)$$

для любых $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Применим метод математической индукции. Прежде всего, для $n = 1$ неравенство (1.21) совпадает с только что доказанным неравенством из леммы 1.2. Предположим, что (1.21) выполнено для n и рассмотрим произвольный набор чисел $\{a_i\}_{i=0}^{n+1}$. По индуктивному предположению

$$\begin{aligned} R_{n+1} &:= \left(\int_0^1 \left| a_0 + l \sum_{i=1}^{n+1} a_i r_i(t) \right|^q dt \right)^{1/q} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left| a_0 + la_{n+1} + l \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^q + \left| a_0 - la_{n+1} + l \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^q \right) dt \right)^{1/q} \leq \\ &\leq 2^{-1/q} (\|F\|_p^q + \|G\|_p^q)^{1/q}, \end{aligned}$$

где

$$F(t) := a_0 + la_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \text{ и } G(t) := a_0 - la_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i r_i(t).$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$(\|F\|_p^q + \|G\|_p^q)^{1/q} \leq \|(|F(t)|^q + |G(t)|^q)^{1/q}\|_p.$$

Действительно, если положить $\alpha = p/q$, то, как легко видеть, оно эквивалентно неравенству Минковского $\|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha \leq \|f + g\|_\alpha$ для L_α -нормы ($0 < \alpha < 1$). Поэтому из предыдущего неравенства по лемме 1.2 для $v = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i r_i(t)$ и $u = a_{n+1}$ в итоге следует

$$R_{n+1} \leq 2^{-1/q} \|(|F(t)|^q + |G(t)|^q)^{1/q}\|_p \leq \left(\int_0^1 \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

□

Теорема 1.4 и замечание 1.5, в частности, показывают, что система Радемахера — симметричная базисная последовательность в пространстве $L_p[0, 1]$ для любого $1 \leq p \leq \infty$. Докажем, что аналогичное свойство она имеет в любом с.п.

Предложение 1.4. *Если $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $\pi = \pi(k)$ — произвольная перестановка множества натуральных чисел, то модули функций*

$$x(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k r_k(t) \quad \text{и} \quad y(t) = \sum_{k=1}^\infty |a_{\pi(k)}| r_k(t)$$

равноизмеримы.

Доказательство. Прежде всего, по теореме 1.1 функции $x(t)$ и $y(t)$ измеримы и конечны п.в. на $[0, 1]$. Рассматривая их как случайные величины на этом отрезке, найдем характеристические функции соответствующих распределений. По лемме 1.1

$$\varphi_x(t) = \int_0^1 \exp(itx(u)) du = \prod_{k=1}^\infty \int_0^1 \exp(ita_k r_k(u)) du = \prod_{k=1}^\infty \cos(t|a_k|). \quad (1.22)$$

Совершенно аналогичным образом получаем

$$\varphi_y(t) = \prod_{k=1}^\infty \cos(t|a_{\pi(k)}|). \quad (1.23)$$

Так как $\cos z = 1 - 2\sin^2(z/2)$ и по условию ряд $\sum_{k=1}^\infty \sin^2(t|a_k|/2)$ сходится, то произведение (1.22) сходится абсолютно для любого $t \in \mathbb{R}$. Тем самым произведения (1.22) и (1.23) совпадают для любого $t \in \mathbb{R}$, т.е. $\varphi_x(t) = \varphi_y(t)$ ($t \in \mathbb{R}$). По теореме единственности [27, следствие из теоремы 6.3.2, с. 141] характеристическая функция однозначно определяет функцию распределения случайной величины, т.е.

$$m\{t \in [0, 1] : x(t) < \tau\} = m\{t \in [0, 1] : y(t) < \tau\} \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

откуда, в частности, следует нужное утверждение. □

Следствие 1.7. *Система Радемахера является симметричной базисной последовательностью в любом с.п. X на $[0, 1]$. Кроме того, если $(a_k^*)_{k=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^\infty$, где $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, то функции $\sum_{k=1}^\infty a_k r_k$ и $\sum_{k=1}^\infty a_k^* r_k$ принадлежат или нет пространству X одновременно и выполнено равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k^* r_k \right\|_X. \quad (1.24)$$

Доказательство. Проверим сначала, что $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ — монотонная базисная последовательность в с.п. X . Иначе говоря, покажем, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и любых $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k r_k \right\|_X. \quad (1.25)$$

Действительно, рассмотрим преобразование ω отрезка $[0, 1]$ на себя, переставляющее соседние двоичные интервалы Δ_{n+1}^{2m-1} и Δ_{n+1}^{2m} ($m = 1, 2, \dots, 2^n$), на которых функция r_{n+1} принимает значения $+1$ и -1 соответственно. Очевидно, что ω сохраняет меру, и поэтому по определению с.п., если $y := \sum_{k=1}^{n+1} a_k r_k$, то $\|y(\omega)\|_X = \|y\|_X$. Но тогда, применяя неравенство треугольника к равенству $\sum_{k=1}^n a_k r_k = (y + y(\omega))/2$, мы получаем (1.25).

Далее, так как $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, то $a_k^* = |a_{\pi(k)}|$ для некоторой перестановки π натурального ряда. Поэтому соотношение (1.24), а тем самым и симметричность $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ в X непосредственно вытекают из предложения 1.4 и определения с.п. $\square$

В заключение мы докажем одно утверждение о сравнении сумм Радемахера с невозрастающими ступенчатыми функциями, которое потребуется нам в § 4 и § 5.

Предложение 1.5. *Если*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t), \quad a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \chi_{(0, 2^{-k-1})}(t) \leq x^*(t).$$

Доказательство. Определим функции

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* r_k(t) \quad \text{и} \quad y_m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^* r_k(t) \quad (m \in \mathbb{N}),$$

где по-прежнему $(a_k^*)_{k=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^\infty$. Для произвольного $l < m$ вторую из них запишем в виде

$$y_m(t) = a_1^* r_1(t) + a_2^* r_2(t) + \dots + a_l^* r_l(t) + \sum_{k=l+1}^m a_k^* r_k(t).$$

Так как последнее слагаемое, рассматриваемое на отрезке $[0, 2^{-l}]$, симметрично распределено, то существует множество $E_l \subset [0, 2^{-l}]$, $m(E_l) \geq 2^{-l-1}$, на котором оно неотрицательно. Тем самым $y_m(t) \geq a_1^* + a_2^* \dots + a_l^*$ для $t \in E_l$, и значит, для всех $l \leq m$

$$y_m^*(t) \geq \sum_{k=1}^l a_k^* \chi_{(0, 2^{-k-1})}(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

По теореме 1.1 $y_m(t) \rightarrow y(t)$ при $m \rightarrow \infty$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, и $y_m^*(t) \rightarrow y^*(t)$ п.в. на $[0, 1]$ [46, глава 2, § 2, свойство 11°, с. 93]. Так как ввиду предложения 1.4 $y^*(t) = x^*(t)$, то отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$\sum_{k=1}^l a_k^* \chi_{(0, 2^{-k-1})}(t) \leq x^*(t)$$

для всех $l \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, 1]$. В итоге, переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем требуемое неравенство. $\square$

Следствие 1.8. *Пусть X — с.п. на $[0, 1]$, $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$. Если*

$$x_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \quad \text{и} \quad f_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \chi_{(0, 2^{-k+1})}(t),$$

то $\|f_a\|_X \leq 4\|x_a\|_X$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$f_a(t) = \sigma_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \chi_{(0, 2^{-k-1})}(t) \right),$$

где $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)$, и воспользоваться тем, что $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ [46, § 2.4, следствие 1]. $\square$

Комментарии и литературные указания. Впервые функции Радемахера $r_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) появились в 1922 году в работе Х. Радемахера [131], использовавшего при этом последовательность "двоичных знаков" числа $t \in [0, 1]$ (см. соотношения (1.1)). Отметим однако, что в теории вероятностей эта система как последовательность независимых одинаково и симметрично распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 , фактически была известна задолго до этого. Особенно большое внимание уделялось изучению поведения сумм $\sum_{k=1}^n r_k(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в связи с усиленным законом больших чисел Бореля и его уточнениями [54, § 1].

Существует и другое, столь же часто встречающееся определение функций Радемахера как характеров на компактной абелевой группе Кантора $\mathcal{K} = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ функций, действующих из $\mathbb{N}$ в двухточечное множество $\{-1, 1\}$ (см., например, [34, § 1.2], [62, § 14.1], [80]). При этом $\mathcal{K}$ снабжается дискретной топологией и естественным произведением, а n -ый характер Радемахера r_n определяется равенством $r_n(\omega) = \omega(n)$ ($\omega \in \mathcal{K}$).

Заметим, что система Радемахера является также частным случаем следующего класса функциональных последовательностей. Пусть функция $\psi \in L_2(-\infty, \infty)$ имеет период 1 и для всех $t \in \mathbb{R}$ $\psi(t) + \psi(t + 1/2) = 0$. Положим: $\psi_n(t) = \psi(2^{n-1}t)$ ($n = 1, 2, \dots$). Нетрудно проверить, что $\{\psi_n\}$ — ортогональная система функций на $[0, 1]$ [39, § 2.2, с. 56]. В частности, если $\psi(t) = \text{sign} \sin 2\pi t$, то мы получим систему Радемахера.

§ 1 содержит, в основном, стандартные, хорошо известные факты о функциях Радемахера. Система $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — простой, но одновременно очень важный пример последовательности независимых функций. Понятие независимости, как известно, является центральным в теории вероятностей. Чрезвычайно полезно оно также и в теории функций; подход к построению последовательностей независимых функций с этой точки зрения применялся в 30-ые годы прошлого века в работах польских математиков (Г. Штейнгауз, С. Банах, Ж. Марцинкевич, А. Зигмунд и др.) и последовательно проводится в § 2.1 и § 2.2 монографии [41]. В частности, равенство (1.2) из леммы 1.1 справедливо для любых наборов независимых функций [41, теорема 2.2.4].

Теорема 1.1 была доказана Х. Радемахером [131], а в некотором смысле обратный результат — теорема 1.2 — А. Н. Колмогоровым [43] (на самом деле, там доказан более общий результат для систем независимых функций, удовлетворяющих определенным условиям). Доказательства этих теорем взяты из [39, § 4.5].

Классическое неравенство (1.10) было доказано А. Я. Хинчиным в работе [109] с целью получить "хорошую" оценку мер

$$m\left\{t \in [0, 1] : \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right| \geq \tau\right\} \quad (\tau > 0).$$

В дальнейшем на этом пути был найден знаменитый "закон повторного логарифма", который явился определенным итогом исследований, связанных с уточнением усиленного закона больших чисел Бореля [54, § 1]. Теоремы 1.3 и 1.4, а также следствие 1.5 стали источником огромного количества исследований и обобщений, нашли многочисленные применения в самых различных разделах анализа (см., например, обзор [54], который содержит различные варианты неравенства Хинчина в случае мартингалов, результаты, относящиеся к нахождению наилучших констант в этих неравенствах, а также много другого интересного материала). Фундаментальную роль играют эти неравенства в дальнейшем и в этой книге. Неравенства (1.12) послужили отправной точкой для различных исследований. Отметим, в частности, работу [99], где рассматривается вопрос, для каких выпуклых возрастающих функций Φ на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$, неравенство

$$\int_0^1 \Phi\left(\sum_{k=1}^n \sigma_i r_i(t)\right) dt \leq \mathbb{E}\Phi\left(\sum_{k=1}^n \eta_i\right)$$

выполняется для всех независимых симметрично распределенных случайных величин η_i ($i = 1, 2, \dots, n$) таких, что $\mathbb{E}\eta_i^2 = \sigma_i^2$.

Результат, упомянутый в замечании 1.4, был доказан С. Шареком в работе [138]. Векторнозначный вариант неравенства Хинчина, доказанный в следствии 1.6, несмотря на свою простоту нашел многочисленные приложения при изучении пространств измеримых функций (см., например, монографию [114]). Предложение 1.2 говорит о том, что функции Радемахера образуют систему

Сидона-Зигмунда в узком смысле. Этот результат был доказан в [107]. Теорема 1.5 была доказана К. Борелем [27] в 1979 году (работа осталась неопубликованной). Ее доказательство опирается на лемму 1.2, полученную в [76] (при изложении этих результатов мы следуем [114, Theorem 1.e.13 и Lemma 1.e.14]). Важное в дальнейшем предложение 1.5 было доказано в работе [133].

§ 2

СУММЫ РАДЕМАХЕРА В L_p -ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Оценки L_p -норм предыдущего параграфа (прежде всего, неравенства (1.15) и (1.20)) содержат константы, зависящие от p , и поэтому на их основе можно лишь утверждать, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_p \leq C(a) \sqrt{p} \quad (p \geq 1), \quad \text{если } (a_k) \in \ell_2. \quad (2.1)$$

Здесь будут получены гораздо более точные результаты, которые в принципе позволяют определить для каждой последовательности коэффициентов $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ порядок нормы $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_p$ при $p \rightarrow \infty$. Центральную роль будет играть при этом $\mathcal{K}$ -функционал Петре $\kappa_a(t) := \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$, построенный по банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) . Напомним его определение: если (X_0, X_1) — банахова пара, $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$, то

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \}.$$

Прежде всего, поставим перед собой задачу "расшифровать" функционал $\kappa_a(t)$, найдя для него достаточно простые эквивалентные выражения. Начнем с его функционального аналога (в будущем он нам тоже понадобится).

Предложение 2.1. Для произвольной $f \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$ и любых $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2 ds \right)^{1/2} \right\} &\leq \mathcal{K}(t, f; L_1, L_2) \\ &\leq \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доказательство. Для любого $t > 0$ обозначим $E = \{s > 0 : |f(s)| \geq f^*(t^2)\}$, $f_0(s) = f(s)\chi_E(s)$, $f_1(s) = f(s) - f_0(s)$. Не ограничивая общности можно считать, что $m\{s > 0 : f(s) = \tau\} = 0$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$. Тогда функция $|f_0|$ равноизмерима с функцией $f^*\chi_{(0, t^2)}$, а $|f_1|$ — с $f^*\chi_{(t^2, \infty)}$. Поэтому

$$\|f_0\|_1 + t \|f_1\|_2 = \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2 ds \right)^{1/2},$$

откуда сразу вытекает правое неравенство в (2.2).

Для доказательства противоположного неравенства возьмем произвольное представление $f = g + h$, где $g \in L_1$, $h \in L_2$. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению перестановки

$$m\{s > 0 : |g(s)| > g^*(u/2 - \varepsilon)\} \leq u/2 - \varepsilon$$

и

$$m\{s > 0 : |h(s)| > h^*(u/2 - \varepsilon)\} \leq u/2 - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$m\{s > 0 : |f(s)| > g^*(u/2 - \varepsilon) + h^*(u/2 - \varepsilon)\} \leq u - 2\varepsilon < u,$$

откуда

$$f^*(u) \leq g^*(u/2 - \varepsilon) + h^*(u/2 - \varepsilon).$$

Так как перестановка непрерывна слева, а $\varepsilon > 0$ произвольно, то в итоге

$$f^*(u) \leq g^*(u/2) + h^*(u/2), \quad u > 0. \quad (2.3)$$

Поэтому, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \|g\|_1 + t\|h\|_2 &\geq \frac{1}{2} \left(\int_0^{t^2} g^*(u/2) du + t \left(\int_0^{t^2} (h^*(u/2))^2 du \right)^{1/2} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\int_0^{t^2} g^*(u/2) du + \int_0^{t^2} h^*(u/2) du \right) \geq \frac{1}{2} \int_0^{t^2} f^*(u) du. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} t^2 \int_{t^2}^{\infty} (g^*(u/2))^2 du &\leq \int_0^{t^2} g^*(u/2) du \int_{t^2}^{\infty} g^*(u/2) du \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} g^*(u/2) du \right)^2 = 4\|g\|_1^2, \end{aligned}$$

и, значит, ввиду (2.3)

$$\begin{aligned} \|g\|_1 + t\|h\|_2 &\geq \frac{t}{2} \left(\int_{t^2}^{\infty} (g^*(u/2))^2 du \right)^{1/2} \\ &+ \frac{t}{2} \left(\int_{t^2}^{\infty} (h^*(u/2))^2 du \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{t}{2} \left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(u)^2 du \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.4) по определению $\mathcal{K}$ -функционала получаем левое неравенство в (2.2). $\square$

Для того, чтобы получить аналогичный результат для $\kappa_a(t)$, нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, где для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{(k-1, k]}(t) \quad (t > 0). \quad (2.5)$$

Лемма 2.1. Для любых $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t > 0$

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_1, L_2) = \kappa_a(t). \quad (2.6)$$

Доказательство. Прежде всего, легко проверить, что

$$\|f_a\|_1 = \|a\|_{\ell_1} \quad \text{и} \quad \|f_a\|_2 = \|a\|_{\ell_2}. \quad (2.7)$$

Если $a = b + c$, где $b \in \ell_1$, $c \in \ell_2$, то

$$\|b\|_{\ell_1} + t\|c\|_{\ell_2} = \|f_b\|_1 + t\|f_c\|_2$$

для функций $f_b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{(k-1, k]}$ и $f_c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{(k-1, k]}$. Так как $f_b + f_c = f_a$, то отсюда

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_1, L_2) \leq \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2).$$

Наоборот, пусть $f_a = g + h$, где $g \in L_1$, $h \in L_2$. Непосредственно проверяется, что оператор усреднения

$$Qx(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \chi_{(k-1, k]}(t) \quad (t > 0),$$

где $a_k(x) = \int_{k-1}^k x(s) ds$, является проектором в L_1 и в L_2 с нормой 1. Поэтому ввиду (2.7)

$$\|g\|_1 + t\|h\|_2 \geq \|Qg\|_1 + t\|Qh\|_2 = \|a(g)\|_{\ell_1} + t\|a(h)\|_{\ell_2},$$

где $a(x) = (a_k(x))_{k=1}^{\infty}$. Кроме того, так как $f_a = Qf_a = Qg + Qh$, то $a = a(g) + a(h)$. Поэтому из последнего неравенства следует

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \leq \mathcal{K}(t, f_a; L_1, L_2),$$

и равенство (2.6) доказано. $\square$

Предложение 2.2. Для любых $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\} &\leq \kappa_a(t) \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $(a_i^*)_{i=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Если $0 < t < 1$, то ввиду неравенства $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$ $\kappa_a(t) = t\|a\|_2$ и в этом случае (2.8) выполняется очевидным образом.

Пусть $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ и $t \geq 1$. Так как пространства ℓ_1 и ℓ_2 симметричны, то из определения $\mathcal{K}$ -функционала следует, что $\kappa_{|a_{\pi}|}(t) = \kappa_a(t)$, где π — произвольная перестановка последовательности натурального ряда, а $a_{\pi} = (a_{\pi(k)})_{k=1}^{\infty}$. Поэтому можно считать, что $a_k = a_k^*$.

Для фиксированного t введем $b^t = (b_k^t)$, $b_k^t = a_k$, если $k \leq [t^2]$, и $b_k^t = 0$, если $k > [t^2]$. Кроме того, пусть $c^t = a - b^t$. Тогда опять по определению $\mathcal{K}$ -функционала мы сразу получаем правое неравенство в (2.8). Левое неравенство непосредственно следует из предложения 2.1 и леммы 2.1. Действительно, если f_a опять определяется соотношением (2.5), то

$$\begin{aligned} \kappa_a(t) &\geq \kappa_a(\sqrt{[t^2]}) = \mathcal{K}(\sqrt{[t^2]}, f_a; L_1, L_2) \\ &\geq \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{[t^2]} f_a^*(s) ds + t \left(\int_{[t^2]}^{\infty} f_a^*(s)^2 ds \right)^{1/2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

$\square$

В § 8 нам понадобятся следующие свойства функционала $\kappa_a(t)$, непосредственно вытекающие из соотношения (2.8).

Следствие 2.1. Функция $\kappa_a(t)$ непрерывна и возрастает при $t \geq 0$, и для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0+} \kappa_a(t) = 0$;
- 2) $\frac{1}{4} \|a\|_1 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa_a(t) \leq \|a\|_1$.

Далее нам неоднократно потребуется еще одна аппроксимация функционала $\kappa_a(t)$. Для произвольных $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t \in \mathbb{N}$ определим норму

$$\|a\|_{Q(t)} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad (2.9)$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\{A_j\}_{j=1}^t$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Лемма 2.2. Если $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t^2 \in \mathbb{N}$, то

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leq \kappa_a(t) \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Прежде всего, из определения $\|\cdot\|_{Q(t)}$ следует, что $\|a\|_{Q(t^2)} \leq \|a\|_1$ и $\|a\|_{Q(t^2)} \leq t\|a\|_2$. Действительно, первое неравенство очевидно, а для доказательства второго заметим, что ввиду неравенства Коши-Буняковского

$$\sum_{j=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \leq t \left(\sum_{j=1}^{t^2} \sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} = t\|a\|_2,$$

где $\{A_j\}_{j=1}^{t^2}$ — произвольное разбиение множества натуральных чисел. Поэтому

$$\begin{aligned}\kappa_a(t) &= \inf\{\|b\|_1 + t\|c\|_2 : b + c = a, b \in \ell_1, c \in \ell_2\} \geq \\ &\geq \inf\{\|b\|_{Q(t^2)} + \|c\|_{Q(t^2)} : b + c = a, b \in \ell_1, c \in \ell_2\} \geq \|a\|_{Q(t^2)},\end{aligned}$$

и левая часть (2.10) доказана.

Для доказательства правой части (2.10) нам потребуется равенство

$$\kappa_a(t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k : b = (b_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2, \mathcal{J}_{\infty,2}(t^{-1}, b) \leq 1 \right\}, \quad (2.11)$$

где $\mathcal{J}_{\infty,2}(s, b) := \max\{\|b\|_{\infty}, s\|b\|_2\}$ ($s > 0$). Для доказательства (2.11) через ℓ_2^t обозначим пространство ℓ_2 с нормой $\kappa_a(t)$. Тогда по теореме Хана-Банаха

$$\kappa_a(t) = \sup\{|f(a)| : f \in (\ell_2^t)^*, \|f\|_{(\ell_2^t)^*} \leq 1\}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что сопряженное пространство $(\ell_2^t)^*$ иначе можно описать как множество всех функционалов вида

$$f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad (a \in \ell_2), \quad (2.12)$$

и при этом $\mathcal{J}_{\infty,2}(1/t, b) = \|f\|_{(\ell_2^t)^*}$.

Действительно, пусть сначала $f \in (\ell_2^t)^*$. Если $a \in \ell_1$, то $|f(a)| \leq \|f\|_{(\ell_2^t)^*} \|a\|_1$, откуда f представим в виде (2.12), и для $b = (b_k)_{k=1}^{\infty}$ получаем: $\|b\|_{\infty} \leq \|f\|_{(\ell_2^t)^*}$. Совершенно аналогично $\|b\|_2 \leq t\|f\|_{(\ell_2^t)^*}$. Следовательно, $\mathcal{J}_{\infty,2}(1/t, b) \leq \|f\|_{(\ell_2^t)^*}$.

Наоборот, пусть $a \in \ell_2$. Тогда, если $a = c + d$ и $c \in \ell_1, d \in \ell_2$, то

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k b_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} d_k b_k \right| \leq \|b\|_{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| + \\ &+ \frac{1}{t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2} \cdot t \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{J}_{\infty,2}(1/t, b) (\|c\|_1 + t\|d\|_2).\end{aligned}$$

Переходя к точной нижней грани по всем представлениям a получаем, что для функционала f , определенного соотношением (2.12), выполнено:

$$\|f\|_{(\ell_2^t)^*} \leq \mathcal{J}_{\infty,2}(1/t, b),$$

и (2.11) доказано.

Ввиду (2.11) для всякого $\delta > 0$ найдется такая последовательность $b \in \ell_2$, что

$$(1 - \delta) \kappa_a(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_{\infty,2}(t^{-1}, b) \leq 1.$$

Выберем $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t^2} \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ по индукции следующим образом: если $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_m$ уже найдены, то

$$n_{m+1} = 1 + \sup \left\{ k : \sum_{n=n_m+1}^k b_n^2 \leq 1 \right\}.$$

Так как $\|b\|_{\infty} \leq 1$, то $\sum_{n=n_m+1}^{n_m+1} b_n^2 \leq 2$. Из того, что $\|b\|_2 \leq t$, следует: $n_{t^2} = \infty$. Таким образом,

$$\begin{aligned}(1 - \delta) \kappa_a(t) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} b_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} a_n^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)}.\end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для всех $\delta > 0$, то лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем сформулировать и прокомментировать один из главных результатов параграфа.

Теорема 2.1. *Существует универсальная константа $\gamma > 0$ такая, что для всех $t \geq 1$ и всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ выполнено следующее неравенство*

$$\gamma \kappa_a(\sqrt{t}) \leq \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_t \leq \kappa_a(\sqrt{t}). \quad (2.13)$$

Прежде, чем доказывать это утверждение, убедимся в том, что неравенства (2.8) и (2.13) способны дать точную асимптотику нормы $\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_t$ для различных конкретных последовательностей коэффициентов $(a_k)_{k=1}^\infty$. Рассмотрим три примера: а) $a_k = 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$); б) $a_k = 2^{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$) и в) $a_k = 1/\sqrt{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $a_k = 0$ ($k > n$). Из неравенства Хинчина (1.10) во всех трех случаях вытекает лишь оценка (2.1). В то же время, используя неравенства (2.8) и (2.13), мы получаем гораздо более полную информацию об асимптотике этой величины, совершенно различную для этих последовательностей. А именно, простые вычисления показывают, что

$$а) \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_t \asymp \ln(1+t), \quad б) \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_t \asymp 1,$$

а

$$в) \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_t \asymp \sqrt{\min(n, t)}.$$

Для доказательства теоремы 2.1 нам потребуется неравенство Пэли-Зигмунда, играющее важную роль при изучении систем независимых функций (см., например, [38]).

Лемма 2.3. *Пусть $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $f \in L_2(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $f \geq 0$. Тогда для любого $0 < \lambda < 1$*

$$\mathbb{P}\{f \geq \lambda \mathbb{E}(f)\} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}(f))^2}{\mathbb{E}(f^2)}. \quad (2.14)$$

В частности, если m — мера Лебега на $[0, 1]$ и $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, то

$$m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k(t) \right|^2 \geq \lambda \sum_{k=1}^\infty a_k^2 \right\} \geq \frac{1}{9} (1 - \lambda)^2. \quad (2.15)$$

Доказательство. Определим с.в. g следующим образом:

$$g(\omega) = f(\omega), \text{ если } f(\omega) \geq \lambda \mathbb{E}(f), \text{ и } g(\omega) = 0, \text{ если } f(\omega) < \lambda \mathbb{E}(f).$$

Ввиду интегрального неравенства Коши-Буняковского

$$(\mathbb{E}(g))^2 \leq \mathbb{E}(g^2) \mathbb{P}\{g \neq 0\} \leq \mathbb{E}(f^2) \mathbb{P}\{f \geq \lambda \mathbb{E}(f)\}.$$

Кроме того, $\mathbb{E}(f) \leq \mathbb{E}(g) + \lambda \mathbb{E}(f)$. Следовательно,

$$(1 - \lambda)^2 (\mathbb{E}(f))^2 \leq \mathbb{E}(f^2) \mathbb{P}\{f \geq \lambda \mathbb{E}(f)\},$$

и неравенство (2.14) доказано.

Для того, чтобы получить неравенство (2.15), рассмотрим функцию

$$f(t) := \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^2.$$

Тогда $\mathbb{E}(f) = \sum_{k=1}^n a_k^2$, и ввиду неравенства Хинчина (1.10) для $p = 4$ мы имеем: $(\mathbb{E}(f))^2 \geq \frac{1}{9} \mathbb{E}(f^2)$. Тем самым (2.15) становится частным случаем (2.14). $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Правая часть неравенства — непосредственное следствие определения $\mathcal{K}$ -функционала и неравенства Хинчина. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем $b \in \ell_1$ и $c \in \ell_2$, такие, что

$$\|b\|_1 + \sqrt{t} \|c\|_2 \leq \kappa_a(\sqrt{t}) + \varepsilon.$$

Тогда, применяя неравенство (1.15) (с учетом значения константы), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k \right\|_t + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k \right\|_t \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| + \sqrt{t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2} \leq \kappa_a(\sqrt{t}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Левую часть неравенства докажем сначала в случае, когда $t \in \mathbb{N}$. По определению $Q(t)$ выберем попарно дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_t$ во множестве натуральных чисел, такие, что

$$\|a\|_{Q(t)} \leq \frac{3}{2} \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (2.16)$$

Тогда, используя неравенство Чебышева и независимость функций Радемахера (см. предложение 1.1), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t^t &= \left\| \sum_{j=1}^t \sum_{k \in A_j} a_k r_k \right\|_t^t \geq \\ &\geq 2^{-t} \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\}^t m \left(\bigcap_{j=1}^t \left\{ \sum_{k \in A_j} a_k r_k \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\} \right) = \\ &= 2^{-t} \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\}^t \prod_{j=1}^t m \left(\sum_{k \in A_j} a_k r_k \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Так как ввиду симметричности распределения функций Радемахера и неравенства Пэли-Зигмунда (2.15)

$$m \left(\sum_{k \in A_j} a_k r_k \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right) = \frac{1}{2} m \left(\left| \sum_{k \in A_j} a_k r_k \right|^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{k \in A_j} a_k^2 \right) \geq \frac{1}{32},$$

то из неравенства (2.16) и леммы 2.2 следует

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t \geq \frac{1}{64} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{96\sqrt{2}} \kappa_a(\sqrt{t}).$$

Если $t \geq 1$ произвольно, то, учитывая вогнутость $\mathcal{K}$ -функционала, а также элементарное неравенство $\sqrt{t} \leq 2\sqrt{[t]}$ получим

$$\frac{1}{192\sqrt{2}} \kappa_a(\sqrt{t}) \leq \frac{1}{96\sqrt{2}} \kappa_a(\sqrt{[t]}) \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{[t]} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t,$$

и теорема 2.1 доказана. $\square$

Следующий важный результат позволяет находить распределение функций, представимых в виде рядов по системе Радемахера и будет играть важную роль при изучении подпространств симметричных пространств, порожденных этой системой, в последующих параграфах.

Теорема 2.2. *Существует универсальная константа $C > 0$ такая, что для всех $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t \geq 0$ справедливы неравенства*

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \kappa_a(t) \right\} \leq e^{-t^2/2} \quad (2.17)$$

u

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > C^{-1} \kappa_a(t) \right\} \geq C^{-1} e^{-Ct^2}. \quad (2.18)$$

В следствии 1.5, используя неравенство Хинчина, мы уже получили экспоненциальную оценку для распределений полиномов по системе Радемахера (см. неравенство (1.13)). В доказательстве теоремы 2.2 нам будет нужен ее несколько более точный вариант.

Лемма 2.4. Если $S_n = \sum_{k=1}^n a_k r_k$, то для произвольного $u > 0$

$$m\{t \in [0, 1] : S_n(t) > u\} \leq \exp \left(-\frac{u^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \right). \quad (2.19)$$

Доказательство. Ввиду неравенства Чебышева и равенства (1.2) из предложения 1.1 для любого $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} m\{t \in [0, 1] : S_n(t) > u\} &= m\{t \in [0, 1] : \exp(\lambda S_n(t)) > \exp(\lambda u)\} \leq e^{-\lambda u} \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) \\ &= e^{-\lambda u} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{\lambda a_k r_k}) = e^{-\lambda u} \prod_{k=1}^n \cosh(\lambda a_k). \end{aligned}$$

Так как $\cosh x := 2^{-1}(e^x + e^{-x}) \leq e^{x^2/2}$ (достаточно разложить каждую из этих функций в ряд Тейлора и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях аргумента), то отсюда

$$m\{t \in [0, 1] : S_n(t) > u\} \leq e^{-\lambda u} \prod_{k=1}^n \exp \left(\frac{\lambda^2 a_k^2}{2} \right) = \exp \left(\frac{\lambda^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{2} - \lambda u \right).$$

Легко проверить, что минимум правой части достигается при $\lambda_0 = u / \sum_{k=1}^n a_k^2$. Подставляя это значение, мы получаем неравенство (2.19). $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Докажем сначала неравенство (2.17). По определению $\mathcal{K}$ - функционала для произвольного $\delta > 0$ найдем разложение $a = b + c$, где $b \in \ell_1$, $c \in \ell_2$, такое, что

$$(1 + \delta) \kappa_a(t) > \|b\|_1 + t\|c\|_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > (1 + \delta) \kappa_a(t) \right\} &\leq m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k > \|b\|_1 \right\} \\ &+ m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k > t\|c\|_2 \right\} \leq e^{-t^2/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали лемму 2.4, а также то, что (см. замечание 1.5)

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k > \|b\|_1 \right\} = 0.$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получаем (2.17).

Переходя к доказательству неравенства (2.18), предположим сначала, что $t \in \mathbb{N}$. Для фиксированного $\delta > 0$ найдем дизъюнктивные $A_1, A_2, \dots, A_{t^2}$, такие, что

$$\bigcup_{j=1}^{t^2} A_j = \mathbb{N} \text{ и } \|a\|_{Q(t^2)} \leq (1 + \delta) \sum_{j=1}^{t^2} \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда ввиду леммы 2.2 и независимости функций Радемахера (предложение 1.1)

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \frac{1}{2} \kappa_a(t) \right\} \geq m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \frac{1}{\sqrt{2}} \|a\|_{Q(t^2)} \right\} \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq m \left\{ \sum_{j=1}^{t^2} \sum_{k \in A_j} a_k r_k > \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\delta) \sum_{j=1}^{t^2} \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\} \geq \\ &\geq \prod_{j=1}^{t^2} m \left\{ \sum_{k \in A_j} a_k r_k > \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\delta) \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Пэли-Зигмунда (2.15) и учитывая симметричность распределения функций $\sum_{k \in A_j} a_k r_k$ ($j = 1, 2, \dots, t^2$), получаем, что

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \frac{1}{2} \kappa_a(t) \right\} \geq \left(\frac{1}{18} \left(1 - \frac{1}{2} (1+\delta)^2 \right)^2 \right)^{t^2}$$

или, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$,

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \frac{1}{2} \kappa_a(t) \right\} \geq \exp(-(\ln 72)t^2).$$

Тем самым (2.18) доказано, если $t \in \mathbb{N}$.

В случае $t \geq 1$, записав (2.18) для натурального числа $[t] + 1$ и затем применив неравенства

$$\kappa_a(t) \leq \kappa_a([t] + 1) \text{ и } ([t] + 1)^2 \leq 4t^2,$$

получаем, что (2.18) выполняется с $C = 4 \ln 72$. И наконец, если $t < 1$, то $\kappa_a(t) = t \|a\|_2$, и поэтому опять ввиду неравенства Пэли-Зигмунда

$$m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \frac{1}{2} \kappa_a(t) \right\} = m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k > \frac{t}{2} \|a\|_2 \right\} \geq \frac{1}{18} \left(1 - \frac{t^2}{4} \right)^2 \geq \frac{1}{32}.$$

В итоге (2.18) справедливо при всех $t > 0$ с константой $C = 32$. $\square$

Доказанная теорема позволяет найти точные оценки сверху и снизу для невозрастающей перестановки произвольной суммы Радемахера.

Следствие 2.2. *Существуют универсальные константы $\beta \in (0, 1)$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для всех $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $0 < u \leq 1$*

$$x_a^*(u) \leq C_1 \kappa_a(\ln^{1/2}(e/u)) \quad (2.20)$$

и

$$x_a^*(\beta u) \geq C_2^{-1} \kappa_a(\ln^{1/2}(e/u)), \quad (2.21)$$

где $x_a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(s)$.

Доказательство. Ввиду симметричности распределения сумм Радемахера и соотношения (2.17)

$$m\{s \in [0, 1] : |x_a(s)| > \kappa_a(t)\} = 2m\{s \in [0, 1] : x_a(s) > \kappa_a(t)\} < e \cdot e^{-t^2/2}.$$

Тем самым по определению невозрастающей перестановки измеримой функции после замены $u = e \cdot e^{-t^2/2}$ получим

$$x_a^*(u) \leq \kappa_a(\sqrt{2} \ln^{1/2}(e/u)) \leq \sqrt{2} \kappa_a(\ln^{1/2}(e/u)),$$

т.е. неравенство (2.20) доказано с $C_1 = \sqrt{2}$.

Совершенно аналогичные рассуждения и неравенство (2.18) приводят к соотношению

$$x_a^*(C^{-1} e^{-Ct^2}) \geq C^{-1} \kappa_a(t) \quad (t \geq 0),$$

где $C > 1$ — универсальная константа. Отсюда ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала

$$x_a^*(v) \geq C^{-1} \kappa_a(C^{-1/2} \ln^{1/2}(1/(Cv))) \geq C^{-3/2} \kappa_a(\ln^{1/2}(1/(Cv))) \quad (0 < v \leq C^{-1})$$

или

$$x_a^*(u/(eC)) \geq C^{-3/2} \kappa_a(\ln^{1/2}(e/u)), \quad 0 < u \leq 1.$$

В итоге мы получаем неравенство (2.21) с $\beta = (Ce)^{-1}$ и $C_2 = C^{3/2}$. $\square$

Комментарии и литературные указания. Результаты этого параграфа относятся, главным образом, к поведению сумм Радемахера в L_p -пространствах и существенным образом уточняют классические неравенства Хинчина. Их преимущество состоит в том, что они позволяют определить асимптотическое поведение L_p -норм полиномов Радемахера при $p \rightarrow \infty$ (см. примеры перед леммой 2.3).

Начиная с этого параграфа, широко используется интерполяция операторов и, в частности, $\mathcal{K}$ -функционал Петре, введенный им в 1963 году [125]. Исключительная роль в вопросах, связанных с системой Радемахера, принадлежит $\mathcal{K}$ -функционалу, соответствующему банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) пространств последовательностей. Предложения 2.1 и 2.2, неоднократно применяемые в дальнейшем, являются частными случаями теоремы, доказанной Т. Хольмстедтом в 1970 году [103]. Теорема 2.1, принадлежащая П. Хитченко [102], позволяет определять порядок нормы $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_p$ при $p \rightarrow \infty$ для фиксированной последовательности коэффициентов $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in ell_2$. В ее доказательстве используются две важные леммы: 2.3 и 2.2. Первая из них содержит неравенство Пэли-Зигмунда, играющее фундаментальную роль при изучении систем независимых функций (см., например, монографию [38]), во второй найдено полезное эквивалентное выражение для $\mathcal{K}$ -функционала в банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) . Последний результат параграфа (теорема 2.2) позволяет находить (с точностью до эквивалентности) распределение сумм Радемахера. Этот важный результат был получен С. Монтгомери-Смитом в работе [123]. Он, а также доказанное на его основе следствие 2.2 играют в дальнейшем весьма существенную роль.

§ 3

СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, "ДАЛЕКИХ" ОТ L_{∞}

Мы переходим к изучению одного из основных объектов этой книги — подпространства $\mathcal{R}(X)$ с.п. X , состоящего из всех измеримых функций $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in X$, представимых в виде $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)$ (ряд сходится п.в.), где по-прежнему $r_k(t)$ — функции Радемахера. Оно естественным образом может быть охарактеризовано как пространство последовательностей. Пусть E_X состоит из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, для которых функция $x_a := \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \in X$. Непосредственная проверка показывает, что функционал

$$\|a\|_{E_X} := \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \quad (3.1)$$

является нормой. В частности, если $\|a\|_{E_X} = 0$, то равенство $a = 0$ — следствие ортогональности функций Радемахера (см. также неравенство (1.25) из доказательства следствия 1.7). Покажем, что E_X полно.

Пусть последовательность $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$, $a^n = (a_1^n, a_2^n, \dots)$, фундаментальна в E_X . Это означает, что последовательность функций $\{x_a^n\}$, $x_a^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n r_k$ фундаментальна в X . Следовательно, существует функция $x \in X$ такая, что $x_a^n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ в X , а значит, и в L_1 [46, теорема 2.4.1].

С другой стороны, ввиду L_1 -неравенства Хинчина из теоремы 1.4 последовательность $\{a^n\} = \{a_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в ℓ_2 , и поэтому имеет там предел, который мы обозначим через $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, если $x_a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k$, то

$$\|x_a^n - x_a\|_1 \leq \|x_a^n - x_a\|_2 = \|a^n - a\|_{\ell_2}.$$

Значит, $x_a^n \rightarrow x_a$ в L_1 . В итоге $x = x_a$, откуда $x_a^n \rightarrow x_a$ в X или эквивалентно $a^n \rightarrow a$ в E_X . Тем самым полнота пространства E_X (а тем самым и замкнутость $\mathcal{R}(X)$ в с.п. X) доказана.

Заметим также, что опять ввиду следствия 1.7 пространство E_X с каждой последовательностью $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ содержит последовательность $a_{\pi} = (a_{\pi(k)})$, где π — произвольная перестановка натурального ряда. В итоге заключаем, что каждому с.п. X поставлено в соответствие с.п. последовательностей E_X , изометричное ранее введенному пространству $\mathcal{R}(X)$.

Как мы увидим далее, свойства $\mathcal{R}(X)$ существенным образом зависят от степени "близости" X к пространству L_∞ . Естественной "границей" при этом будет служить пространство G , сепарабельная часть пространства Орлича L_{N_2} , построенного по функции $N_2(t) = e^{t^2} - 1$.

Напомним, что по теореме 1.4 функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t). \quad (3.2)$$

определена и принадлежит пространству $L_p[0, 1]$ для каждого $1 \leq p < \infty$, если последовательность коэффициентов суммируема с квадратом, т.е.

$$\|a\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty. \quad (3.3)$$

Мы покажем, что функции такого вида суммируемы в еще более сильном, экспоненциальном смысле, т.е. $\exp(f(t)^2) \in L_1[0, 1]$. Результат для нас будет предпочтительнее сформулировать и доказать, используя язык функциональных пространств Орлича.

Теорема 3.1. *При выполнении условия (3.3) функция (3.2) принадлежит пространству G .*

Доказательство. Пользуясь разложением в ряд Тейлора

$$\exp(u^2 z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k!} z^{2k},$$

неравенством Хинчина (1.11), а также доказанной там оценкой $B_{2m} \leq m^m$, получим

$$\int_0^1 (\exp(u^2 f(t)^2) - 1) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k!} \int_0^1 f(t)^{2k} dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k!} k^k \|a\|_2^{2k}.$$

Если $u \leq (\sqrt{2e}\|a\|_2)^{-1}$, то ввиду формулы Стирлинга (1.14) сумма в правой части последнего неравенства не превосходит $(2\pi)^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = (2\pi)^{-1/2} < 1$, откуда по определению нормы в пространстве Орлича $\|f\|_{N_2} \leq \sqrt{2e}\|a\|_2$. Рассуждая совершенно аналогично, приходим к следующему неравенству для частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n a_k r_k$ ряда (3.2):

$$\|S_m - S_n\|_{N_2} \leq \sqrt{2e} \left(\sum_{k=n+1}^m a_k^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n < m < \infty.$$

Отсюда ввиду условия (3.3) $S_n \rightarrow f$ в L_{N_2} при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $f \in G$, и теорема доказана. $\square$

Утверждение теоремы 3.1, конечно, останется верным, если пространство G заменить произвольным с.п. X таким, что $G \subset X$. При этом с некоторой константой $C > 0$, зависящей только от X , выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \|a\|_2. \quad (3.4)$$

Действительно, действуя точно так же, как в начале параграфа при доказательстве полноты E_X , можно показать, что линейный оператор

$$Ra(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \quad (0 \leq t \leq 1),$$

отображающий ℓ_2 в X , имеет замкнутый график, а значит, ограничен. Сформулируем результат следующим образом.

Предложение 3.1. *Если с.п. $X \supset G$, то подпространство $\mathcal{R}(X)$ совпадает с замкнутой линейной оболочкой $[r_n]_X$.*

Доказательство. Вложение $[r_n]_X \subset \mathcal{R}(X)$ является непосредственным следствием определений. Предположим теперь, что

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \in \mathcal{R}(X).$$

Так как, в частности, этот ряд сходится п.в., то по теореме 1.2 $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Но тогда, в свою очередь, выполнено соотношение (3.4), и значит, ряд, определяющий функцию f , сходится также в пространстве X , т.е. $f \in [r_n]_X$. $\square$

Далее, ввиду вложения $X \subset L_1$, справедливого для любого с.п. X на $[0, 1]$ [46, теорема 2.4.1], и теоремы 1.4

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \geq c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_1 \geq \frac{c}{2} \|a\|_2, \quad (3.5)$$

т.е. неравенство, противоположное к (3.4), имеет место всегда. В итоге вложение $G \subset X$ гарантирует, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|a\|_2 \quad (3.6)$$

с константами, зависящими только от X . С геометрической точки зрения соотношение (3.6) означает, что система Радемахера в с.п. X эквивалентна каноническому базису в пространстве последовательностей ℓ_2 или, то же самое, $E_X = \ell_2$. Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3.2. *Если X — с.п. на $[0, 1]$, то соотношение (3.6) выполнено тогда и только тогда, когда $G \subset X$.*

Начнем с нескольких лемм, в первой из которых, как обычно, $n_x(z) = m\{\omega : x(\omega) > z\}$ — функция распределения измеримой на I или $I \times I$ функции $x(\omega)$.

Лемма 3.1. *Если для любого $z > 0$ $n_{|x_k|}(z) \rightarrow n_{|x|}(z)$ при $k \rightarrow \infty$, то во всех точках непрерывности перестановки $x^*(t)$ (и значит, п.в.) выполнено: $x_k^*(t) \rightarrow x^*(t)$ ($k \rightarrow \infty$).*

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ непрерывна в точке t_0 и $\varepsilon > 0$. Для $z_1 = x^*(t_0) + \varepsilon$ имеем: $n_{|x|}(z_1) < t_0$ и поэтому $n_{|x_k|}(z_1) < t_0$, если $k \geq k_1$. Из определения перестановки тогда

$$x_k^*(t_0) \leq x^*(t_0) + \varepsilon \quad (k \geq k_1). \quad (3.7)$$

С другой стороны, в силу непрерывности $x^*(t)$ в t_0 существует такое $\delta > 0$, что

$$x^*(t_0 + \delta) \geq x^*(t_0) - \varepsilon. \quad (3.8)$$

Если $z_2 = x^*(t_0 + \delta) - \varepsilon$, то $n_{|x|}(z_2) \geq t_0 + \delta$ и, значит, существует k_2 такое, что при $k \geq k_2$ $n_{|x_k|}(z_2) \geq t_0$. Следовательно, ввиду (3.8)

$$x_k^*(t_0) \geq x^*(t_0) - 2\varepsilon \quad (k \geq k_2).$$

Для $k \geq \max(k_1, k_2)$ выполнены как предыдущее неравенство, так и неравенство (3.7). Объединяя их, получаем утверждение леммы. $\square$

В следующей лемме мы несколько модифицируем определение пространств Орлича. Пусть F — возрастающая функция на $(0, \infty)$ такая, что $F(0) = 0$. Предположим, что функция $e^{F(t)} - 1$ выпукла при достаточно больших $t > 0$. Тогда она порождает пространство Орлича на $[0, 1]$, которое мы будем обозначать через $\text{Exp } L^F$.

Лемма 3.2. *Пусть функция $F(t)$ либо выпукла при $t > 0$, либо $F(t) = t^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Тогда пространство $\text{Exp } L^F$ совпадает с пространством Марцинкевича $M(\psi_F)$, $\psi_F(t) = tF^{-1}(\ln(e/t))$ (F^{-1} — функция, обратная к F), и с константами, зависящими только от F , справедливо соотношение*

$$\|x\|_{\text{Exp } L^F} \asymp \sup_{0 < s \leq 1} \frac{x^*(s)}{F^{-1}(\ln(e/s))}.$$

В частности, пространство Орлича L_{N_α} , $N_\alpha(t) = \exp(t^\alpha) - 1$ ($\alpha > 0$) совпадает с пространством Марцинкевича $M(\psi_\alpha)$, $\psi_\alpha(t) = t \ln^{1/\alpha}(e/t)$, и с константами, зависящими только от α , выполнено:

$$\|x\|_{N_\alpha} \asymp \sup_{0 < s \leq 1} (x^*(s) \ln^{-1/\alpha}(e/s)).$$

Доказательство. Обозначим через $M(\psi_F)_w$ функциональное пространство с квазинормой

$$\|x\|_{M(\psi_F)_w} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{x^*(s)}{F^{-1}(\ln(e/s))}.$$

Ввиду неравенства $x^*(t) \leq 1/t \int_0^t x^*(s) ds$ и определения нормы в пространстве Марцинкевича

$$M(\psi_F) \subset M(\psi_F)_w \text{ и } \|x\|_{M(\psi_F)_w} \leq \|x\|_{M(\psi_F)} \quad (x \in M(\psi_F)). \quad (3.9)$$

Одновременно, используя выражение для фундаментальной функции пространства Орлича (см. § 2), получим:

$$\varphi_{\text{Exp } L^F}(t) = 1/F^{-1}(\ln(1 + 1/t)) \asymp 1/F^{-1}(\ln(e/t)).$$

Следовательно, так как пространство Марцинкевича — наибольшее среди всех с.п. с одной и той же фундаментальной функцией [46, теорема 2.5.7], то

$$\text{Exp } L^F \subset M(\psi_F) \text{ и } \|x\|_{M(\psi_F)} \leq \|x\|_{\text{Exp } L^F} \quad (x \in \text{Exp } L^F). \quad (3.10)$$

Далее, легко проверить, что функция $x_0(t) := F^{-1}(\ln(e/t))$ принадлежит пространству Орлича $\text{Exp } L^F$. Кроме того, по определению пространства $M(\psi_F)_w$ справедливо неравенство

$$x^*(t) \leq \|x\|_{M(\psi_F)_w} x_0(t) \quad (x \in M(\psi_F)_w)$$

(т.е. $x_0(t)$ — функция с максимальной перестановкой в пространстве $M(\psi_F)_w$). Следовательно,

$$M(\psi_F)_w \subset \text{Exp } L^F \text{ и } \|x\|_{\text{Exp } L^F} \leq \|x_0\|_{\text{Exp } L^F} \|x\|_{M(\psi_F)_w} \quad (x \in M(\psi_F)_w).$$

Объединяя последние соотношения с (3.9) и (3.10), получаем оба утверждения леммы. $\square$

В последней из лемм речь пойдет о сепарабельной части второго ассоциированного пространства X'' . Напомним (подробнее см. § 0.1), что (первое) ассоциированное пространство X' к с.п. X состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $y = y(t)$ таких, что

$$\|y\|_{X'} = \sup \left\{ \int_0^1 x(t)y(t) dt : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty.$$

Лемма 3.3. Для любого с.п. X на $[0, 1]$ имеет место изометрическое равенство: $(X'')^\circ = X^\circ$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно в случае, когда $X = L_\infty$. Поэтому предположим, что

$$X \neq L_\infty. \quad (3.11)$$

Тогда для фундаментальной функции X выполнено:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \varphi_X(s) = 0. \quad (3.12)$$

Действительно, если предположить, что при некотором $c > 0$ $\varphi_X(s) \geq c > 0$ ($s \in (0, 1]$), то ввиду симметричности пространства X

$$\|x\|_X = \|x^*\|_X \geq \|x^* \chi_{(0,s)}\|_X \geq x^*(s) \varphi_X(s) \geq cx^*(s) \quad (0 < s \leq 1),$$

откуда $\|x\|_\infty \leq c^{-1} \|x\|_X$ ($x \in X$) и тем самым $X \subset L_\infty$. Так как противоположное вложение $L_\infty \subset X$ выполнено всегда [46, теорема 2.4.1], то мы получаем противоречие с условием (3.11).

Покажем теперь, что (при условии (3.11)) пространство X° сепарабельно. Пусть $x \in X^\circ$ и $\varepsilon > 0$. Прежде всего, существует $y \in L_\infty$, для которой $\|x - y\|_X < \varepsilon/3$. Предположим, что $\|y\|_\infty = M$, и благодаря (3.12) выберем $h > 0$ таким образом, чтобы $\varphi_X(h) < \varepsilon/(6M)$. По теореме Лузина [51, теорема 4.4.4] найдется непрерывная на $[0, 1]$ функция z такая, что $\|z\|_\infty \leq M$ и $m\{t \in [0, 1] : z(t) \neq y(t)\} < h$. Тогда ввиду предыдущего

$$\|y - z\|_X \leq \|(y - z) \chi_{\{y \neq z\}}\|_X \leq 2M \varphi_X(h) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Наконец, используя равномерную непрерывность функции z , найдем функцию

$$u(t) = \sum_{k=1}^{2^n} c_k \chi_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})}, \quad (3.13)$$

где $n \in \mathbb{N}$, а c_k рациональны, такую, что $\|z - u\|_X < \varepsilon/3$. Так как из приведенных неравенств следует, что $\|x - u\|_X < \varepsilon$ и множество функций вида (3.13) счетно, то сепарабельность X° установлена.

Так как X° сепарабельно, то оно изометрически вложено в $(X^\circ)''$ [37, теорема 4.3.3 и следствие 6.1.1]. С другой стороны, из определения X' и свойств интеграла следует, что $(X^\circ)' = X'$, а значит, и $(X^\circ)'' = X''$. Таким образом, X° изометрически вложено во второе ассоциированное пространство X'' . В частности, отсюда следует равенство норм из X и X'' на L_∞ , и в итоге $(X'')^\circ = X^\circ$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Ввиду теоремы 3.1 и замечаний после нее достаточно доказать следующее: если X — произвольное с.п. и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \|a\|_2, \quad (3.14)$$

то $G \subset X$.

Идея доказательства состоит в применении центральной предельной теоремы, формулировка которой приведена в § 0.3 (подробнее см. [27, теорема 7.2]). Применим эту теорему к последовательности функций

$$v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n r_k(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$, рассматриваемом, как обычно, с мерой Лебега. Ввиду симметричности распределения $v_n(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n_{|v_n|}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\{t \in [0, 1] : |v_n(t)| > \tau\} = \Psi(\tau) \quad (\tau > 0),$$

где

$$\Psi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau}^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Тогда по лемме 3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^*(s) = \Psi^{-1}(s) \quad (0 < s \leq 1)$$

($\Psi^{-1}(s)$ — функция, обратная к $\Psi(\tau)$). Пользуясь (3.14), заключаем, что $\|v_n\|_X \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$), и следовательно, ввиду максимальности пространства X'' $\Psi^{-1}(s) \in X''$. Оценка

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \int_{\tau}^{2\tau} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq e^{-2\tau^2}, \quad \text{если } \tau \geq 1,$$

показывает, что $\Psi(\tau) \geq 2/\sqrt{2\pi} e^{-2\tau^2}$ ($\tau \geq 1$), и поэтому, так как X'' симметрично, функция $\ln^{1/2}(e/t) \in X''$. Тем самым по лемме 3.2 $L_{N_2} \subset X''$. В итоге, используя лемму 3.3, получаем: $G \subset (X'')^\circ = X^\circ \subset X$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.1. Из приведенного доказательства теоремы непосредственно вытекает, что вложение $G \subset X$ эквивалентно следующему формально более слабому условию, чем (3.6):

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{k=1}^n r_k \right\|_X < \infty.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких с.п. система Радемахера эквивалентна каноническому базису в ℓ_1 , т.е., когда $E_X = \ell_1$. Прежде всего, ввиду замечания 1.5 это верно для пространства L_∞ . Оказывается, что с точностью до эквивалентной нормы других с.п. с таким свойством нет.

Теорема 3.3. Если X — с.п. на $[0, 1]$, то

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|a\|_1$$

тогда и только тогда, когда $X = L_{\infty}$.

Начнем со следующего простого утверждения.

Лемма 3.4. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$. Для того, чтобы $X = L_{\infty}$ (нормы эквивалентны), необходимо и достаточно существование числа $c > 0$ и последовательности $\{x_n(t)\} \subset X$, такой, что $|x_n(t)| \leq 1$, $x_n(t) \rightarrow 0$ п.в. на $[0, 1]$ и $\|x_n\|_X \geq c$.

Доказательство. Прежде всего, в случае $X = L_{\infty}$ последовательность $x_n(t) = \chi_{(0, 1/n)}(t)$, очевидно, обладает всеми свойствами, о которых говорится в лемме.

Предположим теперь, что $|x_n(t)| \leq 1$ и $x_n(t) \rightarrow 0$ для п.в. $t \in [0, 1]$. Так как из сходимости п.в. следует сходимость по мере, то для каждого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$m \left\{ t \in [0, 1] : |x_n(t)| \geq \frac{c}{2\|\chi_{[0,1]}\|_X} \right\} < \varepsilon.$$

Обозначим

$$E = \left\{ t \in [0, 1] : |x_n(t)| \geq \frac{c}{2\|\chi_{[0,1]}\|_X} \right\} \text{ и } E' = [0, 1] \setminus E.$$

Тогда $m(E) < \varepsilon$ и по условию

$$\|\chi_E\|_X \geq \|x_n \chi_E\|_X \geq \|x_n\|_X - \|x_n \chi_{E'}\|_X \geq c - \frac{c}{2\|\chi_{[0,1]}\|_X} \|\chi_{E'}\|_X \geq \frac{c}{2}.$$

Тем самым ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ мы получаем: $\varphi_X(s) \geq \frac{c}{2} > 0$ для всех $s \in (0, 1]$. Отсюда точно так же, как при доказательстве леммы 3.3, легко вывести, что $X \subset L_{\infty}$. Так как противоположное вложение справедливо всегда, то лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.3. Достаточно доказать, что из неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \geq c\|a\|_1 \tag{3.15}$$

следует $X = L_{\infty}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда $|x_n(t)| \leq 1$ и ввиду (3.15) $\|x_n\|_X \geq c$. То, что $x_n(t) \rightarrow 0$ п.в. на $[0, 1]$, вытекает из усиленного закона больших чисел [27, теорема 9.2.5]. Следовательно, по лемме 3.4 $X = L_{\infty}$ (с эквивалентностью норм). $\square$

В заключение рассмотрим вопрос о дополняемости подпространства $\mathcal{R}(X)$. Напомним, что линейный оператор P , действующий в линейном пространстве E , называется *проектором*, если $P^2 = P$. Замкнутое линейное подпространство H линейного нормированного пространства X называется *дополняемым*, если существует проектор P , ограниченный в X , образ которого совпадает с H .

В следующей теореме наряду с уже рассматривавшимся пространством G важную роль будет играть его ассоциированное пространство G' . Чтобы охарактеризовать его, напомним, что по лемме 3.2 пространство Орлича L_{N_2} совпадает с пространством Марцинкевича $M(\psi_2)$, где $\psi_2(t) = t \ln^{1/2}(e/t)$. В свою очередь, тогда $G = M(\psi_2)^\circ$. Следовательно [46, теорема 2.5.4], G' — это

пространство Лоренца $\Lambda(\psi_2)$. Непосредственные вычисления показывают, что $(\psi_2(t))' \asymp \ln^{1/2}(e/t)$ ($0 < t \leq 1$). Тем самым пространство G' состоит из всех измеримых $x(t)$ таких, что

$$\int_0^1 x^*(t) \ln^{1/2} \frac{e}{t} dt < \infty, \text{ и } \|x\|_{G'} \asymp \int_0^1 x^*(t) \ln^{1/2} \frac{e}{t} dt.$$

Теорема 3.4. *Подпространство $\mathcal{R}(X)$ дополняемо в с.п. X на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда имеют место вложения:*

$$G \subset X \subset G'. \quad (3.16)$$

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие (3.16). Прежде всего, тогда $G'' \subset X'$, и значит, тем более, $G \subset X'$. Таким образом, по теореме 3.2 система Радемахера эквивалентна стандартному базису в ℓ_2 , как в X , так и в X' . Это означает, что при некотором $A > 0$ справедливы неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq A \|a\|_2 \text{ и } \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X'} \leq A \|a\|_2. \quad (3.17)$$

Покажем, что тогда ортогональный проектор

$$Pf(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f(u) r_k(u) du \cdot r_k(t) \quad (3.18)$$

ограничен в X . Действительно, если $c_k(f) := \int_0^1 f(u) r_k(u) du$, то ввиду (3.17) для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k(f)^2 &= \int_0^1 f(u) \sum_{k=1}^n c_k(f) r_k(u) du \\ &\leq \|f\|_X \left\| \sum_{k=1}^n c_k(f) r_k \right\|_{X'} \\ &\leq A \|f\|_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и значит,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)^2 \right)^{1/2} \leq A \|f\|_X \quad (f \in X).$$

Отсюда и опять из-за (3.17)

$$\|Pf\|_X \leq A \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)^2 \right)^{1/2} \leq A^2 \|f\|_X$$

для каждой $f \in X$. Следовательно, подпространство $\mathcal{R}(X)$ дополняемо в X .

Перейдем теперь к доказательству противоположного утверждения. Покажем сначала, что для этого достаточно установить ограниченность в X ортогонального проектора P , определенного соотношением (3.18). Прежде всего (см. рассуждения после доказательства теоремы 3.1),

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \geq c \|a\|_2 \text{ и } \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X'} \geq c \|a\|_2$$

с некоторой универсальной константой $c > 0$. Поэтому, если $\|Pf\|_X \leq B \|f\|_X$, то для произвольных $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \cdot \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) dt &= \sum_{k=1}^n a_k c_k(f) \leq \|a\|_2 \left(\sum_{k=1}^n c_k(f)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c^{-1} \|a\|_2 \|Pf\|_X \leq c^{-1} B \|a\|_2 \|f\|_X, \end{aligned}$$

откуда

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_{X'} \leq c^{-1} B \|a\|_2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Если теперь $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, то из аналогичного неравенства для суммы $\sum_{k=n}^m a_k r_k$ ($n < m$) следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k r_k$ в пространстве X' , а также неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_{X'} \leq c^{-1} B \|a\|_2. \quad (3.19)$$

Далее, если $f \in X$, а $g \in X'$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f(u) \cdot \sum_{k=1}^n c_k(g) r_k(u) du = \int_0^1 g(t) \cdot \sum_{k=1}^n c_k(f) r_k(t) dt \leq \|Pf\|_X \|g\|_{X'} \leq B \|f\|_X \|g\|_{X'},$$

откуда

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k(g) r_k \right\|_{X'} \leq B \|g\|_{X'} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Так как пространство X' максимально, то из последнего неравенства следует, что проектор P ограничен в пространстве X' с нормой, не превосходящей B . Повторяя ранее приведенные рассуждения, получим соотношение

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_{X''} \leq c^{-1} B \|a\|_2. \quad (3.20)$$

Применяя теорему 3.2 к пространствам X' и X'' , мы заключаем, что из (3.19) и (3.20) следует: $G \subset X'$ и $G \subset X''$. Из первого вложения мы сразу получаем, что $X \subset X'' \subset G'$, а из второго: $G \subset (X'')^\circ$. Так как по лемме 3.3 $(X'')^\circ = X^\circ$, то из последнего вложения следует: $G \subset X^\circ \subset X$. В итоге мы приходим к соотношениям (3.16). Таким образом, осталось показать, что из дополняемости $\mathcal{R}(X)$ в X вытекает ограниченность проектора P .

Пусть $t = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i 2^{-i}$ и $u = \sum_{i=1}^\infty \beta_i 2^{-i}$ ($\alpha_i, \beta_i = 0, 1$) — двоичные разложения чисел $t, u \in [0, 1]$.

Определим следующую операцию:

$$t \oplus u = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} [(\alpha_i + \beta_i) \bmod 2].$$

Легко проверить, что эта операция превращает отрезок $[0, 1]$ в компактную абелеву группу. Для каждого $u \in [0, 1]$ преобразование $w_u(s) = s \oplus u$ сохраняет меру Лебега на $[0, 1]$, т.е. для любого измеримого $E \subset [0, 1]$ его прообраз $w_u^{-1}(E)$ также измерим и $m(w_u^{-1}(E)) = m(E)$. Поэтому операторы $T_u f = f \circ w_u$ ($0 \leq u \leq 1$) изометрически действуют в X . Из определения функций Радемахера следует также, что подпространство $\mathcal{R}(X)$ инвариантно относительно действия этих операторов. Следовательно, согласно теореме Рудина [57, теорема 1.5.18] существует ограниченный проектор Q из X на $\mathcal{R}(X)$, коммутирующий со всеми операторами T_u ($0 \leq u \leq 1$). Покажем, что $Q = P$.

Прежде всего, представим проектор Q в виде

$$Qf(t) = \sum_{i=1}^\infty Q_i(f) r_i(t), \quad (3.21)$$

где ввиду следствия 1.7 Q_i ($i = 1, 2, \dots$) — линейные ограниченные функционалы на X . Ясно, что

$$Q_i(r_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.22)$$

Рассмотрим множества

$$\gamma_i = \left\{ u \in [0, 1] : u = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j 2^{-j}, \quad \alpha_i = 0 \right\}, \quad \overline{\gamma_i} = [0, 1] \setminus \gamma_i.$$

Легко проверить, что

$$r_i(t \oplus u) = \begin{cases} r_i(t), u \in \gamma_i, \\ -r_i(t), u \in \overline{\gamma_i}, \end{cases}$$

откуда ввиду равенства $T_u Q = Q T_u$ ($0 \leq u \leq 1$) мы получаем:

$$Q_i(T_u f) = \begin{cases} Q_i(f), u \in \gamma_i, \\ -Q_i(f), u \in \overline{\gamma_i}. \end{cases}$$

Учитывая, что $m(\gamma_i) = m(\overline{\gamma_i}) = 1/2$, находим:

$$\int_{\gamma_i} Q_i(T_u f) du = \frac{1}{2} Q_i(f) \quad \text{и} \quad \int_{\overline{\gamma_i}} Q_i(T_u f) du = -\frac{1}{2} Q_i(f).$$

Ввиду ограниченности Q_i этот функционал в последних соотношениях можно вынести за знак интеграла, и поэтому мы получаем:

$$Q_i(f) = Q_i\left(\int_{\gamma_i} T_u f du - \int_{\overline{\gamma_i}} T_u f du\right). \quad (3.23)$$

Так как

$$\{s \in [0, 1] : s = t \oplus u, \quad u \in \gamma_i\} = \begin{cases} \gamma_i, t \in \gamma_i, \\ \overline{\gamma_i}, t \in \overline{\gamma_i} \end{cases}$$

и

$$\{s \in [0, 1] : s = t \oplus u, \quad u \in \overline{\gamma_i}\} = \begin{cases} \overline{\gamma_i}, t \in \gamma_i, \\ \gamma_i, t \in \overline{\gamma_i}, \end{cases}$$

а отображение ω_u сохраняет меру Лебега на $[0, 1]$, то

$$\int_{\gamma_i} T_u f(t) du = \int_{\gamma_i} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i}(t) + \int_{\overline{\gamma_i}} f(s) ds \cdot \chi_{\overline{\gamma_i}}(t)$$

и

$$\int_{\overline{\gamma_i}} T_u f(t) du = \int_{\overline{\gamma_i}} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i}(t) + \int_{\gamma_i} f(s) ds \cdot \chi_{\overline{\gamma_i}}(t).$$

Легко проверить, что $r_i(t) = \chi_{\gamma_i}(t) - \chi_{\overline{\gamma_i}}(t)$. Поэтому из двух последних равенств следует:

$$\int_{\gamma_i} T_u f(t) du - \int_{\overline{\gamma_i}} T_u f(t) du = \int_0^1 f(s) r_i(s) ds \cdot r_i(t).$$

Отсюда и из (3.21) — (3.23) находим:

$$Q_i(f) = \int_0^1 f(s) r_i(s) ds,$$

т.е. $Q = P$. Теорема доказана. $\square$

Комментарии и литературные указания. В этом параграфе начинается детальное изучение свойств системы Радемахера в общих с.п. Теорема 3.1 известна уже очень давно (см., например, [143, теорема 5.8.7]). Центральный результат параграфа — теорема 3.2 — была доказана В. А. Родиным и Е. М. Семеновым в 1975 году в работе [133]. Она показывает, насколько "далеко" от L_∞ должно быть расположено с.п. для того, чтобы система Радемахера "натягивала" в нем координатное пространство ℓ_2 . Это свойство функций Радемахера оказывается очень важным при изучении различных вопросов, связанных с геометрией с.п. Так, например, в [101], используя его, авторы доказывают, что каноническое вложение $X \subset L_1$ не строго сингулярно тогда и только тогда, когда $G \subset X$.

Важную роль в дальнейшем играет лемма 3.2 о совпадении экспоненциального пространства Орлича с пространством Марцинкевича (относительно характеристики таких пространств см. [58] и [116]). Теорема 3.3 доказана тоже в [133]. Теорема 3.4 о дополняемости подпространства,

порожденного системой Радемахера, была доказана независимо В. А. Родиным и Е. М. Семеновым [56] и Линденштраусом и Цафрири [114, Theorem 2.b.4(ii)] (наше доказательство следует схеме, приведенной в краткой заметке [56]). Теоремы 3.2 и 3.4 послужили источником дальнейших многочисленных и интересных исследований. Упомянем лишь о некоторых из них (другие, непосредственно связанные с системой Радемахера, будут подробно рассматриваться в последующих параграфах). Так, М. Ш. Браверман в [28] показал, что если последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ независимых одинаково распределенных случайных величин "натягивает" ℓ_2 в с.п. X , то $f_1 \in L_2$ и $G \subset X$. Если, более того, подпространство, порожденное $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, дополняемо в X , то $G \subset X \subset G'$. Более общие задачи были позднее рассмотрены И. Рейно [132] в связи с вопросом Е. М. Семенова. Предположим, что сепарабельное с.п. X не содержит ℓ_2 как подрешетку. Тогда условие $G \subset X$ необходимо и достаточно для того, чтобы X содержало ℓ_2 как подпространство. В том случае, когда сепарабельное с.п. X не содержит ℓ_2 как дополняемую подрешетку, условие $G \subset X \subset G'$ необходимо и достаточно для того, чтобы X содержало ℓ_2 как дополняемое подпространство. Аналогичные несколько менее общие результаты ранее были получены Е. В. Токаревым [61].

Другое направление исследований связано с заменой в неравенстве (3.14) скалярных кратных функций Радемахера (или функций какой-то иной фиксированной последовательности) функциями систем из некоторого класса. Как было доказано в работе [106], для того, чтобы для некоторого $C > 0$, зависящего только от с.п. X , и всех последовательностей мартингалных разностей $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнялось неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X, \quad (3.24)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_X > 0$ (α_X — нижний индекс Бойда пространства X). Если вместо всех мартингалных разностей рассматривать лишь последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, в среднем равных нулю, т.е. $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), то неравенство (3.24) выполнено тогда и только тогда, когда пространство X имеет так называемое свойство Круглова [19] (подробнее о свойстве Круглова см. [75, 23, 73, 24]). Заметим, что из условия $\alpha_X > 0$ следует, что X имеет свойство Круглова [75, Theorem 1.3, p. 16]. В свою очередь, если X имеет свойство Круглова, то $G \subset X$.

§ 4

СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, "БЛИЗКИХ" К L_∞

В предыдущем параграфе было показано, что в том случае, когда с.п. X содержит сепарабельную часть G пространства Орлича L_{N_2} , $N_2(t) = e^{t^2} - 1$, система Радемахера эквивалентна в X стандартному базису в ℓ_2 . Оказывается, что в пространствах, более "близких" к L_∞ , поведение этой системы отличается гораздо большим разнообразием. Для того, чтобы придать более точный смысл этим словам, сформулируем утверждения основных теорем предыдущего параграфа с помощью введенных там же обозначений: $E_X = \ell_2$ тогда и только тогда, когда $X \supset G$ (теорема 3.2); $E_X = \ell_1$ тогда и только тогда, когда $X = L_\infty$ (теорема 3.3). Какие еще пространства последовательностей можно получить подобным образом? Мы дадим исчерпывающий ответ на этот вопрос, состоящий в том, что класс таких пространств в точности совпадает со множеством пространств, интерполяционных относительно пары (ℓ_1, ℓ_2) . При этом существует взаимно однозначное соответствие между ними и симметричными функциональными пространствами, интерполяционными относительно пары (L_∞, G) . Основную роль при изучении этих вопросов будут играть методы теории интерполяции линейных операторов (см. § 0.5).

Для формулировки первой из теорем нам понадобится следующее определение.

Определение 4.1. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара и Y_0 — замкнутое подпространство X_0 , а Y_1 — замкнутое подпространство X_1 . Банахова пара (Y_0, Y_1) называется $\mathcal{K}$ -подпарой ($\mathcal{K}$ -замкнутой подпарой) пары (X_0, X_1) , если

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \asymp \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1)$$

с константами, не зависящими от $y \in Y_0 + Y_1$ и $t > 0$.

Определим оператор R следующим образом: если числовая последовательность $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$, то

$$Ra(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

Из теоремы 1.1 следует, что при фиксированном $a \in \ell_2$ соотношение (4.1) определяет измеримую конечную почти всюду функцию. Более того, по теореме 3.1 R — линейный ограниченный оператор из ℓ_2 в G и

$$\|Ra\|_G \asymp \|a\|_{\ell_2}, \quad (4.2)$$

а ввиду замечания 1.5 этот оператор изометрически действует из ℓ_1 в L_∞ , т.е.

$$\|Ra\|_\infty = \|a\|_{\ell_1}. \quad (4.3)$$

Тем самым пару $(R(\ell_1), R(\ell_2))$ можно рассматривать как подпару банаховой пары (L_∞, G) ($R(\ell_1)$ — подпространство L_∞ , а $R(\ell_2)$ — подпространство G).

Из соотношений (4.2) и (4.3), а также определения $\mathcal{K}$ -функционала мы сразу получаем, что

$$\mathcal{K}(t, Ra; R(\ell_1), R(\ell_2)) \asymp \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2). \quad (4.4)$$

Теорема 4.1. Банахова пара $(R(\ell_1), R(\ell_2))$ является $\mathcal{K}$ -подпарой банаховой пары (L_∞, G) , т.е. справедливо соотношение

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) \asymp \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \quad (4.5)$$

с константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $t > 0$.

Доказательство. Как известно [91], $\mathcal{K}$ -функционал в паре пространств Марцинкевича вычисляется (с точностью до эквивалентности) по формуле

$$\mathcal{K}(t, x; M(\varphi_0), M(\varphi_1)) \asymp \sup_{0 < u \leq 1} \frac{\int_0^u x^*(s) ds}{\max(\varphi_0(u), \varphi_1(u)/t)}, \quad t > 0. \quad (4.6)$$

По лемме 3.2 пространство Орлича L_{N_2} совпадает с пространством Марцинкевича $M(\varphi_1)$, построенном по функции $\varphi_1(u) = u \cdot \ln^{1/2}(e/u)$. Так как, кроме того, $L_\infty = M(\varphi_0)$, где $\varphi_0(u) = u$, то ввиду предыдущего соотношения для $x \in G$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) &= \mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_2}) \\ &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ \frac{1}{u} \int_0^u x^*(s) ds \cdot \min(1, t \cdot \ln^{-1/2}(e/u)) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Так как $x^*(u) \leq 1/u \int_0^u x^*(s) ds$, то отсюда

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \geq c \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ x^*(u) \min(1, t \cdot \ln^{-1/2}(e/u)) \right\}. \quad (4.8)$$

Пусть $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$. По следствию 2.2 (см. соотношение (2.21)) с универсальными константами $\beta \in (0, 1)$ и $C \geq 1$

$$(Ra)^*(\beta u) \geq C^{-1} \mathcal{K}(\ln^{1/2}(e/u), a; \ell_1, \ell_2) \quad (0 < u \leq 1)$$

или

$$(Ra)^*(\beta e^{1-t^2}) \geq C^{-1} \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \quad (t \geq 1). \quad (4.9)$$

С другой стороны, ввиду (4.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) &\geq c(Ra)^*(\beta e^{1-t^2}) \min(1, t \cdot \ln^{-1/2}(\beta^{-1} e^{t^2})) \geq \\ &\geq c(Ra)^*(\beta e^{1-t^2}) \min\left(1, \frac{t}{\sqrt{t^2 - \ln \beta}}\right). \end{aligned}$$

Так как функция $t/\sqrt{t^2 - \ln \beta}$ ($t > 0$) возрастает, то отсюда при $t \geq 1$

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) \geq C_1(Ra)^*(\beta e^{1-t^2}),$$

где $C_1 = c/\sqrt{1 - \ln \beta}$. Тем самым с учетом неравенства (4.9)

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) \geq \frac{C_1}{C} \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \quad (t \geq 1).$$

Если же $0 < t \leq 1$, то, используя неравенства $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$ ($a \in \ell_1$) и $\|x\|_G \leq \|x\|_\infty$ ($x \in L_\infty$), определение $\mathcal{K}$ -функционала и соотношение (4.2), получаем:

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) = t\|Ra\|_G \geq C_2 t\|a\|_2 = C_2 \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2).$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) \geq \min\left(C_2, \frac{C_1}{C}\right) \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$$

для всех $t > 0$. Противоположное неравенство

$$\mathcal{K}(t, Ra; L_\infty, G) \leq C_3 \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \quad (t > 0)$$

вытекает из (4.4) и определения $\mathcal{K}$ -функционала. $\square$

Доказанное утверждение позволяет установить взаимно однозначное соответствие между симметричными функциональными пространствами, интерполяционными относительно пары (L_∞, G) , и пространствами последовательностей, интерполяционными относительно пары (ℓ_1, ℓ_2) . Для формулировки результата нам понадобится понятие вещественного $\mathcal{K}$ -метода интерполяции (см. § 0.5). Напомним, что в его терминах можно описать все пространства, интерполяционные относительно любой $\mathcal{K}$ -монотонной пары [29, теорема 15.1]. В частности, по теореме Спарра [136] пара (ℓ_1, ℓ_2) $\mathcal{K}$ -монотонна, и, значит, если $E \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_2)$, то

$$E = (\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}} \quad (4.10)$$

для некоторого параметра вещественного метода F . Это обстоятельство вместе с теоремой 4.1 позволяет найти с.п., содержащее те и только те ряды по системе Радемахера, последовательности коэффициентов которых принадлежат произвольному наперед заданному координатному пространству E , интерполяционному между ℓ_1 и ℓ_2 .

Следствие 4.1. Пусть $E \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_2)$ и определяется соотношением (4.10). Тогда для с.п. $X = (L_\infty, G)_F^{\mathcal{K}}$ выполнено:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|a\|_E$$

с константами, не зависящими от последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 4.1 и определение пространств вещественного $\mathcal{K}$ -метода. $\square$

Теперь мы можем дать описание всех пространств последовательностей E_X , индуцируемых системой Радемахера посредством соотношения (3.1).

Следствие 4.2. Для того, чтобы банахово пространство последовательностей E совпадало с некоторым пространством вида E_X (с эквивалентностью норм), необходимо и достаточно, чтобы $E \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_2)$.

Доказательство. Если $E \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_2)$, то для некоторого параметра F выполнено соотношение (4.10). Но тогда ввиду предыдущего следствия $E = E_X$, где $X := (L_\infty, G)_F^{\mathcal{K}}$.

Предположим теперь, что, наоборот, $E = E_X$ для некоторого с.п. X . Пусть U — линейный оператор, ограниченный в ℓ_1 и в ℓ_2 . Нужно доказать, что он также ограничен в E , т.е. что для любой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (Ua)_k r_k \right\|_X \leq D \|U\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X, \quad (4.11)$$

где $\|U\| := \max(\|U\|_{\ell_1 \rightarrow \ell_1}, \|U\|_{\ell_2 \rightarrow \ell_2})$, а $D > 0$ — некоторая константа. Ввиду положительной однородности неравенства (4.11) можно считать, что $\|U\| = 1$. Обозначим $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k$ и $y = \sum_{k=1}^{\infty} (Ua)_k r_k$. Прежде всего,

$$\mathcal{K}(t, Ua; \ell_1, \ell_2) \leq \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \quad (t > 0).$$

Действительно, если $a = b + c$, $b \in \ell_1$, $c \in \ell_2$, то для всех $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, Ua; \ell_1, \ell_2) &\leq \inf\{\|Ub\|_1 + t\|Uc\|_2 : a = b + c, b \in \ell_1, c \in \ell_2\} \leq \\ &\inf\{\|b\|_{\ell_1} + t\|c\|_{\ell_2} : a = b + c, b \in \ell_1, c \in \ell_2\} = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2). \end{aligned}$$

Поэтому, применяя следствие 2.2, получим, что $y^*(u) \leq Cx^*(\beta u)$ с некоторыми универсальными константами $C > 0$ и $\beta \in (0, 1)$, откуда

$$\|y\|_X \leq C\|\sigma_{1/\beta} x^*\|_X \leq \frac{C}{\beta} \|x\|_X,$$

так как $\|\sigma_{\tau}\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ [46, теорема 2.4.5]. Тем самым соотношение (4.11) доказано. $\square$

Замечание 4.1. Утверждение теоремы 4.1 становится неверным, если пространство G в ее формулировке заменить на L_q , $q < \infty$. Действительно, если предположить, что $(R(\ell_1), R(\ell_2))$ — $\mathcal{K}$ -подпара пары (L_{∞}, L_q) , то ввиду (4.4)

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \asymp \mathcal{K}(t, Ra; L_{\infty}, L_q).$$

Тогда, применяя к парам (ℓ_1, ℓ_2) и (L_{∞}, L_q) $\mathcal{K}$ -метод интерполяции с параметром $F = \ell_p(2^{-\theta k})$, $0 < \theta < 1$, $p = q/\theta$, получим [26, теорема 5.2.1, с.142], что

$$\|Ra\|_p \asymp \|a\|_{r,p} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^*)^p k^{p/r-1} \right\}^{1/p},$$

где $r = 2/(2 - \theta) < 2$. С другой стороны, по теореме Хинчина 1.4 $\|Ra\|_p \asymp \|a\|_2$. Так как $\ell_2 \neq \ell_{r,p}$, если $r < 2$, то исходное предположение неверно и утверждение доказано.

Теперь мы рассмотрим отображение $X \mapsto E_X$, определяемое соотношением (3.1), только на классе пространств X , интерполяционных относительно пары (L_{∞}, G) . Нашей целью будет доказать, что в этом случае оно взаимно однозначно, т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть X_0 и X_1 — два с.н., интерполяционных между L_{∞} и G . Если

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_0} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_1}, \quad (4.12)$$

то $X_0 = X_1$ (с эквивалентностью норм).

Обозначим через $\mathcal{K}(X_0 + X_1)$ множество всех $\mathcal{K}$ -функционалов, соответствующих банаховой паре (X_0, X_1) , т.е. всех функций вида $f(t) = \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ ($x \in X_0 + X_1$). Нашей первой задачей будет доказательство совпадения (с точностью до эквивалентности) множеств $\mathcal{K}(\ell_1 + \ell_2)$ и $\mathcal{K}(L_{\infty} + G)$. В дальнейшем нам понадобятся два конуса квазивогнутых функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$. Через $\mathcal{P}_0$ обозначим множество всех таких квазивогнутых функций f , что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Конус $\mathcal{P}_1$ состоит из всех $f \in \mathcal{P}_0$, для которых $f(t) = f(1)t$ ($0 < t \leq 1$). Этот конус возникает естественным образом при изучении множества $\mathcal{K}$ -функционалов, порожденных вложенной банаховой парой.

Предложение 4.1. Если (X_0, X_1) — такая банахова пара, что $X_0 \subset X_1$ с константой 1 и X_0 всюду плотно в X_1 , то $\mathcal{K}(X_0 + X_1) \subset \mathcal{P}_1$.

Доказательство. Пусть $f(t) := \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ ($x \in X_1 = X_0 + X_1$). Так как X_0 всюду плотно в X_1 , то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $x_0 \in X_0$ такой, что если $x_1 := x - x_0$, то $\|x_1\|_{X_1} \leq \varepsilon$. Возьмем t_0 так, что для всех $t \geq t_0$ выполнено $\|x_0\|_{X_0}/t \leq \varepsilon$. Тогда $x = x_0 + x_1$ и

$$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{K}(1/t, x; X_1, X_0) \leq \|x_1\|_{X_1} + \frac{1}{t}\|x_0\|_{X_0} \leq 2\varepsilon \quad (t \geq t_0).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то тем самым $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/t = 0$. Одновременно по определению $\mathcal{K}$ -функционала для каждого $x \in X_0 + X_1 = X_1$

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = t\|x\|_{X_1} \quad ((0 < t \leq 1).$$

Таким образом, ввиду определения конуса $\mathcal{P}_1$ предложение доказано. $\square$

Следствие 4.3. *Имеют место вложения:*

$$\mathcal{K}(\ell_1 + \ell_2) \subset \mathcal{P}_1 \text{ и } \mathcal{K}(L_\infty + G) \subset \mathcal{P}_1.$$

Поставим перед собой задачу доказать соотношения, противоположные по отношению к только что полученным. Введем еще одно определение.

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{U}$ — некоторый конус квазивогнутых функций. Банахова пара (X_0, X_1) называется $\mathcal{U}$ -полной, если для любой функции $f \in \mathcal{U}$ существует $x \in X_0 + X_1$, для которого

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \asymp f(t) \quad (t > 0).$$

Иначе говоря, множество $\mathcal{K}(X_0 + X_1)$ всех $\mathcal{K}$ -функционалов $\mathcal{U}$ -полной пары (X_0, X_1) с точностью до эквивалентности содержит $\mathcal{U}$.

Для того, чтобы доказать $\mathcal{P}_1$ -полноту пар (ℓ_1, ℓ_2) и (L_∞, G) нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, первым из которых будет классическая лемма об ограниченности операторов Харди-Литтлвуда

$$\mathcal{H}f(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f(u) du \text{ и } \tilde{\mathcal{H}}(a_j) = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j \right)_{k=1}^\infty$$

в L_p -пространствах функций и последовательностей соответственно.

Лемма 4.1. *Оператор $\mathcal{H}$ (соответственно $\tilde{\mathcal{H}}$) ограничен в пространстве $L_p = L_p(0, \infty)$ (соответственно l_p) для любого $1 < p \leq \infty$.*

Доказательство. Если $p = \infty$, то утверждение леммы очевидно как для оператора $\mathcal{H}$, так и для $\tilde{\mathcal{H}}$. В случае $1 < p < \infty$ применим неравенство Минковского:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}f\|_p &= \left\| \int_0^1 f(su) du \right\|_p \leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty |f(su)|^p ds \right)^{1/p} du \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{u} \int_0^\infty |f(v)|^p dv \right)^{1/p} du = \frac{p}{p-1} \|f\|_p, \end{aligned}$$

и для $\tilde{\mathcal{H}}$ утверждение доказано.

Если теперь $a = (a_k)_{k=1}^\infty$, то можно считать, что $a_k = a_k^*$. Тогда для функции $f_a = \sum_{i=1}^\infty a_i \chi_{[i-1, i)}$ ввиду предыдущего неравенства мы имеем

$$\|\tilde{\mathcal{H}}a\|_{l_p} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{s} \int_0^s f_a(u) du \right)^p ds \right)^{1/p} = \|\mathcal{H}f_a\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f_a\|_p = \frac{p}{p-1} \|a\|_{\ell_p},$$

и лемма доказана. $\square$

Напомним, что в предложении 2.1 нами уже было найдено эквивалентное выражение (состоящее из двух слагаемых) для $\mathcal{K}$ -функционала $\mathcal{K}(t, f; L_1, L_2)$, соответствующего паре $(L_1(0, \infty), L_2(0, \infty))$. Покажем, что это выражение можно упростить (с точностью до эквивалентности), сделав его одночленным.

Предложение 4.2. *С константами, не зависящими от $f \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$ и $t > 0$,*

$$\mathcal{K}(t, f; L_1, L_2) \asymp t \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_0^s f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Кроме того, для $t \geq 1$

$$\mathcal{K}(t, f; L_1, L_2) \asymp t \left(\sum_{l=[t^2]}^{\infty} \frac{1}{l^2} \left(\int_0^l f^*(u) du \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

Доказательство. Прежде всего, обозначим через $G(t, f)$ правую часть соотношения (4.13), а через $F(t, f)$ — выражение из соотношения (2.2), т.е.

$$F(t, f) = \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2 ds \right)^{1/2}.$$

Так как $f^*(s) \leq 1/s \int_0^s f^*(u) du$, то

$$G(t, f) \geq t \left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(u)^2 du \right)^{1/2}.$$

Кроме того,

$$G(t, f) \geq t \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_0^{t^2} f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2} = \int_0^{t^2} f^*(u) du,$$

и, значит, $2G(t, f) \geq F(t, f)$. Отсюда и из (2.2) следует $\mathcal{K}(t, f; L_1, L_2) \leq 2G(t, f)$.

Для доказательства противоположного соотношения оценим

$$\begin{aligned} G(t, f) &= t \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_0^{t^2} f^*(u) du + \frac{1}{s} \int_{t^2}^s f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq t \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_0^{t^2} f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2} + t \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_{t^2}^s f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2} = \\ &= \int_0^{t^2} f^*(u) du + t \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_{t^2}^s f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(\frac{1}{s} \int_{t^2}^s f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2} &= \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s+t^2} \int_0^s f^*(u+t^2) du \right)^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} (\mathcal{H}f^*(\cdot + t^2)(s))^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}$ — оператор Харди-Литтлвуда, то по лемме 4.1

$$\begin{aligned} G(t, f) &\leq \int_0^{t^2} f^*(u) du + 2t \left(\int_0^{\infty} (f^*(s+t^2))^2 ds \right)^{1/2} = \\ &= \int_0^{t^2} f^*(u) du + 2t \left(\int_{t^2}^{\infty} (f^*(s))^2 ds \right)^{1/2} \leq 2F(t, f). \end{aligned}$$

Тем самым ввиду неравенства (2.2)

$$G(t, f) \leq 8\mathcal{K}(t, f; L_1, L_2),$$

и соотношение (4.13) доказано.

Соотношение (4.14) является следствием (4.13). Действительно, для $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}(m, f; L_1, L_2) \asymp m \left(\sum_{l=m^2}^{\infty} \int_l^{l+1} \left(\frac{1}{s} \int_0^s f^*(u) du \right)^2 ds \right)^{1/2},$$

и остается воспользоваться вогнутостью функций $\int_0^s f^*(u) du$ и $\mathcal{K}(s, f; L_1, L_2)$. $\square$

Предложение 4.3. *Банахова пара $(L_1(0, \infty), L_2(0, \infty))$ $\mathcal{P}_0$ -полна.*

Доказательство. Мы воспользуемся следующей общей теоремой из теории интерполяции [85, Theorem 4.5.7, р. 614]: для $\mathcal{P}_0$ -полноты банаховой пары (X_0, X_1) достаточно, чтобы множество $\mathcal{K}(X_0 + X_1)$ при некотором $\theta \in (0, 1)$ содержало функцию, эквивалентную функции t^θ . Соотношение (4.13) и непосредственные вычисления показывают, что если $f_0(u) = u^{-3/4}$, то $f_0 \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$ и $\mathcal{K}(t, f_0; L_1, L_2) \asymp t^{1/2}$ ($t > 0$). $\square$

Следствие 4.4. *Банаховы пары (ℓ_1, ℓ_2) и (L_∞, G) $\mathcal{P}_1$ -полны.*

Доказательство. Каждой функции $x \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$ поставим в соответствие последовательность

$$a(x) = (a_k(x))_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где } a_k(x) = \int_{k-1}^k x(s) ds,$$

и через Q обозначим оператор усреднения по системе промежутков $\{(k-1, k]\}_{k=1}^{\infty}$, т.е.

$$Qx(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \chi_{(k-1, k]}(t) \quad (t > 0).$$

Из предложения 4.2 (см. (4.14)) следует, что

$$\mathcal{K}(t, Qx^*; L_1, L_2) \asymp \mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \quad (t \geq 1).$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{P}_1$ произвольна. Так как $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_0$, то ввиду предыдущего предложения существует функция $x \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$, для которой

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \asymp f(t) \quad (t > 0).$$

В то же время по лемме 2.1

$$\mathcal{K}(t, Qx^*; L_1, L_2) = \mathcal{K}(t, a(x^*); \ell_1, \ell_2) \quad (t > 0).$$

Тем самым, так как $\|a(x)\|_{\ell_2} \leq \|x\|_2$, то три последних соотношения показывают, что найдется последовательность $a \in \ell_2$, для которой

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \asymp f(t) \quad (t \geq 1).$$

Но это справедливо и при $0 < t \leq 1$, так как в этом случае

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) = t\|a\|_2 = t\mathcal{K}(1, a; \ell_1, \ell_2) \asymp tf(1) = f(t).$$

Итак, пара (ℓ_1, ℓ_2) $\mathcal{P}_1$ -полна. Так как ввиду теоремы 4.1 множество $\mathcal{K}(L_\infty + G)$ с точностью до эквивалентности содержит множество $\mathcal{K}(\ell_1 + \ell_2)$, то следствие доказано. $\square$

Перейдем теперь к решению второй задачи — доказательству $\mathcal{K}$ -монотонности пары (L_∞, G) . Один из важнейших способов доказательства $\mathcal{K}$ -монотонности банаховых пар связан с использованием следующего понятия.

Определение 4.3. Банахова пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называется *частичным ретрактом* пары $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, если каждый $x \in X_0 + X_1$ орбитально эквивалентен некоторому $y \in Y_0 + Y_1$. Последнее означает, что существуют линейные операторы $U \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ и $V \in L(\vec{Y}, \vec{X})$, для которых $Ux = y$ и $Vy = x$.

Лемма 4.2. *Если банахова пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ является частичным ретрактом $\mathcal{K}$ -монотонной банаховой пары $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, то пара $\vec{X}$ также $\mathcal{K}$ -монотонна.*

Доказательство. Предположим, что $x_i \in X_0 + X_1$ ($i = 1, 2$) и

$$\mathcal{K}(t, x_2; \vec{X}) \leq \mathcal{K}(t, x_1; \vec{X}) \quad (t > 0). \quad (4.15)$$

По условию существуют $y_i \in Y_0 + Y_1$ ($i = 1, 2$) и линейные операторы $U_i \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ и $V_i \in L(\vec{Y}, \vec{X})$, такие, что $y_i = U_i x_i$ и $x_i = V_i y_i$ ($i = 1, 2$). Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x_i; \vec{X}) &= \mathcal{K}(t, V_i y_i; \vec{X}) \leq \inf \{ \|V_i z_0\|_{X_0} + t \|V_i z_1\|_{X_1} : y_i = z_0 + z_1 \} \leq \\ &\leq \|V_i\|_{L(\vec{Y}, \vec{X})} \cdot \mathcal{K}(t, y_i; \vec{Y}) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично

$$\mathcal{K}(t, y_i; \vec{Y}) \leq \|U_i\|_{L(\vec{X}, \vec{Y})} \cdot \mathcal{K}(t, x_i; \vec{X}) \quad (i = 1, 2).$$

Поэтому из неравенства (4.15) следует:

$$\mathcal{K}(t, y_2; \vec{Y}) \leq \|U_2\| \|V_1\| \mathcal{K}(t, y_1; \vec{Y}) \quad (t > 0).$$

Так как пара $\vec{Y}$ $\mathcal{K}$ -монотонна, то найдется линейный оператор $W \in L(\vec{Y}, \vec{Y})$, такой, что $y_2 = W y_1$. В итоге получаем, что $x_2 = S x_1$, где линейный оператор $S := V_2 W U_1 \in L(\vec{X}, \vec{X})$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Прежде, чем сформулировать следующее вспомогательное утверждение, напомним еще одно определение.

Определение 4.4. Пусть E и F — два измеримых подмножества вещественной прямой одинаковой меры. Говорят, что отображение $\omega : E \rightarrow F$ *сохраняет меру*, если для любого измеримого $C \subset F$ его прообраз $\omega^{-1}(C)$ также измерим и, кроме того, верно равенство $m(\omega^{-1}(C)) = m(C)$.

Лемма 4.3. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$, измеримые на $[0, 1]$, имеют равноизмеримые модули. Тогда существует линейный оператор T , ограниченный в любом с.н., такой, что $y = T x$.

Доказательство. Сначала покажем, что для произвольных равноизмеримых на $[0, 1]$ функций $u(t) \geq 0$ и $v(t) \geq 0$ и любого $\delta > 0$ существует такое сохраняющее меру отображение $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, что

$$\|v - u_\tau\|_\infty \leq \delta, \quad \text{где } u_\tau(t) = u(\tau(t)). \quad (4.16)$$

Действительно, рассмотрим множества

$$U_k := \{t \in [0, 1] : \delta k < u(t) \leq \delta(k+1)\}$$

и

$$V_k := \{t \in [0, 1] : \delta k < v(t) \leq \delta(k+1)\} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Так как $u(t)$ и $v(t)$ равноизмеримы, то $m(U_k) = m(V_k)$ и, значит, существует сохраняющее меру отображение $\tau_k : V_k \rightarrow U_k$ ($k = 0, 1, \dots$). Обозначим

$$U_{-1} := [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k \quad \text{и} \quad V_{-1} := [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Ясно, что $u(t) = 0$ ($t \in U_{-1}$), $v(t) = 0$ ($t \in V_{-1}$) и $m(U_{-1}) = m(V_{-1})$. Пусть $\tau_{-1} : V_{-1} \rightarrow U_{-1}$ сохраняет меру. Определим $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ с помощью "склейки" отображений τ_k ($k = -1, 0, 1, \dots$), т.е. $\tau(t) = \tau_k(t)$, если $t \in V_k$ ($k = -1, 0, 1, \dots$). Непосредственная проверка показывает, что τ сохраняет меру и что выполнено соотношение (4.16).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству предложения. Введем множества

$$E_0 = \{t : |x(t)| > 1\} \quad \text{и} \quad E_n = \left\{t : \frac{1}{n+1} < |x(t)| \leq \frac{1}{n}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Через F_n обозначим аналогичные множества для y . Ввиду равноизмеримости x и y $m(E_n) = m(F_n)$. Кроме того, легко проверить, что функции $|x| \chi_{E_n}$ и $|y| \chi_{F_n}$ равноизмеримы для любого $n = 0, 1, \dots$. Поэтому, как только что было доказано, для любых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $n = 0, 1, \dots$ существует сохраняющее меру отображение $\omega_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такое, что

$$\| |y| \chi_{F_n} - (|x| \chi_{E_n})(\omega_n) \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{n+1}. \quad (4.17)$$

Непосредственным следствием определения E_n является то, что $\omega_n : F_n \rightarrow E_n$.

Обозначим $z_n = |y|_{\chi_{F_n}} - (|x|_{\chi_{E_n}})(\omega_n)$, а также $\alpha_n(t) = z_n(t)/(|x|_{\chi_{E_n}})(\omega_n(t))$, если $t \in F_n$, и $\alpha_n(t) = 0$, если $t \notin F_n$. Из (4.17) и определения E_n следует

$$\|\alpha_n\|_\infty \leq \varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Кроме того,

$$|y|_{\chi_{F_n}} = (|x|_{\chi_{E_n}})(\omega_n) + z_n = (1 + \alpha_n)(|x|_{\chi_{E_n}})(\omega_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Обозначим

$$E_{-1} := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \quad \text{и} \quad F_{-1} := [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Пусть, кроме того, $\alpha_{-1}(t) = 0$ для всех $t \in [0, 1]$. Так как $m(E_{-1}) = m(F_{-1})$, то существует отображение $\omega_{-1} : F_{-1} \rightarrow E_{-1}$, сохраняющее меру. Если теперь отображения $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ получены "склеивкой" из ω_n и α_n соответственно, т.е. $\omega(t) = \omega_n(t)$ и $\alpha(t) = \alpha_n(t)$, если $t \in F_n$ ($n = -1, 0, 1, \dots$), то ввиду (4.19)

$$|y(t)| = (1 + \alpha(t))|x(\omega(t))|, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.20)$$

Легко проверить, что отображение ω сохраняет меру множеств, а ввиду (4.18) $\|\alpha\|_\infty \leq \varepsilon$. Теперь мы можем определить нужный нам оператор

$$Tu(t) = \text{sign } x(\omega(t)) \text{sign } y(t)(1 + \alpha(t))u(\omega(t)).$$

Тогда ввиду свойств ω и α для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} m\{t \in [0, 1] : |Tu(t)| > \tau\} &\leq m\{t \in [0, 1] : (1 + \varepsilon)|u(\omega(t))| > \tau\} = \\ &= m\{t \in [0, 1] : (1 + \varepsilon)|u(t)| > \tau\}. \end{aligned}$$

Поэтому $(Tu)^*(t) \leq (1 + \varepsilon)u^*(t)$ ($t \in [0, 1]$), и значит, $\|Tu\|_X \leq (1 + \varepsilon)\|u\|_X$ для произвольного с.п. X . Остается лишь заметить, что из равенства (4.20) и определения оператора T следует: $y = Tx$. $\square$

Замечание 4.2. Из теоремы Кальдерона-Митягина (см. § 0.5) вытекает чуть более слабый результат: если модули функций $x(t)$ и $y(t)$ равноизмеримы на $[0, 1]$, то существует линейный оператор T , ограниченный в любом с.п., интерполяционном относительно банаховой пары (L_1, L_∞) (в частности, сепарабельном или максимальном), такой, что $y = Tx$.

Замечание 4.3. Доказанное предложение не может быть усилено следующим образом: для произвольной пары функций $x(t)$ и $y(t)$, модули которых равноизмеримы на $[0, 1]$, существует такое сохраняющее меру отображение $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, что $|y(t)| = |x(\omega(t))|$. Соответствующий пример приведен в [77, Example 2.7.7]. Тот же самый пример показывает, что это утверждение неверно даже, если ослабить условие на ω и говорить об отображениях, не уменьшающих меру, т.е. таких, что $m(\omega^{-1}(E)) \leq m(E)$ для любого измеримого $E \subset [0, 1]$.

Напомним (см. § 0.2), что функция растяжения $\mathcal{M}_f(t)$ функции f , определенной на $(0, 1)$ задается равенством:

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup \left\{ \frac{f(st)}{f(s)} : 0 < s \leq \min(1, t^{-1}) \right\}, \quad t > 0.$$

При этом числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t} \quad \text{и} \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t}$$

называются показателями растяжения функции f .

Предложение 4.4. Если $M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича на $[0, 1]$, построенное по квивогнутой функции φ с показателем $\gamma_\varphi > 0$, то банахова пара $\vec{X} = (L_\infty, M(\varphi))$ $\mathcal{K}$ -монотонна.

Доказательство. Мы покажем, что $\vec{X}$ — частичный ретракт банаховой пары $\vec{Y} = (L_\infty, L_\infty(\tilde{\varphi}))$, где

$$\|x\|_{L_\infty(\tilde{\varphi})} = \sup_{0 < t \leq 1} \tilde{\varphi}(t)|x(t)|, \quad \tilde{\varphi}(t) = \frac{t}{\varphi(t)}.$$

Так как по теореме Спарра [136] пара $\vec{Y}$ $\mathcal{K}$ -монотонна, то тогда ввиду леммы 4.2 предложение будет доказано.

Итак, пусть $x \in M(\varphi)$ (так как $L_\infty \subset M(\varphi)$, то $L_\infty + M(\varphi) = M(\varphi)$). По лемме 4.3 существует линейный оператор T_1 , ограниченный в паре $\vec{X}$, такой, что $x^* = T_1x$. Для $y \in M(\varphi)$ определим оператор

$$U_1y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \int_0^{2^{-k}} y(s) ds \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t).$$

Ввиду квазивогнутости φ и свойств перестановки [46, свойство 6°, с. 89]

$$\|U_1y\|_{L_\infty(\tilde{\varphi})} \leq 2 \sup_{k=1,2,\dots} (\varphi(2^{-k+1}))^{-1} \int_0^{2^{-k}} y^*(s) ds \leq 2\|y\|_{M(\varphi)}.$$

и, значит, $U_1 \in L(\vec{X}, \vec{Y})$.

Так как $x^*(t)$ не возрастает, то $U_1x^*(t) \geq x^*(t)$. Поэтому линейный оператор

$$Uy(t) := \frac{x^*(t)}{U_1x^*(t)} U_1T_1y(t)$$

также ограничен из пары $\vec{X}$ в пару $\vec{Y}$ и $Ux(t) = x^*(t)$.

Пусть I — тождественный оператор, т.е. $Iy(t) := y(t)$. Так как $\gamma_\varphi > 0$, то ввиду [46, теорема 2.5.3, с. 156] и монотонности $\tilde{\varphi}$ и перестановки

$$\|Iy\|_{M(\varphi)} = \|y\|_{M(\varphi)} \leq C \sup_{0 < t \leq 1} \tilde{\varphi}(t)y^*(t) \leq C \sup_{0 < t \leq 1} \tilde{\varphi}(t)|y(t)| = C\|y\|_{L_\infty(\tilde{\varphi})}.$$

Поэтому $I \in L(\vec{Y}, \vec{X})$. Еще раз применяя лемму 4.3, найдем линейный оператор T_2 , ограниченный в паре $\vec{X}$, такой, что $x = T_2x^*$. Тогда оператор $V := T_2I$ ограничен из пары $\vec{Y}$ в пару $\vec{X}$ и $Vx^* = x$.

Таким образом, произвольный $x \in M(\varphi)$ орбитально эквивалентен своей перестановке x^* относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ соответственно, и, значит, первая из них является частичным ретрактом второй. $\square$

Следствие 4.5. Если $\gamma_\varphi > 0$, то пара $(L_\infty, M(\varphi)^\circ)$ $\mathcal{K}$ -монотонна. В частности, пара (L_∞, G) $\mathcal{K}$ -монотонна.

Доказательство. Прежде всего, из определения пространства $M(\varphi)^\circ$ следует, что оно интерполяционно относительно пары $(L_\infty, M(\varphi))$. Действительно, пусть A — линейный оператор, $A : L_\infty \rightarrow L_\infty$ и $A : M(\varphi) \rightarrow M(\varphi)$. Если $x \in M(\varphi)^\circ$, то существует последовательность $\{x_n\} \subset L_\infty$, такая, что $x_n \rightarrow x$ в пространстве $M(\varphi)$. Но тогда $\{Ax_n\} \subset L_\infty$ и $Ax_n \rightarrow Ax$ в $M(\varphi)$. Поэтому $Ax \in M(\varphi)^\circ$, т.е. $A : M(\varphi)^\circ \rightarrow M(\varphi)^\circ$.

Предположим, что $x, y \in M(\varphi)^\circ$ и

$$\mathcal{K}(t, y; L_\infty, M(\varphi)^\circ) \leq \mathcal{K}(t, x; L_\infty, M(\varphi)^\circ) \quad (t > 0).$$

Так как для $z \in M(\varphi)^\circ$

$$\mathcal{K}(t, z; L_\infty, M(\varphi)^\circ) = \mathcal{K}(t, z; L_\infty, M(\varphi)) \quad (t > 0), \tag{4.21}$$

то одновременно

$$\mathcal{K}(t, y; L_\infty, M(\varphi)) \leq \mathcal{K}(t, x; L_\infty, M(\varphi)) \quad (t > 0).$$

Следовательно, ввиду предложения 4.4 существует линейный оператор S , ограниченный в паре $(L_\infty, M(\varphi))$ и такой, что $y = Sx$. Но тогда S одновременно ограничен в паре $(L_\infty, M(\varphi)^\circ)$, и следствие доказано. $\square$

Теперь, наконец, все готово для доказательства теоремы 4.2.

Доказательство теоремы 4.2. По лемме 3.2 пространство Орлича L_{N_2} совпадает с пространством Марцинкевича $M(\psi_2)$, где $\psi_2(u) = u \ln^{1/2}(e/u)$. Так как $\gamma_\psi = 1$, то, по следствию 4.5 банахова пара (L_∞, G) $\mathcal{K}$ -монотонна. Поэтому ввиду теоремы Брудного-Кругляка [29] (см. § 0.5) найдутся параметры вещественного $\mathcal{K}$ -метода F_0 и F_1 такие, что

$$X_0 = (L_\infty, G)_{F_0}^{\mathcal{K}} \text{ и } X_1 = (L_\infty, G)_{F_1}^{\mathcal{K}}. \quad (4.22)$$

Тогда по следствию 4.1

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_i} \asymp \|(a_k)\|_{E_i}, \text{ где } E_i = (\ell_1, \ell_2)_{F_i}^{\mathcal{K}} \text{ (} i = 0, 1 \text{)}.$$

Значит, ввиду условия (4.12)

$$(\ell_1, \ell_2)_{F_0}^{\mathcal{K}} = (\ell_1, \ell_2)_{F_1}^{\mathcal{K}}. \quad (4.23)$$

Последнее равенство означает, что нормы пространств F_0 и F_1 эквивалентны на множестве $\mathcal{K}$ -функционалов $\mathcal{K}(\ell_1 + \ell_2)$, соответствующем паре (ℓ_1, ℓ_2) . Но из следствий 4.3 и 4.4 вытекает, что с точностью до эквивалентности

$$\mathcal{K}(\ell_1 + \ell_2) = \mathcal{K}(L_\infty + G) = \mathcal{P}_1. \quad (4.24)$$

Пусть теперь $x \in X_0$. Ввиду (4.22) это означает, что $(\mathcal{K}(2^k, x; L_\infty, G))_k \in F_0$. Применяя (4.24), найдем последовательность $a \in \ell_2$, для которой

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \asymp \mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \text{ (} t > 0 \text{)}.$$

Так как параметр $\mathcal{K}$ -метода — банахова решетка, то отсюда $(\mathcal{K}(2^k, a; \ell_1, \ell_2))_k \in F_0$, а значит, ввиду (4.23) $(\mathcal{K}(2^k, a; \ell_1, \ell_2))_k \in F_1$. Поэтому $(\mathcal{K}(2^k, x; L_\infty, G))_k \in F_1$ или $x \in X_1$. Итак, $X_0 \subset X_1$. Меняя местами X_0 и X_1 , получаем, что $X_1 \subset X_0$, т.е. $X_0 = X_1$ по запасу элементов. Так как каждое с.п. на $[0, 1]$ непрерывно вложено в $L_1[0, 1]$ [46, теорема 2.4.1], то по теореме о замкнутом графике нормы в пространствах X_0 и X_1 эквивалентны, и теорема 4.2 доказана. $\square$

Уже простой пример: $X_0 = G$ и $X_1 = L_{N_2}$, $N_2(t) = e^{t^2} - 1$, показывает, что без предположения об интерполяционности пространств X_0 и X_1 относительно пары (L_∞, G) утверждение теоремы 4.2, вообще говоря, не имеет места. Действительно, $E_G = E_{L_{N_2}} = \ell_2$, но $G \neq L_{N_2}$ (например, $\ln^{1/2}(e/t) \in L_{N_2} \setminus G$). Покажем, что условия теоремы 4.2 точны и в гораздо более сильном смысле.

Пусть X — произвольное с.п. на $[0, 1]$. Тогда ввиду следствия 4.2 пространство последовательностей E_X , норма в котором определяется соотношением (3.1), интерполяционно относительно пары (ℓ_1, ℓ_2) . Поэтому $E_X = (\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}}$ для некоторого параметра $\mathcal{K}$ -метода F . Но тогда, если $Y := (L_\infty, G)_F^{\mathcal{K}}$, то по следствию 4.1

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_Y \asymp \|(a_k)\|_{E_X}.$$

Следовательно, $E_Y = E_X$. Если при этом $X \notin \mathcal{I}(L_\infty, G)$, то, конечно, $Y \neq X$. Таким образом, для каждого с.п. X , не интерполяционного относительно пары (L_∞, G) , существует единственное (по теореме 4.2) с.п. $Y \in \mathcal{I}(L_\infty, G)$ такое, что $E_Y = E_X$. Более определенный результат такого рода может быть доказан для пространств Марцинкевича.

Теорема 4.3. Если ψ — квазивогнутая на $[0, 1]$ функция и пространство Марцинкевича $M(\psi) \notin \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_2})$, то существует такое пространство Марцинкевича $M(\varphi)$, что $M(\varphi) \not\subset M(\psi)$ и $E_{M(\psi)} = E_{M(\varphi)}$.

Следующая формула для $\mathcal{K}$ -функционала $\mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_\alpha})$, где, как и ранее, $N_\alpha(t) = \exp(t^\alpha) - 1$, неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 4.4. Если $\alpha \geq 1$, то с константами, не зависящими от $x \in L_{N_\alpha}$ и $t > 0$,

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_\alpha}) \asymp t \sup_{0 < u \leq \min(1, e^{1-t^\alpha})} (x^*(u) \ln^{-1/\alpha}(e/u)). \quad (4.25)$$

Доказательство. Прежде всего, применяя еще раз формулу (4.6) для $\mathcal{K}$ -функционала в паре пространств Марцинкевича, получаем:

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_\alpha}) \asymp \|x\|_{M(\psi_t)}, \quad \text{где } \psi_t(u) = u \max\{1, t^{-1} \ln^{1/\alpha}(e/u)\}. \quad (4.26)$$

Пусть $\mathcal{M}_{\psi_t}(s)$ — функция растяжения функции ψ_t , т.е.

$$\mathcal{M}_{\psi_t}(s) = \sup_{0 < u \leq \min(1, 1/s)} \frac{\psi_t(su)}{\psi_t(u)}.$$

Представим

$$\mathcal{M}_{\psi_t}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sup_{0 < u \leq 1} F_t(u), \quad \text{где } F_t(u) = \frac{\max(1, t^{-1} \ln^{1/\alpha}(2e/u))}{\max(1, t^{-1} \ln^{1/\alpha}(e/u))}.$$

Так как $\alpha \geq 1$, то $\ln^{1/\alpha}(2e/u) \leq (1 + \ln 2) \ln^{1/\alpha}(e/u)$ ($0 < u \leq 1$). Поэтому для любого $t > 0$ $F_t(u) \leq 1 + \ln 2$, откуда $\mathcal{M}_{\psi_t}(1/2) \leq (1 + \ln 2)/2 < 1$. Тем самым ввиду [46, теорема 2.5.3, с.156] с константой, зависящей лишь от α ,

$$\begin{aligned} \|x\|_{M(\psi_t)} &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} \{x^*(u) \min(1, t \cdot \ln^{-1/\alpha}(e/u))\} \\ &= t \sup_{0 < u \leq \min(1, e^{1-t^\alpha})} (x^*(u) \ln^{-1/\alpha}(e/u)). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться соотношением (4.26). □

Далее нам будет нужна также некоторая модификация соотношения (4.25).

Замечание 4.4. Для любых $1 < a < b < \infty$ имеем:

$$\frac{\log_a(a/u)}{\log_a b} \leq \log_b(b/u) \leq \log_a(a/u) \quad (0 < u \leq 1).$$

Поэтому по лемме 3.2

$$\|x\|_{L_{N_\alpha}} \asymp \sup_{0 < u \leq 1} (x^*(u) \ln^{-1/\alpha}(e/u)) \asymp \sup_{0 < u \leq 1} (x^*(u) \log_a^{-1/\alpha}(a/u)).$$

Следовательно, действуя точно так же, как в доказательстве последней леммы, можно показать, что для каждого $a > 1$

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_\alpha}) \asymp t \sup_{0 < u \leq \min(1, a^{1-t^\alpha})} (x^*(u) \log_a^{-1/\alpha}(a/u)) \quad (4.27)$$

(с константами, зависящими от a и α).

Доказательство теоремы 4.3. Пусть $x_a = \sum_{k=1}^\infty a_k r_k$ и $\kappa_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$ ($a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$). По определению пространства $E_\psi := E_{M(\psi)}$, а также ввиду следствия 2.2 и ограниченности оператора растяжения в любом симметричном пространстве

$$\|a\|_{E_\psi} = \|x_a\|_{M(\psi)} \asymp \|\kappa_a(\ln^{1/2}(e/u))\|_{M(\psi)}. \quad (4.28)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|a\|_{E_\psi} &\asymp \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \kappa_a(\ln^{1/2}(e/s)) ds \asymp \\ &\asymp \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \int_0^{e^{-k}} \kappa_a(\ln^{1/2}(e/s)) ds \asymp \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \int_{\sqrt{k}}^\infty \kappa_a(u) e^{-u^2} u du. \end{aligned}$$

Тем самым $E_\psi = (\ell_1, \ell_2)_{F_\psi}^\mathcal{K}$, где

$$\|f\|_{F_\psi} = \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \int_{\sqrt{k}}^\infty |f(u)| e^{-u^2} u du.$$

Следовательно, если $Y_\psi := (L_\infty, G)_{F_\psi}^\mathcal{K}$, то (см. рассуждения перед теоремой 4.3)

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_{M(\psi)} = \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_{Y_\psi}. \quad (4.29)$$

Так как норма в пространстве Y_ψ задается соотношением

$$\|x\|_{Y_\psi} = \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \int_{\sqrt{k}}^{\infty} \mathcal{K}(s, x; L_\infty, G) e^{-s^2} s ds,$$

то ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала

$$\|x\|_{Y_\psi} \asymp \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{K}(\sqrt{i}, x; L_\infty, G) e^{-i}. \quad (4.30)$$

С другой стороны, используя в очередной раз ограниченность оператора растяжения, получаем

$$\begin{aligned} \|x\|_{M(\psi)} &\asymp \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \int_0^{e^{-k}} x^*(s) ds \\ &\asymp \sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \sum_{i=k}^{\infty} x^*(e^{-i}) e^{-i}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

По лемме 4.4

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\sqrt{i}, x; L_\infty, L_{N_2}) &\asymp \sup_{0 < u \leq \min(1, e^{1-i})} (x^*(u) \ln^{-1/2}(e/u)) \\ &\geq \sqrt{i} x^*(e^{-i}) (1+i)^{-1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} x^*(e^{-i}) \quad (i = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

и поэтому, сравнивая (4.30) и (4.31), приходим к вложению

$$Y_\psi \subset M(\psi). \quad (4.32)$$

Тем самым, если φ_ψ — фундаментальная функция пространства Y_ψ , то

$$\varphi_{M(\psi)}(h) \leq C \varphi_\psi(h) \quad (0 < h \leq 1). \quad (4.33)$$

Найдем $\varphi_\psi(h)$. Снова используя лемму 4.4, получим, что для всех $0 < h \leq 1$

$$\mathcal{K}(\sqrt{i}, \chi_{(0,h)}; L_\infty, L_{N_2}) \asymp \sqrt{i} \ln^{-1/2}(e/h), \quad \text{если } i \leq \ln(e/h),$$

и

$$\mathcal{K}(\sqrt{i}, \chi_{(0,h)}; L_\infty, L_{N_2}) \asymp 1, \quad \text{если } i > \ln(e/h).$$

Так как

$$\sup_{k > \ln(e/h)} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \sum_{i=k}^{\infty} e^{-i} \asymp \sup_{k > \ln(e/h)} \frac{e^{-k}}{\psi(e^{-k})} \asymp \frac{h}{\psi(h)} = \varphi_{M(\psi)}(h),$$

то ввиду (4.33) и (4.30)

$$\varphi_\psi(h) \asymp \sup_{1 \leq k \leq \ln(e/h)} \frac{1}{\psi(e^{-k})} \left(\ln^{-1/2}(e/h) \sum_{i=k}^{\lfloor \ln(e/h) \rfloor} \sqrt{i} e^{-i} + \sum_{i=\lfloor \ln(e/h) \rfloor + 1}^{\infty} e^{-i} \right).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_k^{\infty} \sqrt{u} e^{-u} du &= \sqrt{k} e^{-k} + \frac{1}{2} \int_k^{\infty} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &\leq \sqrt{k} e^{-k} + \frac{1}{2} \int_k^{\infty} e^{-u} \sqrt{u} du, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_k^{\infty} \sqrt{u} e^{-u} du \leq 2e^{-k} \sqrt{k}.$$

Тем самым, если $1 \leq k \leq \ln(e/h)$, то

$$\sum_{i=k}^{\lfloor \ln(e/h) \rfloor} \sqrt{i} e^{-i} \asymp e^{-k} \sqrt{k},$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\varphi_\psi(h) &\asymp \sup_{1 \leq k \leq \ln(e/h)} \frac{e^{-k} \sqrt{k} \ln^{-1/2}(e/h) + h}{\psi(e^{-k})} \\ &\asymp \sup_{1 \leq k \leq \ln(e/h)} \frac{e^{-k} \sqrt{k}}{\ln^{1/2}(e/h) \psi(e^{-k})}.\end{aligned}$$

Так как $\varphi_{M(\psi)}(h) = \tilde{\psi}(h) := h/\psi(h)$, то ввиду (4.33) соотношение

$$\varphi_{M(\psi)}(h) \asymp \varphi_\psi(h) \quad (0 < h \leq 1)$$

эквивалентно условию

$$\frac{\sqrt{k}}{e^k \psi(e^{-k})} \leq C \frac{h \ln^{1/2}(e/h)}{\psi(h)} \quad (1 \leq k \leq \ln(e/h), 0 < h \leq 1)$$

или после замены $v = e^{-k}$ и $u = h$

$$\frac{\tilde{\psi}(v)}{\tilde{\psi}(u)} \leq C \frac{\ln^{1/2}(e/u)}{\ln^{1/2}(e/v)} \quad (0 < u \leq v < 1). \quad (4.34)$$

Применяя теорему 4 и лемму 2 из работы [2] к банаховой паре (L_1, L_∞) , получаем следующую интерполяционную теорему для пространств Марцинкевича на $[0, 1]$. Если ψ_0 и ψ_1 — две квазивогнутые на $[0, 1]$ функции, такие, что ψ_1/ψ_0 убывает и $\lim_{t \rightarrow 0} \psi_1(t)/\psi_0(t) = \infty$, то пространство Марцинкевича $M(\psi)$ интерполяционно относительно пары $(M(\psi_0), M(\psi_1))$ тогда и только тогда, когда для всех $0 < s, t \leq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\psi(s)}{\psi(t)} \leq C \max \left(\frac{\psi_0(s)}{\psi_0(t)}, \frac{\psi_1(s)}{\psi_1(t)} \right).$$

Напомним, что по лемме 3.2 $L_{N_\alpha} = M(t \ln^{1/\alpha}(e/t))$ ($\alpha > 0$). Так как, кроме того, $L_\infty = M(t)$, то тем самым $M(\psi) \in \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_2})$, если и только если

$$\frac{\psi(s)}{\psi(t)} \leq C \max \left(\frac{s \ln^{1/2}(e/s)}{t \ln^{1/2}(e/t)}, \frac{s}{t} \right) \quad (0 < s, t \leq 1).$$

Заметим, что неравенство $\psi(s)/\psi(t) \leq s/t$ ($0 < t \leq s \leq 1$) является следствием квазивогнутости ψ . Поэтому предыдущее соотношение эквивалентно неравенству (4.34). Так как по условию $M(\psi) \notin \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_2})$, то неравенство (4.34) не выполнено, откуда ввиду (4.33)

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{\varphi_\psi(t)}{\tilde{\psi}(t)} = \infty.$$

Отсюда и из (4.32) получаем

$$Y_\psi \subset M(\tilde{\varphi}_\psi) \not\subset M(\psi),$$

что вместе с (4.29) дает

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{M(\psi)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{M(\varphi_\psi)},$$

и теорема доказана. $\square$

Как уже говорилось, следствие 4.1 позволяет находить координатные пространства последовательностей коэффициентов сумм Радемахера из функциональных с.п. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.1. Напомним, что с.п. Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$, где φ — возрастающая вогнутая функция, $\varphi(0) = 0$, а $1 \leq p < \infty$, состоит из всех измеримых $x = x(s)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\varphi, p} = \left\{ \int_0^1 (x^*(s))^p d\varphi(s) \right\}^{1/p}.$$

Покажем, что в случае, когда $\varphi(s) = \ln^{1-p}(e/s)$ ($1 < p < 2$), система Радемахера в $\Lambda_p(\varphi)$ эквивалентна каноническому базису в ℓ_p , т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{\varphi, p} \asymp \|(a_k)\|_p. \quad (4.35)$$

Прежде всего, $\ell_p = (\ell_1, \ell_2)_{\theta, p}$, где $\theta = 2(p-1)/p$ [26, теорема 5.2.1]. Поэтому по следствию 4.1 для такого θ

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{(L_{\infty}, G)_{\theta, p}} \asymp \|(a_k)\|_p. \quad (4.36)$$

Далее, по лемме 4.4, если $x \in G$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\sqrt{k}, x; L_{\infty}, G) &= \mathcal{K}(\sqrt{k}, x; L_{\infty}, L_{N_2}) \asymp \\ &\asymp \sqrt{k} \sup_{0 < u \leq e^{1-k}} (x^*(u) \ln^{-1/2}(e/u)) \geq \frac{1}{2} x^*(e^{-k}) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Следовательно, используя вогнутость $\mathcal{K}$ -функционала, равенство $\theta p = 2(p-1)$ и элементарные неравенства

$$1 + \frac{\beta}{2} x \leq (1+x)^{\beta} \leq 1 + \beta x \quad (0 \leq x, \beta \leq 1), \quad (4.37)$$

получим (см. также определение интерполяционных пространств в §0.5)

$$\begin{aligned} \|x\|_{(L_{\infty}, G)_{\theta, p}}^p &\geq c_p \int_1^{\infty} (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; L_{\infty}, G))^p \frac{dt}{t} = c_p \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; L_{\infty}, G))^p \frac{dt}{t} \\ &\geq \frac{c_p}{2^p} \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} t^{-\theta p} \frac{dt}{t} = \frac{c_p}{2^{p+1}(p-1)} \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p (k^{1-p} - (k+1)^{1-p}) \\ &\geq \frac{c_p}{2^{p+2}} \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p \frac{1}{k(k+1)^{p-1}} \geq \frac{c_p}{2^{2p+1}} \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p \frac{1}{k^p}. \end{aligned}$$

С другой стороны, опять ввиду (4.37)

$$\begin{aligned} \|x\|_{\varphi, p}^p &= \int_0^1 (x^*(s))^p d\varphi(s) \leq \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p (\varphi(e^{-k+1}) - \varphi(e^{-k})) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p (k^{1-p} - (k+1)^{1-p}) \leq (p-1) \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e^{-k})^p \frac{1}{k^p}. \end{aligned}$$

Из двух последних неравенств вытекает непрерывное вложение $(L_{\infty}, G)_{\theta, p} \subset \Lambda_p(\varphi)$, откуда ввиду (4.36) мы получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{\varphi, p} \leq C \|(a_k)\|_p. \quad (4.38)$$

Докажем противоположное неравенство. Обозначив $x_a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k$ и $f_a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \chi_{(0, 2^{-k-1})}$, заметим, прежде всего, что

$$f_a(e^{-k-1}) \geq \sum_{i=1}^k a_i^* \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тем самым ввиду (4.37) и предложения 1.5

$$\begin{aligned}
 \|x_a\|_{\varphi,p}^p &\geq e^{-2p} \|\sigma_{e^2} x_a\|_{\varphi,p}^p = e^{-2p} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e^{-k}}^{e^{-k+1}} x_a^*(e^{-2}s)^p d\varphi(s) \\
 &\geq e^{-2p} \sum_{k=1}^{\infty} x_a^*(e^{-k-1})^p (k^{1-p} - (k+1)^{1-p}) \\
 &\geq e^{-2p} 2^{-p} (p-1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p} f_a(e^{-k-1})^p \\
 &\geq c'_p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i^* \right)^p \geq c'_p \|(a_k)\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.38) в результате получаем соотношение (4.35).

Пример 4.2. Рассмотрим экспоненциальные пространства Орлича L_{N_α} , где по-прежнему $N_\alpha(t) = \exp(t^\alpha) - 1$ ($t > 0$). Если $0 < \alpha \leq 2$, то $L_{N_\alpha} \supset L_{N_2}$, и поэтому по теореме 3.1 и замечания после нее

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_{N_\alpha}} \asymp \|(a_k)\|_2.$$

Покажем, что в случае $\alpha > 2$ выполнено соотношение

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_{N_\alpha}} \asymp \|(a_k)\|_{\ell_{\beta,\infty}}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1, \quad (4.39)$$

где $\ell_{\beta,\infty}$ — координатное пространство Марцинкевича с нормой

$$\|(a_k)\|_{\ell_{\beta,\infty}} = \sup_{k=1,2,\dots} k^{1/\beta-1} \cdot \sum_{i=1}^k a_i^*.$$

Прежде всего, как известно [26, теорема 5.2.1], $\ell_{\beta,\infty} = (\ell_1, \ell_2)_{\theta,\infty}$, где $\theta = 2(\beta-1)/\beta$. Поэтому ввиду следствия 4.1 достаточно доказать, что для того же θ

$$(L_\infty, G)_{\theta,\infty} = L_{N_\alpha}. \quad (4.40)$$

Так как $1/\beta + 1/\alpha = 1$, то $\alpha = 2/\theta$. Пользуясь определением пространств вещественного $\mathcal{K}$ -метода, а также соотношением (4.27) (см. замечание 4.4), имеем:

$$\|x\|_{(L_\infty, G)_{\theta,\infty}} \asymp \sup_{k=0,1,2,\dots} 2^{-k\theta} 2^k \sup_{0 < u \leq \min(1, 2^{1-2^k})} (x^*(u) \log_2^{-1/2}(2/u)).$$

Меняя местами операции взятия точной верхней грани и применяя лемму 3.2, получим, что

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{(L_\infty, G)_{\theta,\infty}} &= \sup_{0 < u \leq 1} \sup_{0 < k \leq 2^{-1} \log_2 \log_2(2/u)} (2^{k(1-\theta)} x^*(u) \log_2^{-1/2}(2/u)) \\
 &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} (x^*(u) \log_2^{-1/2}(2/u) \log_2^{(1-\theta)/2}(2/u)) \\
 &= \sup_{0 < u \leq 1} (x^*(u) \log_2^{-1/\alpha}(2/u)) \asymp \|x\|_{L_{N_\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Тем самым соотношение (4.40), а значит, и (4.39) доказано.

Пример 4.3. Пусть $M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича, построенное по функции $\varphi(t) = t \log_2 \log_2(4/t)$ ($0 < t \leq 1$). Покажем, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{M(\varphi)} \asymp \|(a_k)\|_{\ell_1(\log)}, \quad (4.41)$$

где $\ell_1(\log)$ — координатное пространство Марцинкевича с нормой

$$\|(a_k)\|_{\ell_1(\log)} = \sup_{k=1,2,\dots} \log_2^{-1}(2k) \sum_{i=1}^k a_i^*.$$

Опять ввиду следствия 4.1 соотношение (4.41) будет доказано, если найти такой параметр $\mathcal{K}$ -метода F , что одновременно

$$(\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}} = \ell_1(\log) \quad (4.42)$$

и

$$(L_\infty, G)_F^{\mathcal{K}} = M(\varphi). \quad (4.43)$$

Проверим, что (4.42) и (4.43) выполнены с $F = \ell_\infty(u_k)$, $u_k = 1/(k+1)$, если $k \geq 0$, и $u_k = 1$, если $k < 0$.

Докажем сначала (4.42). Не ограничивая общности, считаем, что $a_i = a_i^*$ ($i = 1, 2, \dots$). Тогда, если $\kappa_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$, то по формуле (2.8) из предложения 2.2

$$\kappa_a(2^k) \leq \sum_{i=1}^{2^{2k}} a_i + 2^k \left(\sum_{i=2^{2k+1}}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2} \leq 4\kappa_a(2^k). \quad (4.44)$$

Предположим сначала, что $R := \|a\|_{\ell_1(\log)} < \infty$. Из определения нормы в пространстве $\ell_1(\log)$ следует

$$\sum_{i=1}^{2^{2k}} a_i \leq 2R(k+1), \quad (4.45)$$

откуда, в частности, $a_{2^{2k}} \leq 2^{-2k+1}(k+1)R$ ($k = 0, 1, \dots$). Применяя последнее неравенство, оценим второе слагаемое в оценке (4.44) для $\mathcal{K}$ -функционала:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2^{2k+1}}^{\infty} a_i^2 &= \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=2^{2j+1}}^{2^{2(j+1)}} a_i^2 \leq 3 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{2j} a_{2^{2j}}^2 \leq \\ &\leq 12R^2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-2j} (j+1)^2 \leq 192R^2 \int_k^{\infty} x^2 2^{-2x} dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем отсюда, что

$$\sum_{i=2^{2k+1}}^{\infty} a_i^2 \leq 24^2 R^2 (k+1)^2 2^{-2k}.$$

Следовательно, второе слагаемое в сумме из (4.44) не превосходит $24R(k+1)$. Таким образом, ввиду (4.45)

$$\|a\|_{(\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}}} = \sup_{k=0,1,\dots} \frac{\kappa_a(2^k)}{k+1} \leq 26\|a\|_{\ell_1(\log)}.$$

Обратно, если $2^{2j} + 1 \leq k \leq 2^{2(j+1)}$ ($j = 0, 1, \dots$), то из (4.44) следует:

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq 4\kappa_a(2^{j+1}) \leq 4(j+2)\|a\|_{(\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}}} \leq 4\log_2(2k)\|a\|_{(\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}}}.$$

Отсюда $\|a\|_{\ell_1(\log)} \leq 4\|a\|_{(\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}}}$, и равенство (4.42) доказано.

Перейдем теперь к функциональным пространствам. Опять ввиду определения пространств вещественного $\mathcal{K}$ -метода и соотношения (4.27)

$$\begin{aligned} \|x\|_{(L_\infty, G)_F^{\mathcal{K}}} &\asymp \sup_{k=0,1,2,\dots} \frac{2^k}{k+1} \sup_{0 < u \leq \min(1, 2^{1-2^k})} (x^*(u) \log_2^{-1/2}(2/u)) \\ &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} x^*(u) \log_2^{-1/2}(2/u) \sup_{0 \leq k \leq 2^{-1} \log_2 \log_2(2/u)} \frac{2^k}{k+1} \\ &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} \frac{x^*(u)}{\log_2 \log_2(4/u)} \asymp \|x\|_{M(\varphi)}, \end{aligned}$$

где последнее соотношение опять следует из [46, теорема 2.5.3] (см. также доказательство леммы 3.2). Таким образом, равенство (4.43) доказано. Эквивалентность (4.41) вытекает теперь, как уже говорилось, из соотношений (4.42) и (4.43).

Комментарии и литературные указания. Чрезвычайно важную роль в этом параграфе играют методы интерполяции операторов. Теоремы 4.1 и 4.2 были доказаны автором в 1997 году [6] (см. также [8]). Понятие $\mathcal{K}$ -подпары ($\mathcal{K}$ -замкнутой подпары) было введено Я. Петре [126] и в последнее время используется при решении самых различных задач теории функциональных пространств и операторов (см., в частности, работы [129, 105, 42, 1]). Следствие 4.2 об описании пространств последовательностей, порожденных системой Радемахера в функциональных с.п., впервые появилось в работе [69]. Доказательство теоремы 4.2 имеет достаточно содержательную историю. Еще в 1973 году при значительно более сильных ограничениях на с.п. X_0 и X_1 была доказана слабая форма этого утверждения, а именно, эквивалентность фундаментальных функций этих пространств [55, теорема 3.11]. Позднее в работе [133] (см. теорему 5) был получен результат теоремы 4.2, но по-прежнему при тех же ограничениях на X_0 и X_1 . Заметим, что доказательство теоремы 4.2 в книге несколько отличается от приведенного в [6], хотя и там, и здесь решающее значение имеет $\mathcal{K}$ -монотонность соответствующих банаховых пар, а также их полнота относительно некоторых функциональных конусов. Достаточно элементарное предложение 4.3 фактически содержится в [4]. Применяя несколько более сложные рассуждения, можно доказать, что утверждение предложения 4.4 справедливо для любой пары вида $\vec{X} = (L_\infty, M(\varphi))$ [91, Theorem 1] (мы предпочли здесь дать другое, более короткое доказательство, опирающееся на технику частичных ретрактов). Теорема 4.3 о существовании различных пространств Марцинкевича, в которых система Радемахера порождает одно и то же подпространство, принадлежит автору и ранее не публиковалась. Формула для $\mathcal{K}$ -функционала в лемме 4.4 впервые, видимо, появилась в [17].

Эквивалентность (4.35) была доказана в [133] (чуть раньше более слабое утверждение было получено Е. М. Никишиным [52], рассматривавшим последовательности независимых функций). Заметим, что пространство $\Lambda_p(\varphi)$, $\varphi(s) = \ln^{1-p}(e/s)$ ($1 < p < 2$), интерполяционно относительно пары (L_∞, L_{N_2}) [7, теорема 1]. Поэтому ввиду соотношений (4.35) и (4.36), а также теоремы 4.2 верно равенство: $\Lambda_p(\varphi) = (L_\infty, G)_{\theta, p}$, где $\theta = 2(p-1)/p$. Используя экстраполяционное описание пространства $\Lambda_p(\varphi)$ [16, замечание 3], можно дать следующий критерий принадлежности последовательности коэффициентов ряда $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k$ к пространству ℓ_p ($1 < p < 2$) в терминах L_p -норм его суммы S : последовательность $(a_k) \in \ell_p$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\|S\|_k}{k} \right)^p < \infty.$$

Иным способом, на основе результатов работы [134], последнее утверждение было доказано Е. В. Орловым [53].

Эквивалентность (4.39) из примера 4.2 впервые, видимо, была доказана в [133] и является наиболее распространенной иллюстрацией поведения функций Радемахера в пространствах, "близких" к L_∞ (см., например, [54, § 9] или [112, р. 94]). В то же время, приведенное нами доказательство отличается от известных. Рассуждая точно так же, как в конце доказательства теоремы 4.3

(см. лемму 3.2 и [2, теорема 5]), можно показать, что пространство L_{N_α} интерполяционно относительно пары (L_∞, L_{N_2}) , если $\alpha > 2$. Принимая во внимание предложение 4.4 и равенство (4.21), получаем отсюда, что оно интерполяционно также относительно пары (L_∞, G) . Поэтому по теореме 4.2 L_{N_α} ($\alpha > 2$) — единственное интерполяционное относительно пары (L_∞, G) пространство, обладающее свойством (4.39). И наконец, эквивалентность (4.41) из примера 4.3 доказана в [6].

§ 5

ФУНКЦИИ РАДЕМАХЕРА И КОНУСЫ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

Как показывают результаты двух предыдущих параграфов, подпространство симметричного пространства, порожденное системой Радемахера, всегда может быть охарактеризовано с помощью соответствующего симметричного пространства последовательностей коэффициентов. Если пространство достаточно "близко" к L_∞ , то появляется и другая возможность описания этого подпространства — в виде некоторого конуса ступенчатых функций. Ее мы и рассмотрим здесь.

Для произвольного с.п. X на $[0, 1]$ через $q(X)$ обозначим множество всех таких последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^\infty$, что

$$\|a\|_{q(X)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \chi_{(0, 2^{-k+1}]} \right\|_X < \infty.$$

Прежде всего, ввиду следствия 1.8 мы сразу получаем неравенство

$$\|a\|_{q(X)} \leq 4 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X, \quad (5.1)$$

верное для любого с.п. X . Возникает вопрос, в каком случае справедливо противоположное соотношение. Решающую роль, как мы увидим, будет играть следующий сублинейный оператор, определенный на множестве всех измеримых функций:

$$\mathcal{L}_2 x(t) = \left(\frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^t x(s)^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2},$$

где $\varphi_1(s) = \log_2^{-1}(2/s)$ ($0 < s \leq 1$). Как и в предыдущих параграфах, если $\alpha > 0$, то $N_\alpha(t) = \exp(t^\alpha) - 1$ ($t > 0$), а L_{N_α} — соответствующее пространство Орлича. Сформулируем главный результат этого параграфа.

Теорема 5.1. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$, интерполяционное относительно пары (L_∞, L_{N_1}) . Для того, чтобы при некотором $C > 0$, зависящем только от X , выполнялось неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \|a\|_{q(X)}, \quad (5.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{L}_2$ был ограничен в X .

Достаточность. Очевидно, мы можем считать, что $a_k = a_k^*$ ($k = 1, 2, \dots$). Для произвольной такой последовательности положим:

$$f_a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{(0, 2^{-k+1}]}(s) \text{ и } x_a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(s). \quad (5.3)$$

Докажем, что с некоторой универсальной константой (не зависящей от с.п. X)

$$\|\mathcal{L}_2 f_a\|_X \asymp \|x_a\|_X. \quad (5.4)$$

Так как

$$\mathcal{L}_2 x^*(t) = \left(\frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^{\varphi_1(t)} (x^*(\varphi_1^{-1}(s)))^2 ds \right)^{1/2},$$

то функция $\mathcal{L}_2 f_a(s)$ убывает. Поэтому, если

$$q_a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}_2 f_a)(2^{-k}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(s) \quad \text{и} \quad y_a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} x_a^*(2^{-k}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(s),$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_{1/2}(q_a)(s) &\leq (\mathcal{L}_2 f_a)(s) \leq q_a(s) \\ \text{и} \quad \sigma_{1/2}(y_a)(s) &\leq x_a^*(s) \leq y_a(s) \quad (0 < s \leq 1), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где через σ_τ здесь и далее обозначается оператор растяжения.

С одной стороны, так как

$$f_a(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k a_j \right) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(s), \quad (5.6)$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 f_a(2^{-k}) &= \left(\frac{1}{\varphi_1(2^{-k})} \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i a_j \right)^2 (\varphi_1(2^{-i+1}) - \varphi_1(2^{-i})) \right)^{1/2} \\ &\asymp \sqrt{k} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i a_j \right)^2 \right)^{1/2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.7)$$

С другой стороны, ввиду следствия 2.2, ограниченности оператора растяжения, а также леммы 2.1 и предложения 4.2

$$\begin{aligned} x_a^*(2^{-k}) &\asymp \mathcal{K}(\sqrt{k}, a; \ell_1, \ell_2) = \mathcal{K}\left(\sqrt{k}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{(i-1, i)}; L_1(0, \infty), L_2(0, \infty)\right) \\ &\asymp \sqrt{k} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i a_j \right)^2 \right)^{1/2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.8)$$

В итоге (5.4) следует из соотношений (5.5) — (5.8), а также того, что $\|\sigma_2\|_{X \rightarrow X} \leq 2$ (заметим, что константы всех используемых эквивалентностей универсальны).

Если теперь оператор $\mathcal{L}_2$ ограничен в с.п. X , то соотношение (5.2) — непосредственное следствие эквивалентности (5.4) и введенных обозначений. Поэтому достаточность доказана. $\square$

Доказательство необходимости существенно сложнее. Прежде всего, заметим, что ввиду соотношения (5.4) из условия (5.2) вытекает, в частности, ограниченность в X сужения оператора $\mathcal{L}_2$ на конусе W_X , состоящем из функций $v = v(s) \in X$ вида

$$v(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{(0, 2^{-k+1}]}(s), \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0.$$

Покажем сначала, что при определенных условиях на с.п. отсюда вытекает ограниченность оператора на всем пространстве.

Определим субаддитивный оператор

$$\mathcal{L}x(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^t x^*(s) d\varphi_1(s),$$

где по-прежнему $\varphi_1(s) = \log_2^{-1}(2/s)$.

Предложение 5.1. *Предположим, что оператор $\mathcal{L}$ ограничен в с.п. X . Тогда для ограниченности оператора A в X достаточно, чтобы A обладал следующими свойствами:*

- (a) если $0 \leq x(t) \leq y(t)$ ($0 < t \leq 1$), то $0 \leq Ax(t) \leq Ay(t)$ ($0 < t \leq 1$);
- (b) $|Ax(t)| \leq Ax^*(t)$ ($0 < t \leq 1$);
- (c) для некоторого $C > 0$ $\|Av\|_X \leq C\|v\|_X$ ($v \in W_X$).

Доказательство. Для любого $x \in X$ определим ступенчатую функцию

$$u_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}x)(2^{-k}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t) \quad (0 < t \leq 1).$$

Так как $\varphi_1(t)$ возрастает и

$$\mathcal{L}x(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^{\varphi_1(t)} x^*(\varphi_1^{-1}(s)) ds, \quad (5.9)$$

то $\mathcal{L}x(t)$ убывает на $[0, 1]$. Следовательно,

$$x^*(t) \leq \mathcal{L}x(t) \leq u_x(t) \quad (0 < t \leq 1) \quad \text{и} \quad u_x(t) \leq \mathcal{L}x(t/2) \quad (0 < t \leq 1). \quad (5.10)$$

Отсюда, в частности, по условию

$$\|Ax\|_X \leq \|Ax^*\|_X \leq \|A\mathcal{L}x\|_X \leq \|Au_x\|_X. \quad (5.11)$$

Равенство (5.9) дополнительно показывает, что последовательность $\{\mathcal{L}x(2^{-k})\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает, а $\{\frac{1}{k}\mathcal{L}x(2^{-k})\}_{k=1}^{\infty}$ убывает. Поэтому ввиду [46, теорема 2.1.1] существует такая возрастающая последовательность $(c_k)_{k=1}^{\infty}$, что последовательность $b_k := c_k - c_{k-1}$ ($c_0 = 0$) убывает и

$$\mathcal{L}x(2^{-k}) \leq c_k \leq 2\mathcal{L}x(2^{-k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Рассмотрим, наконец, функцию

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{(0, 2^{-k+1}]}(t).$$

По условию оператор $\mathcal{L}$ ограничен в X . Следовательно, ввиду (5.12), второго неравенства из (5.10) и того, что $\|\sigma_2\|_{X \rightarrow X} \leq 2$, получаем

$$\|z\|_X \leq 2\|u_x\|_X \leq 2\|\sigma_2 \mathcal{L}x\|_X \leq 4\|\mathcal{L}\| \|x\|_X.$$

Тем самым, так как последовательность (b_k) убывает, то $z \in W_X$. В итоге из (5.10) — (5.12), предыдущего неравенства и условий следует

$$\|Ax\|_X \leq \|Ax^*\|_X \leq \|Az\|_X \leq C\|z\|_X \leq 4C\|\mathcal{L}\| \|x\|_X.$$

□

Таким образом, доказательство теоремы 5.1 будет закончено, если показать ограниченность оператора $\mathcal{L}$ в с.п. $X \in \mathcal{I}(L_{\infty}, L_{N_1})$ при условии, что выполнено (5.2). Это потребует от нас наибольших технических усилий. Прежде, чем начинать детальное доказательство, наметим план действий.

Сначала мы определим некоторое с.п. Y (зависящее от X), в котором, как будет показано, оператор $\mathcal{L}$ ограничен. Затем, используя условие (5.2), а также интерполяционные свойства некоторых банаховых пар, установим, что $q(Y) = q(X)$. И наконец, докажем, что отображение $X \mapsto q(X)$ на множестве $\mathcal{I}(L_{\infty}, L_{N_1})$ взаимнооднозначно. Тем самым, если $Y \in \mathcal{I}(L_{\infty}, L_{N_1})$ (X обладает этим свойством по условию), то получаем: $X = Y$, и на этом доказательство заканчивается.

Пусть, как и ранее, E_X — пространство последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|a\|_{E_X} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X.$$

Так как по следствию 4.2 $E_X \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_2)$, то

$$E_X = (\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}} \quad (5.13)$$

для некоторого параметра $\mathcal{K}$ -метода F . Рассмотрим с.п.

$$Y = (L_{\infty}, \Lambda_2)_F^{\mathcal{K}}, \quad (5.14)$$

где через Λ_2 будет далее обозначаться степенное пространство Лоренца $\Lambda_2(\varphi_1)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda_2} = \left(\int_0^1 (x^*(t))^2 d\varphi_1(t) \right)^{1/2},$$

где по-прежнему $\varphi_1(t) = \log_2^{-1}(2/t)$.

Теперь мы приведем еще один пример использования техники частичных ретрактов (см. лемму 4.2 и предложение 4.4), доказав с помощью нее, что интерполяция в банаховой паре $(L_\infty, \Lambda_p(\varphi))$ описывается $\mathcal{K}$ -методом. Это нам далее понадобится для доказательства ограниченности $\mathcal{L}_2$ в Y .

Предложение 5.2. Пусть φ — произвольная непрерывная возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, и $1 \leq p < \infty$. Тогда банахова пара $\vec{X} = (L_\infty, \Lambda_p(\varphi))$ $\mathcal{K}$ -монотонна.

Доказательство. Ввиду теоремы Спарра [136], а также леммы 4.2 достаточно показать, что $\vec{X}$ — частичный ретракт банаховой пары $\vec{Y} = (L_\infty, L_p(\varphi'))$, где через $L_p(\varphi')$ мы обозначим весовое L_p -пространство с нормой

$$\|x\|_{L_p(\varphi')} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \varphi'(t) dt \right)^{1/p}.$$

Итак, пусть $x \in \Lambda_p(\varphi)$ (так как $L_\infty \subset \Lambda_p(\varphi)$, то $L_\infty + \Lambda_p(\varphi) = \Lambda_p(\varphi)$). По лемме 4.3 существует линейный оператор T_1 , ограниченный в паре $\vec{X}$, такой, что $x^* = T_1 x$. Кроме того, нетрудно проверить, что тождественный оператор $Iy = y$ ограниченно действует из пары $\vec{X}$ в пару $\vec{Y}$. Действительно, так как производная $\varphi'(t)$ монотонно убывает, то ввиду свойств перестановки [46, свойство 13°, с.94]

$$\|Iy\|_{L_p(\varphi')} = \left(\int_0^1 |y(t)|^p \varphi'(t) dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 y^*(t)^p d\varphi(t) \right)^{1/p} = \|y\|_{\Lambda_p(\varphi)}.$$

Тем самым оператор $U := IT_1$ ограничен из пары $\vec{X}$ в пару $\vec{Y}$, и $Ux = x^*$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\varphi(1) = 1$. Выберем числа $1 = b_0 > b_1 > b_2 > \dots > 0$ так, что $\varphi(b_n) = 2^{-n}$ ($n = 0, 1, \dots$), и для всех $y \in L_p(\varphi') = L_\infty + L_p(\varphi')$ определим оператор

$$V_1 y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \left(\int_{b_{n+1}}^{b_n} y(t) \varphi'(t) dt \right) \chi_{[b_n, b_{n-1})}(s).$$

Он, очевидно, ограничен в L_∞ . Кроме того, ввиду неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} |V_1 y(s)|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n+1)p} \left(\int_{b_{n+1}}^{b_n} |y(t)| \varphi'(t) dt \right)^p \chi_{[0, b_{n-1})}(s) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \left(\int_{b_{n+1}}^{b_n} |y(t)|^p \varphi'(t) dt \right) \chi_{[0, b_{n-1})}(s). \end{aligned}$$

Так как последняя сумма не возрастает по $s \in [0, 1]$, то отсюда

$$\|V_1 y\|_{\Lambda_p(\varphi)}^p \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n+1}}^{b_n} |y(t)|^p \varphi'(t) dt = 4 \|y\|_{L_p(\varphi')}^p,$$

т.е. V_1 ограниченно действует из $L_p(\varphi')$ в $\Lambda_p(\varphi)$.

Так как $x^*(t)$ не возрастает, то, как легко видеть, $V_1 x^*(s) \geq x^*(s)$ для всех $0 < s \leq 1$. Поэтому линейный оператор

$$V_2 y(s) = \frac{x^*(s)}{V_1 x^*(s)} V_1 y(s) \quad (0 < s \leq 1)$$

ограничен из пары $\vec{Y}$ в пару $\vec{X}$, и $V_2 x^*(t) = x^*(t)$. Еще раз применяя лемму 4.3, найдем линейный оператор T_2 , ограниченный в паре $\vec{X}$, такой, что $x = T_2 x^*$. Тогда оператор $V := T_2 V_2$ ограничен из пары $\vec{Y}$ в пару $\vec{X}$ и $Vx^* = x$.

Таким образом, произвольный $x \in \Lambda_p(\varphi)$ орбитально эквивалентен своей перестановке x^* относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ соответственно, и значит, первая из этих пар — частичный ретракт второй. $\square$

Лемма 5.1. Если с.п. $Z \in \mathcal{I}(L_\infty, \Lambda_2)$, то оператор $\mathcal{L}$ ограничен в Z .

Доказательство. Ввиду только что доказанного предложения пара (L_∞, Λ_2) $\mathcal{K}$ -монотонна, и значит, по теореме Брудного-Кругляка $Z = (L_\infty, \Lambda_2)_{\mathcal{K}}^H$ для некоторого параметра вещественного метода H . В то же время нетрудно проверить, что $\mathcal{K}$ -метод "интерполирует" не только линейные, но и сублинейные операторы [29, § 11]. Поэтому ограниченность $\mathcal{L}$ в пространстве Z будет следствием его ограниченности в пространствах L_∞ и Λ_2 . Первое утверждение очевидно, и поэтому остается доказать второе.

Так как функция $\mathcal{L}x(t)$ убывает, то

$$\|\mathcal{L}x\|_{\Lambda_2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}x)(2^{-k}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} \right\|_{\Lambda_2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} ((\mathcal{L}x)(2^{-k}))^2 \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}.$$

Ввиду того, что

$$\|(a_k)\|_2 = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k : \|(b_k)\|_2 \leq 1 \right\},$$

существует такая последовательность (d_k) , что $d_k \geq 0$, $\|(d_k)\|_2 \leq 1$ и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} ((\mathcal{L}x)(2^{-k}))^2 \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k} (\mathcal{L}x)(2^{-k}).$$

Поэтому, пользуясь определением оператора $\mathcal{L}$, получим:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}x\|_{\Lambda_2} &\leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} d_k \int_0^{2^{-k}} x^*(s) d\varphi_1(s) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \left(\sum_{j=1}^k d_j \right) x^*(s) d\varphi_1(s) \\ &\leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k d_j \right) x^*(2^{-k-1}) \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Далее, ввиду леммы 4.1 и ограниченности оператора растяжения в с.п.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}x\|_{\Lambda_2} &\leq 4 \|\tilde{\mathcal{H}}\|_{\ell_2 \rightarrow \ell_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x^*(2^{-k-1}))^2 \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\ &\leq 8 \|\tilde{\mathcal{H}}\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k-1}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} \right\|_{\Lambda_2} \\ &= 8 \|\tilde{\mathcal{H}}\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_4 x^*)(2^{-k+1}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} \right\|_{\Lambda_2} \\ &\leq 8 \|\tilde{\mathcal{H}}\| \|\sigma_4 x^*\|_{\Lambda_2} \leq 32 \|\tilde{\mathcal{H}}\| \|x\|_{\Lambda_2}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathcal{H}}(a_j) = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j \right)_{k=1}^{\infty}$ — оператор Харди. □

Так как $Y \in \mathcal{I}(L_\infty, \Lambda_2)$ (см. (5.14)), то по лемме 5.1 оператор $\mathcal{L}$ ограничен в Y . Теперь перейдем к доказательству равенства

$$q(Y) = q(X). \quad (5.15)$$

Прежде всего, ввиду соотношений (5.1) и (5.2), а также определения E_X

$$q(X) = E_X. \quad (5.16)$$

Тем самым для доказательства (5.15) достаточно показать, что

$$q(Y) = E_X. \quad (5.17)$$

Продолжим изучение банаховой пары (L_∞, Λ_2) . В следующей лемме функции, определенные для $t \in [0, 1]$, доопределяются нулем при $t > 1$.

Лемма 5.2. *С константами, не зависящими от $x \in \Lambda_2$ и $t > 0$,*

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, \Lambda_2) \asymp t \left(\int_0^{2^{1-t^2}} x^*(s)^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Для фиксированного $t > 0$ определим функцию $x_1(s)$:

$$x_1(s) = x(s) - x^*(2^{1-t^2})x(s)/|x(s)|, \text{ если } |x(s)| \geq x^*(2^{1-t^2}),$$

и

$$x_1(s) = 0, \text{ если } |x(s)| < x^*(2^{1-t^2}).$$

Кроме того, пусть $x_0 := x - x_1$. Тогда, если $E = \{s \in [0, 1] : x_1(s) \neq 0\}$, то по определению перестановки $x_1^*(s) = x^*(s) - x^*(2^{1-t^2})$ ($0 < s < m(E)$) и $m(E) \leq 2^{1-t^2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x; L_\infty, \Lambda_2) &\leq t\|x_1\|_{\Lambda_2} + \|x_0\|_\infty \leq t \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x^*(s) - x^*(2^{1-t^2}))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \\ &+ x^*(2^{1-t^2}) = t \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x^*(s) - x^*(2^{1-t^2}))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \\ &+ t \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x^*(2^{1-t^2}))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \leq 2t \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x^*(s))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим произвольное представление $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in L_\infty$, $x_1 \in \Lambda_2$. Как и в доказательстве предложения 2.1 (см. (2.3)), имеем $x^*(s) \leq x_0^*(s/2) + x_1^*(s/2)$, $s \in [0, 1]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x^*(s))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x_0^*(s/2))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x_1^*(s/2))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \leq \frac{\|x_0\|_\infty}{t} + \sqrt{2}\|x_1\|_{\Lambda_2}, \end{aligned}$$

откуда по определению $\mathcal{K}$ -функционала

$$t \left(\int_0^{2^{1-t^2}} (x^*(s))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\mathcal{K}(t, x; L_\infty, \Lambda_2).$$

□

В заключительной части доказательства нам понадобится также эквивалентное выражение для $\mathcal{K}$ -функционала пары $(L_\infty, \Lambda(\varphi_1))$, где $\Lambda(\varphi_1)$ — пространство Лоренца, построенное по функции φ_1 . Так как доказательство этого результата совершенно аналогично только что приведенному, то мы его опускаем.

Лемма 5.3. *С константами, не зависящими от $x \in \Lambda(\varphi_1)$ и $t > 0$,*

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, \Lambda(\varphi_1)) \asymp t \int_0^{2^{1-t}} x^*(s) d\varphi_1(s).$$

Для доказательства (5.17) нам потребуется еще одно утверждение.

Предложение 5.3. *С константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $t > 0$,*

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_\infty, \Lambda_2) \asymp \kappa_a(t), \quad (5.18)$$

где функция f_a определяется первым из соотношений (5.3), а $\kappa_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_k = a_k^*$ ($k = 1, 2, \dots$). Прежде всего, учитывая равенство (5.6), по лемме 5.2 получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(m, f_a; L_\infty, \Lambda_2) &\asymp m \left(\sum_{k=m^2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \\ &\asymp m \left(\sum_{k=m^2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i \right)^2 \right)^{1/2} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

С другой стороны, так же, как и при доказательстве достаточности, ввиду леммы 2.1 и предложения 4.2

$$\begin{aligned} \kappa_a(t) &= \mathcal{K}\left(t, \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{(i-1, i)}; L_1(0, \infty), L_2(0, \infty)\right) \\ &\asymp t \left(\sum_{i=[t^2]}^{\infty} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i a_j \right)^2 \right)^{1/2} \quad (t \geq 1). \end{aligned}$$

Сравнение последних соотношений и вогнутость $\mathcal{K}$ -функционала приводят к эквивалентности (5.18) в случае $t \geq 1$.

В ситуации, когда $0 < t < 1$, нам понадобится равенство

$$q(\Lambda_2) = \ell_2 \text{ (с эквивалентностью норм)}. \quad (5.19)$$

Действительно, опять ввиду (5.6) и определения функции $\varphi_1(s)$

$$\|f_a\|_{\Lambda_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k a_j \right)^2 \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} d\varphi_1(s) \right)^{1/2} \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Так как $a_k \leq 1/k \sum_{j=1}^k a_j$, то, с одной стороны, отсюда следует: $\|a\|_2 \leq C_1 \|f_a\|_{\Lambda_2}$. С другой стороны, по лемме 4.1 мы имеем: $\|f_a\|_{\Lambda_2} \leq C_2 \|\tilde{\mathcal{H}}\|_{\ell_2 \rightarrow \ell_2} \|a\|_2$, где опять $\tilde{\mathcal{H}}a = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j \right)_{k=1}^{\infty}$ — оператор Харди.

В итоге, применяя (5.19), а также неравенства $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$ и $\|x\|_{\Lambda_2} \leq \|x\|_{\infty}$, получаем, что в случае $0 < t < 1$

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_\infty, \Lambda_2) = t \|f_a\|_{\Lambda_2} \asymp t \|a\|_2 = \kappa_a(t),$$

и тем самым предложение доказано. $\square$

Следствие 5.1. *С константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t > 0$, выполнено*

$$\mathcal{K}(t, x_a; L_\infty, G) \asymp \mathcal{K}(t, f_a; L_\infty, \Lambda_2),$$

где функции f_a и x_a определяются соотношениями (5.3) и, как и прежде, G — сепарабельная часть пространства Орлича L_{N_2} , $N_2(u) = e^{u^2} - 1$. Кроме того, если $X = (L_\infty, G)_F^K$ для некоторой банаховой решетки двусторонних последовательностей F , то

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|(a_k)\|_{q(Y)},$$

где $Y = (L_\infty, \Lambda_2)_F^K$.

Доказательство. Первое из соотношений вытекает из только что доказанного предложения и теоремы 4.1. Второе следует сразу из определения пространств $\mathcal{K}$ -метода. $\square$

Последнее утверждение позволяет доказать соотношение (5.17). Действительно, пусть

$$X_0 = (L_\infty, G)_F^K,$$

где банахова решетка F определяется в (5.13). Ввиду следствий 5.1 и 4.1

$$\|a\|_{q(Y)} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_0} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X = \|a\|_{E_X},$$

и (5.17), а значит, и (5.16) доказано.

Итак, осталось показать, что из соотношения (5.16) вытекает совпадение пространств X и Y . Для этого нам понадобится представление $q(Z)$ в виде интерполяционного пространства относительно пары (ℓ_1, ℓ_∞) при условии, что $Z \in \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_1})$.

Предложение 5.4. *С константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ и $t > 0$,*

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_\infty, L_{N_1}) \asymp \mathcal{K}(t, a, \ell_1, \ell_\infty).$$

Доказательство. В очередной раз, не ограничивая общности, можно считать, что $a_k = a_k^*$ ($k = 1, 2, \dots$). Начнем с проверки соотношения

$$\|f_a\|_{N_1} \asymp \|a\|_\infty. \quad (5.20)$$

Так как

$$f_a(s) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \|a\|_\infty \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(s), \quad 0 < s \leq 1,$$

то

$$\int_0^1 \left\{ \exp \left(\frac{f_a(s)}{\|a\|_\infty} \ln(4/3) \right) - 1 \right\} ds \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \{ \exp(k \ln(4/3)) - 1 \} ds = 1.$$

Тем самым $\|f_a\|_{N_1} \leq \frac{1}{\ln(4/3)} \|a\|_\infty$. С другой стороны, если при некотором $\lambda > 0$

$$\int_0^1 \left\{ \exp \left(\frac{f_a(s)}{\lambda} \right) - 1 \right\} ds \leq 1,$$

то ввиду неравенства $f_a(s) \geq \|a\|_\infty$ ($0 < s \leq 1$) мы имеем $\exp(\|a\|_\infty/\lambda) \leq 2$, т.е. $\lambda \geq \frac{1}{\ln 2} \|a\|_\infty$. Отсюда по определению нормы в пространстве Орлича

$$\|f_a\|_{N_1} \geq \frac{1}{\ln 2} \|a\|_\infty,$$

и в итоге мы получаем (5.20).

Далее, ввиду соотношения (5.6) и леммы 4.4 (см. также замечание 4.4) имеем

$$\mathcal{K}(m, f_a; L_\infty, L_{N_1}) \asymp m \sup_{i \geq m} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i a_j \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Так как последовательность $\left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i a_j \right)_{i=1}^\infty$ убывает, то отсюда

$$\mathcal{K}(m, f_a; L_\infty, L_{N_1}) \asymp \sum_{j=1}^m a_j, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тем самым ввиду легко проверяемого равенства

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_\infty) = \sum_{i=1}^{[t]} a_i + (t - [t]) a_{[t]+1} \quad (t > 0), \quad (5.21)$$

(см. также [26, теорема 5.2.1]) мы получаем, что

$$\mathcal{K}(m, f_a; L_\infty, L_{N_1}) \asymp \mathcal{K}(m, a, \ell_1, \ell_\infty), \quad m = 1, 2, \dots$$

Стандартные соображения, основывающиеся на вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала, позволяют распространить последнее соотношение на случай, когда $t \geq 1$. Если же $0 < t \leq 1$, то из неравенств $\|a\|_\infty \leq \|a\|_1$, $\|x\|_{N_1} \leq \|x\|_\infty$ и эквивалентности (5.20) следует

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_\infty, L_{N_1}) = t \|f_a\|_{N_1} \asymp t \|a\|_\infty = \mathcal{K}(t, a, \ell_1, \ell_\infty).$$

□

Из только что доказанного утверждения и определения пространств $\mathcal{K}$ -метода получаем

Следствие 5.2. *Предположим, что $Z = (L_\infty, L_{N_1})_F^K$ для некоторого параметра $\mathcal{K}$ -метода F . Тогда*

$$q(Z) = (\ell_1, \ell_\infty)_F^K \text{ (с эквивалентностью норм).}$$

Следующее утверждение показывает, что отображение $Z \mapsto q(Z)$, рассматриваемое на множестве всех с.п., интерполяционных относительно пары (L_∞, L_{N_1}) , взаимно однозначно (этот результат интересно сравнить с теоремой 4.2).

Предложение 5.5. *Пусть пространства X_0 и X_1 интерполяционны относительно банаховой пары (L_∞, L_{N_1}) и $q(X_0) = q(X_1)$. Тогда $X_0 = X_1$ (с эквивалентностью норм).*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}_2$ конус всех возрастающих вогнутых функций $f(t)$, определенных на полуоси $(0, \infty)$, таких, что $f(t) = f(1)t$ ($0 < t \leq 1$). Покажем, что (с точностью до эквивалентности)

$$\mathcal{K}(L_\infty + L_{N_1}) = \mathcal{K}(\ell_1 + \ell_\infty) = \mathcal{P}_2, \quad (5.22)$$

где, как и в предыдущем параграфе, $\mathcal{K}(X_0 + X_1)$ — множество всех функций $f(t)$, представимых в виде $f(t) = \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ ($x \in X_0 + X_1$).

Если $f \in \mathcal{P}_2$, то последовательность $a_f := (f(i) - f(i-1))_{i=1}^\infty \in \ell_\infty$ и монотонно убывает. Кроме того, ввиду равенства (5.21) $\mathcal{K}(i, a_f; \ell_1, \ell_\infty) = f(i)$ ($i = 1, 2, \dots$). Поэтому, учитывая вогнутость этих функций, а также равенство $\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_\infty) = t\|a\|_\infty$ ($0 < t \leq 1$), получаем, что $f(t) \asymp \mathcal{K}(t, a_f; \ell_1, \ell_\infty)$ ($t > 0$) с константами, не зависящими от $f \in \mathcal{P}_2$. Следовательно, $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{K}(\ell_1 + \ell_\infty)$. С другой стороны, из предложения 5.4 следует, что $\mathcal{K}(\ell_1 + \ell_\infty) \subset \mathcal{K}(L_\infty + L_{N_1})$, а ввиду неравенства $\|x\|_{N_1} \leq \|x\|_\infty$ мы получаем: $\mathcal{K}(L_\infty + L_{N_1}) \subset \mathcal{P}_2$ (см. также предложение 4.1). Итак, соотношение (5.22) доказано.

Далее, так как пара (L_∞, L_{N_1}) $\mathcal{K}$ -монотонна (см. лемму 3.2 и предложение 4.4), то по теореме Брудного-Кругляка

$$X_0 = (L_\infty, L_{N_1})_{F_0}^K \text{ и } X_1 = (L_\infty, L_{N_1})_{F_1}^K \quad (5.23)$$

для некоторых параметров $\mathcal{K}$ -метода F_0 и F_1 . Следовательно, ввиду предыдущего следствия

$$q(X_0) = (\ell_1, \ell_\infty)_{F_0}^K \text{ и } q(X_1) = (\ell_1, \ell_\infty)_{F_1}^K. \quad (5.24)$$

Если теперь $x \in X_0$, то $(\mathcal{K}(2^k, x; L_\infty, L_{N_1}))_k \in F_0$. Ввиду (5.22) существует последовательность $a \in \ell_\infty$, для которой

$$\mathcal{K}(2^k, a; \ell_1, \ell_\infty) \asymp \mathcal{K}(2^k, x; L_\infty, L_{N_1}) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.25)$$

Поэтому $(\mathcal{K}(2^k, a; \ell_1, \ell_\infty))_k \in F_0$, т.е. $a \in (\ell_1, \ell_\infty)_{F_0}^K$. Таким образом, используя (5.24) и условие, получаем: $a \in (\ell_1, \ell_\infty)_{F_1}^K$, откуда ввиду (5.23) и (5.25) $x \in X_1$. Итак, $X_0 \subset X_1$. Меняя эти пространства местами, приходим к противоположному вложению $X_1 \subset X_0$. В итоге $X_0 = X_1$ как множества. Эквивалентность норм этих пространств следует из того, что каждое с.п. на $[0, 1]$ непрерывно вложено в пространство L_1 , а также теоремы о замкнутом графике. $\square$

Замечание 5.1. Можно показать, что для любого с.п. Z пространство $q(Z) \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_\infty)$ (ср. со следствием 4.2). Действительно, если B — линейный оператор, удовлетворяющий условиям: $\|B\|_{\ell_1 \rightarrow \ell_1} \leq 1$ и $\|B\|_{\ell_\infty \rightarrow \ell_\infty} \leq 1$, то еще раз применяя соотношения (5.6) и (5.21), получим

$$\begin{aligned} \|Ba\|_{q(Z)} &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (Ba)_k^* \chi_{(0, 2^{-k+1}]} \right\|_Z = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}(k, Ba; \ell_1, \ell_\infty) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} \right\|_Z \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}(k, a; \ell_1, \ell_\infty) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} \right\|_Z = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^* \right) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} \right\|_Z = \|a\|_{q(Z)}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что условие интерполяционности пространств X_0 и X_1 относительно пары (L_∞, L_{N_1}) в предыдущем следствии существенно. Действительно, возьмем в качестве X_0 любое с.п., не интерполяционное относительно нее. Тогда $q(X_0) \in \mathcal{I}(\ell_1, \ell_\infty)$, и, значит, $q(X_0) = (\ell_1, \ell_\infty)_F^K$ для некоторого параметра F . Рассмотрим с.п. $X_1 := (L_\infty, L_{N_1})_F^K$. По следствию 5.2 $q(X_1) = (\ell_1, \ell_\infty)_F^K = q(X_0)$. В то же время, $X_1 \neq X_0$, так как $X_0 \notin \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_1})$, а $X_1 \in \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_1})$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы закончить доказательство теоремы 5.1.

Необходимость. Как показывают предыдущие рассуждения, нам осталось доказать, что с.п. Y , определенное соотношением (5.14), интерполяционно относительно банаховой пары (L_∞, L_{N_1}) .

Пусть линейный оператор A ограничен в пространствах L_∞ и L_{N_1} , и его норма в каждом из них не превосходит 1. Прежде всего, по определению $\mathcal{K}$ -функционала

$$\mathcal{K}(t, Ax; L_\infty, L_{N_1}) \leq \mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_1}) \quad (t > 0).$$

Далее, с одной стороны, по лемме 4.4 (см. также замечание 4.4)

$$\mathcal{K}(t, Ax; L_\infty, L_{N_1}) \asymp t \sup_{0 < u \leq 2^{1-t}} ((Ax)^*(u) \log_2^{-1}(2/u)) \geq (Ax)^*(2^{1-t}) \quad (t \geq 1).$$

С другой стороны, так как φ_1 эквивалентна фундаментальной функции пространства L_{N_1} , то $\Lambda(\varphi_1) \subset L_{N_1}$. Поэтому по определению оператора $\mathcal{L}$ и лемме 5.3

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_{N_1}) &\leq C_1 \mathcal{K}(t, x; L_\infty, \Lambda(\varphi_1)) \\ &\leq C_2 t \int_0^{2^{1-t}} x^*(s) d\varphi_1(s) \\ &\leq C_2 \mathcal{L}x(2^{1-t}) \quad (t \geq 1). \end{aligned}$$

Из последних соотношений вытекает, что $(Ax)^*(s) \leq C \mathcal{L}x(s)$ ($0 < s \leq 1$) для всех $x \in \Lambda_2$. Так как ввиду леммы 5.1 оператор $\mathcal{L}$ ограничен в Y , то и A ограничен в этом пространстве. Доказательство закончено. $\square$

Комментарии и литературные указания. Идея отождествления подпространства с.п., порожденного системой Радемахера, с конусом ступенчатых функций восходит к работе В.А. Родина и Е.М. Семенова [133]. Там же были доказано неравенство (5.1) и утверждение теоремы 5.1 (см. теорему 4) при более сильных ограничениях на пространство X . Далее этот результат использовался в [133] для того, чтобы доказать там теорему 5 об однозначности определения с.п. подпространством, порожденным системой Радемахера (см. предыдущий параграф). Заметим, что в этой книге соответствующие утверждения доказываются независимо. Немного более слабый вариант теоремы 5.1 (для пространств, интерполяционных относительно банаховой пары (L_∞, G)) был анонсирован в [22]. Сравнение предложения 5.5 с теоремой 4.2 показывает интересную аналогию между свойствами подпространств, порожденных системой Радемахера, и конусов ступенчатых функций. В доказательстве предложения 5.1 используются рассуждения из доказательства теоремы 5 в [133]. Доказательство предложения 5.2, использующее технику частичных ретрактов, проводится по аналогии с [90, Theorem 2].

§ 6

ХАОС РАДЕМАХЕРА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Определение 6.1. Хаосом Радемахера порядка $d \in \mathbb{N}$ будем называть множество всех функций, определенных на отрезке $I = [0, 1]$ и представимых в виде:

$$x(t) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d < \infty} a_{i_1, i_2, \dots, i_d} r_{i_1}(t) r_{i_2}(t) \dots r_{i_d}(t).$$

При этом предполагается, что сходимость ряда справа понимается как сходимость п.в. соответствующей последовательности "прямоугольных" сумм

$$S_n(t) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_d} r_{i_1}(t) r_{i_2}(t) \dots r_{i_d}(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (6.1)$$

В частности, хаос Радемахера первого порядка — это просто множество всех сходящихся рядов по этой системе, а объединение хаосов всех порядков содержится во множестве функций, представимых рядами по классической системе Уолша [34].

Далее мы ограничимся рассмотрением хаоса второго порядка, так как соответствующие результаты в случае хаоса произвольного порядка, как правило, получаются совершенно аналогично (см. замечание в конце параграфа). Итак, нас будет интересовать множество вещественнозначных функций $x = x(t)$ вида

$$x(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i(t) r_j(t) \quad (t \in I). \quad (6.2)$$

Система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$, которую в дальнейшем называем также хаосом Радемахера, ортонормирована на I (см. следствие 1.2), но в отличие от обычной системы Радемахера, функции, составляющие ее, не являются независимыми. Более того, она не является даже мультипликативной, т.е. интеграл от произведения попарно различных функций системы может быть отличен от нуля. Например,

$$\int_0^1 r_1(t) r_2(t) r_1(t) r_3(t) r_2(t) r_3(t) dt = 1.$$

Тем не менее, как мы увидим, свойства хаоса Радемахера во многих отношениях напоминают свойства семейств независимых и равномерно ограниченных функций. В центре нашего внимания будут геометрические свойства подпространства, которое "натягивает" эта система в произвольном с.п. Однако начнем мы со сходимости рядов вида (6.2) п.в. Следующий результат вполне аналогичен теореме 1.1.

Теорема 6.1. *Если последовательность $(a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty} \in \ell_2$, то ряд (6.2) сходится почти всюду на $I = [0, 1]$.*

Доказательство. Будут использоваться примерно те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 1.1. Как уже отмечалось, $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ — ортонормированная система в $L_2[0, 1]$. Поэтому из условия $(a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty} \in \ell_2$ следует, что последовательность частичных сумм $S_n(t)$ ряда (6.2), определяемая согласно (6.1), фундаментальна в этом пространстве, и значит, $\|S_n - f\|_2 \rightarrow 0$ для некоторой функции $f \in L_2[0, 1]$. Тем самым для произвольных $0 \leq a < b \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - S_n(t))^2 dt = 0,$$

или после применения интегрального неравенства Коши-Буняковского

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(t) - S_n(t)) dt = 0. \quad (6.3)$$

Пусть $I_k = (a_k, b_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) — интервал постоянства функции $r_k(t)$, а значит, и $S_k(t)$. Так как каждое слагаемое функции $S_n - S_k$ ($n > k$) содержит в качестве множителя функцию r_j , где $j > k$, то

$$\int_{I_k} (S_n(t) - S_k(t)) dt = 0,$$

откуда ввиду (6.3)

$$\int_{I_k} f(t) dt = \int_{I_k} S_k(t) dt. \quad (6.4)$$

Предположим, что E — множество всех двоично-иррациональных точек отрезка $[0, 1]$, в которых функция $F(t) := \int_0^t f(u) du$ дифференцируема. Так как $f \in L_1[0, 1]$, то $m(E) = 1$ [51, теорема 9.4.2]. Кроме того, для любой точки $t_0 \in E$ существует последовательность интервалов $\{I_k\}_{k=1}^\infty$, таких, что $t_0 \in I_k := (a_k, b_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) и функция $S_k(t)$ постоянна на I_k . Следовательно, из (6.4) следует

$$S_k(t_0) = \frac{1}{b_k - a_k} \int_{I_k} S_k(t) dt = \frac{1}{b_k - a_k} \int_{I_k} f(t) dt.$$

Так как $b_k - a_k \rightarrow 0$, то по лемме 1.1 последняя величина стремится к $F'(t_0) = f(t_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что ряд (6.2) сходится в любой $t_0 \in E$, т.е. п.в. на $[0, 1]$. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, в каких с.п. функции $r_i(t)r_j(t)$ ($1 \leq i < j < \infty$) образуют базис порожденного ими там подпространства. Иначе говоря, когда эти функции образуют базисную последовательность? Разумеется, ответ на такой вопрос, вообще говоря, зависит от порядка, в котором рассматриваются функции. Как уже отмечалось ранее, последовательности $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ являются подсистемами системы Уолша $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, и поэтому наиболее естественным выглядит порядок, индуцированный расположением этих функций в $\{w_n\}_{n=0}^\infty$. Если последняя рассматривается с нумерацией Пэли (см. [41, § 4.5, с. 150] или [34, § 1.1]), то $w_0 = 1$, $w_{2^k} = r_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$. Образует из хаоса Радемахера последовательность в соответствии с этой нумерацией:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = r_1 r_2, \varphi_2 &= r_1 r_3, \varphi_3 = r_2 r_3, \dots, \\ \varphi_{(k-2)(k-1)/2+1} &= r_1 r_k, \dots, \varphi_{(k-1)k/2} = r_{k-1} r_k, \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Тогда, как уже отмечалось в § 0.4, система $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ является базисной последовательностью в с.п. X при условии, что существует такая константа $K > 0$, что для любых натуральных $m < n$ и $a_i \in \mathbb{R}$ мы имеем:

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_X \leq K \left\| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|_X. \quad (6.6)$$

Покажем, что хаос Радемахера образует базисную последовательность в довольно-таки широком классе с.п.

Теорема 6.2. Система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$, упорядоченная согласно (6.5), является базисной последовательностью в любом с.п. X на $[0, 1]$, интерполяционном относительно пары (L_1, L_∞) .

Доказательство. В дальнейшем используется следующий факт, относящийся к свойствам системы Уолша $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ [34, § 2.1, с. 45]. Пусть

$$S_p x(t) = \sum_{i=0}^p \int_0^1 x(s) w_i(s) ds w_i(t) \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

— операторы частных сумм Фурье — Уолша. Тогда, если

$$\Delta_k^j = ((j-1)2^{-k}, j2^{-k}) \text{ и } \sigma_k = S_{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, 2^k),$$

то при $t \in \Delta_k^j$ справедливо равенство:

$$\sigma_k x(t) = 2^k \int_{\Delta_k^j} x(u) du.$$

Иначе говоря, оператор σ_k совпадает с оператором усреднения по системе двоичных промежутков $\{\Delta_k^j\}_{j=1}^{2^k}$. Легко проверить [46, § 2.3, с. 111], что такой оператор ограничен в L_1 и L_∞ с нормами, равными 1. Следовательно, по условию операторы σ_k равномерно ограничены в X , т.е. для некоторого $B = B(X) > 0$ и всех $k = 1, 2, \dots$ и $x \in X$

$$\|\sigma_k x\|_X \leq B \|x\|_X. \quad (6.7)$$

Для произвольных натуральных $m < n$ и вещественных a_i обозначим:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t), \quad z(t) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(t)$$

и докажем, что неравенство (6.6) выполняется с некоторой константой K , зависящей только от B .

Ввиду ортонормированности системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ и определения операторов σ_k для некоторых $0 \leq k \leq l$, $1 \leq p < k+1$, $1 \leq q < l+1$ функции $z(t)$ и $y(t)$ представимы следующим образом:

$$z(t) = \sigma_k y(t) + \sum_{j=1}^p b_j r_j(t) r_{k+1}(t)$$

и

$$y(t) = \sigma_l y(t) + \sum_{j=1}^q c_j r_j(t) r_{l+1}(t).$$

Предположим сначала, что $k < l$. Тогда

$$\sigma_{k+1} y(t) - \sigma_k y(t) = \sum_{j=1}^k d_j r_j(t) r_{k+1}(t),$$

где, конечно, $d_j = b_j$, если $1 \leq j \leq p$. Ввиду следствия 1.7 (см. неравенство (1.25)), а также соотношения (6.7)

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \|\sigma_k y\| + \left\| \sum_{j=1}^p b_j r_j(t) \right\| \leq B\|y\| + \left\| \sum_{j=1}^k d_j r_j(t) \right\| \\ &= B\|y\| + \|\sigma_{k+1} y - \sigma_k y\| \leq 3B\|y\|, \end{aligned}$$

и в этом случае все доказано.

Если $k = l$, то $p \leq q$ и $c_j = b_j$ ($1 \leq j \leq p$). В этом случае $\sigma_{k+1} y = y$, и поэтому

$$y(t) - \sigma_k y(t) = \sum_{j=1}^q c_j r_j(t) r_{k+1}(t).$$

Таким образом, опять

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \|\sigma_k y\| + \left\| \sum_{j=1}^p b_j r_j(t) \right\| \leq B\|y\| + \left\| \sum_{j=1}^q c_j r_j(t) \right\| \\ &= B\|y\| + \|y - \sigma_k y\| \leq (1 + 2B)\|y\|. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (6.6) выполнено и в этом случае, и значит, теорема доказана. $\square$

Напомним (см. следствие 1.7), что система Радемахера — симметричная базисная последовательность в любом с.п. X . Более того, для произвольной числовой последовательности $(c_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$ справедливо равенство:

$$\left\| \sum_{j=1}^\infty c_j r_j \right\|_X = \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j^* r_j \right\|_X,$$

где $(c_j^*)_{j=1}^\infty$ — перестановка последовательности $(|c_j|)_{j=1}^\infty$ в убывающем порядке. Разумеется, хаос Радемахера не обладает столь же "идеальными" базисными свойствами. В этом параграфе мы найдем точные условия на с.п. X , при которых эта система (обозначим ее опять через $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$) симметрична, т.е.

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i \right\|_X \leq \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_{\pi(i)} \right\|_X \leq C \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i \right\|_X,$$

где константа $C > 0$ не зависит от перестановки π натурального ряда. Интересно, что эти условия одновременно необходимы и достаточны для того, чтобы хаос Радемахера обладал значительно более слабым свойством, а именно, был безусловной базисной последовательностью. Последнее, напомним (см. § 0.4), эквивалентно тому, что существует такая константа K_0 , что для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $\theta_i = \pm 1$ и $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) выполнено:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i a_i \varphi_i \right\|_X \leq K_0 \left\| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|_X.$$

На самом деле мы докажем даже большее: из безусловности хаоса Радемахера в с.п. X вытекает эквивалентность этой системы в X каноническому базису в ℓ_2 .

Пусть, как и ранее, L_{N_1} — пространство Орлича на $[0, 1]$, построенное по функции $N_1(t) = e^t - 1$, а $H := (L_{N_1})^\circ$ — замыкание L_∞ в нем. Сформулируем главный результат параграфа.

Теорема 6.3. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$. Следующие условия эквивалентны:

1) система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ эквивалентна в X каноническому базису в пространстве ℓ_2 , т.е. для любых последовательностей $(a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty} \in \ell_2$

$$C^{-1} \|(a_{i,j})\|_2 \leq \left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X \leq C \|(a_{i,j})\|_2, \quad (6.8)$$

где константа $C > 0$ зависит лишь от пространства X ;

2) имеет место непрерывное вложение: $X \supset H$;

3) система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ — безусловная базисная последовательность в X .

Довольно-таки длинное доказательство теоремы 6.3 будет состоять из двух основных частей. Сначала мы докажем эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2), а потом импликацию 3) $\Rightarrow$ 1) (обратное утверждение очевидно). При этом нам потребуются ряд вспомогательных утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес.

Далее неоднократно будет использоваться метод декаплинга (decoupling), различные варианты которого в последнее время интенсивно используются при изучении хаосов, порожденных различными системами независимых функций (см. комментарии). Суть его заключается в переходе к так называемому "разделенному" хаосу (decoupling chaos), т.е. (в случае системы Радемахера) множеству функций, определенных на квадрате $I \times I$, вида

$$y(s, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j} r_i(s) r_j(t). \quad (6.9)$$

После того, как утверждение доказано для функций вида (6.9) (что, как правило, проще), доказательство переносится на "обычный" хаос, т.е. на множество функций вида (6.2).

Напомним, что по каждому с.п. X на отрезке $I = [0, 1]$ можно построить с.п. $X(I \times I)$ на квадрате $I \times I$, состоящее из всех измеримых по Лебегу на $I \times I$ функций $x = x(s, t)$, для которых $x^* \in X$ и $\|x\|_{X(I \times I)} = \|x^*\|_X$.

Теорема 6.4. Система $\{r_i(s) r_j(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ эквивалентна в с.п. $X(I \times I)$ каноническому базису в ℓ_2 тогда и только тогда, когда $X \supset H$.

Доказательство. Прежде всего, эквивалентность системы $\{r_i(s) r_j(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ в пространстве $X(I \times I)$ каноническому базису в ℓ_2 означает, что

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_{X(I \times I)} \asymp \|(b_{i,j})\|_2 \quad (6.10)$$

с константами, зависящими только от пространства X .

Пусть сначала $X \supset H$ и функция $y = y(s, t)$ определена равенством (6.9), где $b = (b_{i,j})_{i,j=1}^{\infty} \in \ell_2$. Если $q \geq 2$, то, применяя теорему Фубини, неравенство Минковского для $L_{q/2}$ -нормы и дважды неравенство Хинчина (см. теорему 1.3), получим:

$$\begin{aligned} \|y\|_q &= \left(\int_{I \times I} |y(s, t)|^q ds dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^1 \int_0^1 |y(s, t)|^q ds dt \right)^{1/q} \\ &\leq \sqrt{q} \left\{ \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} r_j(t) \right|^2 \right)^{q/2} dt \right\}^{1/q} \\ &\leq \sqrt{q} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} r_j(t) \right|^q dt \right)^{2/q} \right\}^{1/2} \leq q \cdot \|b\|_2. \end{aligned}$$

В итоге приходим к неравенству: $\|y\|_q \leq q\|b\|_2$, очевидно, справедливому и при $1 \leq q < 2$. Поэтому, ввиду разложения

$$\exp(uz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} z^k \quad (u > 0)$$

имеет место оценка:

$$\int_0^1 \int_0^1 \{\exp(u|y(s,t)|) - 1\} ds dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \int_0^1 \int_0^1 |y(s,t)|^k ds dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} k^k \|b\|_2^k.$$

Если теперь $u < (2e\|b\|_2)^{-1}$, то согласно формуле Стирлинга (1.14) сумма ряда в правой части последнего неравенства не превосходит 1. Следовательно, по определению пространства H линейный оператор

$$Tb(s,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{i,j} r_i(s) r_j(t)$$

ограничен из ℓ_2 в $H(I \times I)$, и, кроме того, $\|Tb\|_H = \|y\|_H \leq 2e\|b\|_2$. Так как $X \supset H$, то отсюда $\|y\|_X \leq 2Ce\|b\|_2$.

С другой стороны, если по-прежнему функция $y(s,t)$ определена соотношением (6.9), то ввиду вложения $X \subset L_1$, справедливого для произвольного с.п. на I , а также неравенства Хинчина для L_1 -нормы (см. теорему 1.4 и замечание 1.4) и неравенства Минковского

$$\begin{aligned} \|y\|_{X(I \times I)} &\geq D^{-1} \|y\|_1 \geq (\sqrt{2}D)^{-1} \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} r_j(t) \right)^2 \right]^{1/2} dt \\ &\geq (\sqrt{2}D)^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{i,j} r_j(t) \right| dt \right]^2 \right\}^{1/2} \geq (2D)^{-1} \|b\|_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Таким образом, соотношение (6.10) доказано.

Для доказательства обратного утверждения нам понадобится одна техническая лемма, где

$$L(z) = m\{(s,t) \in I \times I : \ln(e/s) \ln(e/t) > z\} \quad (z > 0).$$

Лемма 6.1. Для любого $z \geq 1$

$$\frac{1}{2} \exp(-2\sqrt{z} + 2) \leq L(z) \leq 2 \exp(-\sqrt{z} + 2). \quad (6.12)$$

Доказательство. Если $g_z(u) = u + z/u$, а $h_z(u) = \max(z/u, u)$, то

$$h_z(u) \leq g_z(u) \leq 2h_z(u) \quad (u > 0). \quad (6.13)$$

После замены переменной $u = \ln(e/s)$ получим

$$\begin{aligned} L(z) &= \int_0^1 m\{t \in I : \ln(e/t) > z \ln^{-1}(e/s)\} ds = e \int_0^1 \exp\left(-\frac{z}{\ln(e/s)}\right) ds \\ &= e^2 \int_1^{\infty} \exp(-u - z/u) du = e^2 \int_1^{\infty} \exp(-g_z(u)) du. \end{aligned}$$

Поэтому ввиду (6.13)

$$\begin{aligned} e^{-2} L(z) &\leq \int_1^{\infty} \exp(-h_z(u)) du = \int_1^{\sqrt{z}} \exp(-z/u) du + \exp(-\sqrt{z}) = \\ &= \exp(-\sqrt{z}) + z \int_{\sqrt{z}}^z e^{-u} du / u^2 \leq \exp(-\sqrt{z}) + \sqrt{z} \int_{\sqrt{z}}^z e^{-u} du / u \leq 2 \exp(-\sqrt{z}). \end{aligned}$$

Наоборот, еще раз применяя (6.13), получаем:

$$e^{-2} L(z) \geq \int_1^{\infty} \exp(-2h_z(u)) du \geq \int_{\sqrt{z}}^{\infty} \exp(-2u) du = 2^{-1} \exp(-2\sqrt{z}),$$

и неравенство (6.12) доказано. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 6.4 и предположим, что $\{r_i(s)r_j(t)\}_{i,j=1}^\infty$ эквивалентна в $X(I \times I)$ каноническому базису в ℓ_2 , т.е. выполнено (6.10). Тогда, если $b_{i,j} = c_i d_j$, то

$$\left\| \sum_{i,j=1}^\infty b_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq C \| (b_{i,j}) \|_2 = C \| (c_i) \|_2 \| (d_j) \|_2.$$

В частности, для $c_i = d_i = 1/\sqrt{n}$ ($1 \leq i \leq n$) и $c_i = d_i = 0$ ($i > n$) ($n = 1, 2, \dots$) ввиду предыдущего неравенства и симметричности X

$$\|v_n^*(s)v_n^*(t)\|_{X(I \times I)} \leq C \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6.14)$$

где $v_n(s) = 1/\sqrt{n} \sum_{i=1}^n r_i(s)$.

Применяя центральную предельную теорему точно таким же образом, как в доказательстве теоремы 3.2, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\{s \in I : v_n^*(s) > z\} = \Psi(z),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp(-u^2/2) du \quad (z > 0).$$

Тогда по лемме 3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^*(s) = \Psi^{-1}(s) \quad (0 < s \leq 1),$$

и таким образом, используя (6.14), а также свойства пространства X'' , получаем:

$$\Psi^{-1}(s)\Psi^{-1}(t) \in X''(I \times I).$$

Так как $\Psi(\tau) \geq 2/\sqrt{2\pi}e^{-2\tau^2}$ ($\tau \geq 1$) (см. доказательство теоремы 3.2), то функция $\ln^{1/2}(e/s) \ln^{1/2}(e/t)$ принадлежит пространству $X''(I \times I)$. Тем самым ввиду симметричности X'' и леммы 6.1 $g(t) = \ln(e/t) \in X''$. Если теперь $h(t) = 1/\|\chi_{(0,t)}\|_{N_1}$, то

$$h(t) = N_1^{-1}(1/t) = \ln(1 + (e-1)/t) \asymp g(t),$$

откуда $h \in X''$. Для произвольной $x \in L_\infty$ и всех $t \in I$, применяя [46, § 2.4, равенство (4.39), с. 144], получаем:

$$x^*(t) \leq t^{-1} \int_0^t x^*(s) ds \leq t^{-1} \|x\|_{N_1} \|\chi_{(0,t)}\|_{(L_{N_1})'} = \|x\|_{N_1} h(t).$$

Так как по лемме 3.3 $(X'')^\circ = X^\circ$, то отсюда следует

$$\|x\|_X = \|x\|_{X''} \leq K \|x\|_{N_1} \quad (x \in L_\infty), \quad \text{где } K = \|h\|_{X''}.$$

Это означает, что $H = (L_{N_1})^\circ \subset X^\circ \subset X$, и теорема 6.4 доказана. $\square$

Следующее простое утверждение также понадобится нам при доказательстве теоремы 6.3.

Лемма 6.2. Пусть A и B — конечные подмножества множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, а $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение. Тогда модули функций

$$y(s, t) = \sum_{i \in A, j \in B} b_{i,j} r_i(s) r_j(t) \quad (s, t \in I) \quad \text{и} \quad z(s, t) = \sum_{i \in A, j \in B} b_{i,j} r_i(s) r_{\pi(j)}(t) \quad (s, t \in I)$$

равноизмеримы.

Доказательство. Действительно, по теореме Фубини и предложению 1.4 для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} n_{|z|}(\tau) &= m\{(s, t) \in I \times I : |z(s, t)| > \tau\} \\ &= \int_0^1 m\left\{t \in I : \left| \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} b_{i,j} r_i(s) \right) r_{\pi(j)}(t) \right| > \tau \right\} ds \\ &= \int_0^1 m\left\{t \in I : \left| \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} b_{i,j} r_i(s) \right) r_j(t) \right| > \tau \right\} ds = n_{|y|}(\tau). \end{aligned}$$

$\square$

Доказательство теоремы 6.3 (эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2). Идея доказательства связана с переходом к "разделенному" хаосу и последующим применением теоремы 6.4.

Пусть сначала $a = (a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty} \in \ell_2$,

$$x(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i(t) r_j(t) \text{ и } x_N(t) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} r_i(t) r_j(t) \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Из комбинаторных соображений вытекает представление

$$x_N(t) = 2^{2-N} \sum_{D \subset \{1, \dots, N\}} \left(\sum_{i \in D, j \notin D} a_{i,j} r_i(t) r_j(t) \right), \quad (6.15)$$

где суммирование ведется по всем множествам $D \subset \{1, \dots, N\}$. Ясно, что модули функций

$$\sum_{i \in D, j \notin D} a_{i,j} r_i(t) r_j(t) \quad (t \in I) \text{ и } \sum_{i \in D, j \notin D} a_{i,j} r_i(s) r_j(t) \quad (s, t \in I)$$

равноизмеримы. Поэтому, если $X \supset H$, то ввиду теоремы 6.4, равенства (6.15) и неравенства Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} \|x_N\|_X &\leq 2^{2-N} C \sum_{D \subset \{1, \dots, N\}} \left(\sum_{i \in D, j \notin D} a_{i,j}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{2-N} C \left(\sum_{D \subset \{1, \dots, N\}} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{D \subset \{1, \dots, N\}} \sum_{i \in D, j \notin D} a_{i,j}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{2-N/2} C \left(2^{N-2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j}^2 \right)^{1/2} = 2C \|(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq N}\|_2. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство для нормы разности частичных сумм $\|x_M - x_N\|_X$ ($1 \leq N < M < \infty$) показывает, что последовательность $\{x_N\}$ фундаментальна в X , и поэтому, переходя в последнем соотношении к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем: $\|x\|_X \leq 2C\|a\|_2$.

Нетрудно показать, что противоположное неравенство справедливо всегда. Действительно, так как $X \subset L_1$, то, применяя предложение 1.3 (см. соотношение (1.19)), для любого $N \in \mathbb{N}$ получим:

$$\|(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq N}\|_2 \leq B \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} r_i r_j \right\|_1 \leq B_1 \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X.$$

Так как ряд $\sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i r_j$ сходится в X , то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$, приходим к соотношению:

$$\|(a_{i,j})\|_2 \leq B_1 \left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X. \quad (6.16)$$

Предположим теперь, что, наоборот, система функций $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ эквивалентна в с.п. X каноническому базису в ℓ_2 . Рассмотрим частичные суммы ряда (6.9), представляющего функцию $y = y(s, t)$:

$$y_N(s, t) = \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} r_i(s) r_j(t) \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Пусть отображение $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ взаимно однозначно и

$$\pi(\{1, 2, \dots, N\}) = \{N+1, N+2, \dots, 2N\}.$$

Ясно, что модули функций

$$y'_N(t) = \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} r_i(t) r_{\pi(j)}(t) \quad (t \in I) \text{ и } y''_N(t) = \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} r_i(s) r_{\pi(j)}(t) \quad (s, t \in I)$$

равноизмеримы. Так как по лемме 6.2 то же можно сказать про y_N и y_N'' , мы получаем, что равноизмеримы модули функций y_N и y_N' . Поэтому по условию для некоторого $C > 0$

$$\|y_N\|_{X(I \times I)} = \|y_N'\|_X \leq C \|(b_{i,j})_{i,j=1}^N\|_2.$$

Аналогичное неравенство для нормы $\|y_M - y_N\|_{X(I \times I)}$ ($1 \leq N < M < \infty$) показывает, что последовательность $\{y_N\}$ фундаментальна в пространстве $X(I \times I)$. Поэтому, переходя к пределу в предыдущем неравенстве при $N \rightarrow \infty$, получаем:

$$\|y\|_{X(I \times I)} \leq C \|(b_{i,j})\|_2.$$

Так как противоположное неравенство (см. (6.11)) выполнено в любом с.п., то система $\{r_i(s)r_j(t)\}_{i,j=1}^\infty$ эквивалентна в $X(I \times I)$ каноническому базису в ℓ_2 . Таким образом, по теореме 6.4 $X \supset H$, и эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) в итоге доказана. $\square$

Более сложным будет доказательство импликации 3) $\Rightarrow$ 1), к которому мы сейчас переходим. Сначала мы получим ее при дополнительном условии: $X \supset G$, где, как и ранее, G — замыкание L_∞ в пространстве Орлича L_{N_2} , построенном по функции $N_2(t) = e^{t^2} - 1$.

Предложение 6.1. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$, $X \supset G$. Если система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ является безусловной базисной последовательностью в X , то она эквивалентна в этом пространстве каноническому базису в ℓ_2 .

Для доказательства этого утверждения нам потребуется лемма, речь в которой идет о пространствах со смешанной нормой. Напомним определение (подробнее см. [37, § 11.1, с. 400]).

Определение 6.2. Пусть X и Y — функциональные банаховы решетки на $I = [0, 1]$. Пространство со смешанной нормой $X[Y]$ состоит из всех измеримых на квадрате $I \times I$ функций $x(s, t)$, удовлетворяющих условиям: 1) для п.в. $t \in I$ функция $x(\cdot, t) \in Y$; 2) функция $\varphi_x(t) = \|x(\cdot, t)\|_Y \in X$. При этом полагаем: $\|x\|_{X[Y]} = \|\varphi_x\|_X$.

Лемма 6.3. Для произвольного пространства Орлича L_F на I справедливы непрерывные вложения:

$$L_\infty[L_F] \subset L_F(I \times I) \text{ и } L_F(I \times I) \subset L_1[L_F].$$

Доказательство. Если $x = x(s, t) \in L_\infty[L_F]$ и $\alpha = \|x\|_{L_\infty[L_F]}$, то по определению нормы в пространстве Орлича

$$\int_0^1 F\left(\frac{|x(s, t)|}{\alpha}\right) ds \leq 1$$

для п.в. $t \in I$. После интегрирования этого неравенства и применения теоремы Фубини получим:

$$\int_{I \times I} F\left(\frac{|x(s, t)|}{\alpha}\right) ds dt \leq 1,$$

откуда $x \in L_F(I \times I)$ и $\|x\|_{L_F(I \times I)} \leq \|x\|_{L_\infty[L_F]}$. Первое вложение доказано.

Для доказательства второго перейдем к двойственным пространствам. Если F^* — функция, дополнительная к F , то, по-доказанному,

$$L_\infty[L_F^*] \subset L_{F^*}(I \times I),$$

а тогда для двойственных пространств имеет место противоположное вложение:

$$(L_{F^*}(I \times I))' \subset (L_\infty[L_F^*])'.$$

Так как $(L_F)' = L_{F^*}$, $(F^*)^* = F$ [45, § 14 и § 2] и $(X[Y])' = X'[Y']$ [81, Theorem 3.12], то в итоге получим: $L_F(I \times I) \subset L_1[L_F]$, причем $\|x\|_{L_1[L_F]} \leq C \|x\|_{L_F(I \times I)}$, где $C > 0$. $\square$

Доказательство предложения 6.1. Обозначим через $r_{i,j}(u)$ ($1 \leq i < j < \infty$) обычные функции Радемахера, занумерованные произвольным образом.

Так как G — подпространство пространства Орлича L_{N_2} , то на функциях из $L_\infty(I \times I)$ совпадают как нормы пространств $L_1[G]$ и $L_1[L_{N_2}]$, так и пространств $L_\infty[G]$ и $L_\infty[L_{N_2}]$. Поэтому, так

как $X \supset G$, то по только что доказанной лемме для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i < j \leq n$) выполнено:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du &= \left\| \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i(t) r_j(t) \right\|_{X(t)} \right\|_{L_1(u)} \leq \\ &\leq C_1 \left\| \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i(t) r_j(t) \right\|_{G(u)} \right\|_{L_\infty(t)}. \end{aligned}$$

Ввиду неравенства Хинчина для пространства G (см. теорему 3.1) отсюда следует, что

$$\int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du \leq C_2 \|(a_{i,j})\|_2. \quad (6.17)$$

С другой стороны, соотношение (6.16) показывает, что противоположное неравенство:

$$\int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du \geq C_3 \|(a_{i,j})\|_2 \quad (6.18)$$

выполнено всегда. Кроме того, так как по условию система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ безусловна в X , то с константой, зависящей лишь от X , для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i < j \leq n$) мы имеем

$$\left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X \asymp \int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du.$$

В итоге утверждение вытекает из соотношений (6.17) и (6.18). $\square$

Комбинируя соотношения (6.16) и (6.17), получаем следующее утверждение (определение RUC-системы см. в § 0.4).

Следствие 6.1. Если с.п. $X \supset G$, то хаос Радемахера $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ является RUC-системой в X .

Следствие 6.2. Для любого с.п. X следующие условия эквивалентны:

- 1) $X \supset G$;
- 2) $\int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du \asymp \|(a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}\|_2$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из соотношений (6.17) и (6.18).

Если выполнено 2), то возьмем $(a_{i,j})$ так, что $a_{1,j} = b_j$ ($j = 2, 3, \dots$), где $(b_j)_{j=2}^\infty \in \ell_2$ произвольна, и $a_{i,j} = 0$ ($i \neq 1$). Тогда ввиду предложения 1.4 и условия получаем:

$$\int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du = \left\| \sum_{j=2}^\infty b_j r_j \right\|_X \leq C \left(\sum_{j=2}^\infty b_j^2 \right)^{1/2}.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любой последовательности $(b_j)_{j=2}^\infty \in \ell_2$, то в итоге из теоремы 3.2 следует: $X \supset G$. $\square$

Следствие 6.3. Пусть с.п. $X \supset G$. Для любой последовательности действительных чисел $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i < j < \infty}$ существует такой набор знаков $\{\theta_{i,j}\}_{1 \leq i < j < \infty}$, $\theta_{i,j} = \pm 1$, что

$$\left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} \theta_{i,j} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X \asymp \|(a_{i,j})\|_2.$$

Доказательство. Ввиду следствия 6.2

$$\inf \left\{ \left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} \theta_{i,j} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X : \theta_{i,j} = \pm 1 \right\} \leq \int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}(u) r_i r_j \right\|_X du \leq C \|(a_{i,j})\|_2.$$

Так как противоположное неравенство выполнено всегда (см. (6.16)), то доказательство закончено. $\square$

Импликацию $3) \Rightarrow 1)$ теоремы 6.3 в общем случае мы получим как следствие уже разобранный частной ситуации, а также некоторых геометрических свойств хаоса Радемахера в пространствах Марцинкевича (в частности, в пространстве L_∞).

Напомним, что обычная система Радемахера является системой Сидона, точнее (см. замечание 1.5), для любых действительных $a_1, \dots, a_n$

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_\infty = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Совершенно иначе, как мы увидим, ведет себя в пространстве L_∞ хаос Радемахера. Сначала мы докажем один результат положительного характера для "разделенного" хаоса $\{r_i(s)r_j(t)\}_{i,j=1}^\infty$.

Предложение 6.2. *Предположим, что функция*

$$F(s, t) := \sum_{i,j=1}^\infty a_{i,j} r_i(s) r_j(t) \in L_\infty(I \times I).$$

Тогда

$$\|(a_{i,j})\|_{l_{4/3}} \leq \sqrt{2} \|F\|_\infty. \quad (6.19)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $(a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$ финитна, т.е. для некоторого N и всех $j > i \geq N$ $a_{i,j} = 0$. Запишем очевидное равенство

$$\sum_{i,j=1}^\infty |a_{i,j}|^{4/3} = \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |a_{i,j}|^{2/3} |a_{i,j}|^{2/3} \right).$$

Применяя сначала к сумме по j неравенство Гельдера с показателями 3 и $3/2$, а затем к сумме по i неравенство Гельдера с показателями $3/2$ и 3 , придем к неравенству:

$$\sum_{i,j=1}^\infty |a_{i,j}|^{4/3} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_{i,j}^2 \right)^{1/2} \right)^{2/3} \cdot \left(\sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |a_{i,j}| \right)^2 \right)^{1/3}.$$

Если оценить теперь второй сомножитель справа с помощью неравенства треугольника для ℓ_2 -нормы, то получим:

$$\sum_{i,j=1}^\infty |a_{i,j}|^{4/3} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_{i,j}^2 \right)^{1/2} \right)^{4/3}. \quad (6.20)$$

С другой стороны, ввиду L_1 -неравенства Хинчина с точной константой (см. замечание 1.4)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_{i,j}^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \sum_{i=1}^\infty \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^\infty a_{i,j} r_j(t) \right| dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \sup_{0 \leq s \leq 1} |F(s, t)| dt \leq \sqrt{2} \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что неравенство (6.19) — непосредственное следствие последнего соотношения и неравенства (6.20). $\square$

Следующий результат, в частности, показывает, что показатель $4/3$ в неравенстве (6.19) — точный. Мы будем рассматривать "случайные" суммы по системе $\{r_i(s)r_j(t)\}_{1 \leq i < j < \infty}$ в пространстве $L_\infty(I \times I)$. Для произвольных целого $n \geq 2$ и $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$, $\theta_{i,j} = \pm 1$, введем величину

$$\varphi_n(\theta) = \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_{L_\infty(I \times I)}.$$

Из определения функций Радемахера сразу следует, что $\max_\theta \varphi_n(\theta)$ достигается при $\theta_{i,j} = 1$ ($1 \leq i < j \leq n$) и равен $n(n-1)/2$ (число слагаемых в соответствующей сумме).

Предложение 6.3. *С константами, не зависящими от $n \geq 2$, справедливо соотношение:*

$$\min_{\theta} \varphi_n(\theta) \asymp 2^{-(n-1)n/2} \sum_{\theta} \varphi_n(\theta) \asymp n^{3/2}. \quad (6.21)$$

Доказательство. Пусть знаки $\theta_{i,j} = \pm 1$ ($1 \leq i < j \leq n$) произвольны. Опять ввиду L_1 -неравенства Хинчина

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_{\infty} &= \sup_{0 < s \leq 1} \sum_{j=2}^n \left| \sum_{i=1}^{j-1} \theta_{i,j} r_i(s) \right| \geq \sum_{j=2}^n \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{j-1} \theta_{i,j} r_i(s) \right| ds \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^n \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{j-1} \theta_{i,j} r_i(s) \right)^2 ds \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n-1} j^{1/2} \geq cn^{3/2}, \end{aligned}$$

где $c > 0$ не зависит от $n \geq 2$. Следовательно, $\min_{\theta} \varphi_n(\theta) \geq cn^{3/2}$.

Для доказательства противоположного неравенства заметим, прежде всего, что величина $2^{-(n-1)n/2} \sum_{\theta} \varphi_n(\theta)$ равна среднему арифметическому чисел $\varphi_n(\theta)$ по всем расстановкам знаков θ , т.е.

$$2^{-(n-1)n/2} \sum_{\theta} \varphi_n(\theta) = \int_0^1 \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{i,j}(u) r_i(s) r_j(t) \right\|_{\infty} du, \quad (6.22)$$

где $\{r_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ — первые $n(n-1)/2$ функций Радемахера, занумерованные произвольным образом.

Далее мы применим известную теорему о распределении L_{∞} -норм полиномов со "случайными" коэффициентами [38, теорема 4.1, с. 97]. Если эти коэффициенты — функции Радемахера, рассматриваемые на $[0, 1]$, она утверждает следующее: пусть E — пространство с мерой μ , $\mu(E) < \infty$, B — линейное пространство вещественнозначных функций, $B \subset L_{\infty}(E)$. Предположим, что существует $\rho > 0$ со следующим свойством: если $f \in B$, то найдется такое измеримое множество $K = K(f) \subset E$, что $\mu(K) \geq (1/\rho)\mu(E)$ и $|f(x)| \geq 1/2\|f\|_{\infty}$ ($x \in K$). Тогда для "случайных" полиномов

$$P(t, x) = \sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(x) \quad (f_k \in B)$$

и $z > 2$ имеет место оценка

$$m \left\{ t \in [0, 1] : \|P(t, \cdot)\|_{L_{\infty}(E_x)} \geq 3 \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\infty}^2 \ln(2\rho z) \right)^{1/2} \right\} \leq \frac{2}{z}. \quad (6.23)$$

Пусть B_n ($n \in \mathbb{N}$) — пространство функций вида

$$f(s, t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} r_i(s) r_j(t) \quad (a_{i,j} \in \mathbb{R}),$$

определенных на $I \times I$, где по-прежнему $I = [0, 1]$. Так как для любой функции $f \in B_n$ $|f(s, t)| = \|f\|_{\infty}$ на множестве $K \subset I \times I$ с мерой $m(K) \geq 2^{-2n+1}$, то ввиду (6.23) при $z > 2$

$$m \left\{ u \in I : \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{i,j}(u) r_i(s) r_j(t) \right\|_{\infty} \geq 3 \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(2^{2n} z) \right]^{1/2} \right\} \leq \frac{2}{z}.$$

Так как

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(2^{2n} z) \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2n \ln z \right)^{1/2} \leq n^{3/2} \ln^{1/2} z,$$

то распределение функции

$$X(u) = \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} r_{i,j}(u) r_i(s) r_j(t) \right\|_{\infty} \quad (u \in I)$$

удовлетворяет оценке:

$$m \{ u \in I : X(u) \geq 3n^{3/2} \tau \} \leq 2e^{-\tau^2} \quad (\tau \geq 1).$$

Следовательно, ввиду (6.22)

$$\begin{aligned} 2^{-(n-1)n/2} \sum_{\theta} \varphi_n(\theta) &= \|X\|_1 = 3n^{3/2} \int_0^\infty m\{u \in I : X(u) \geq 3n^{3/2}\tau\} d\tau \leq \\ &\leq 3n^{3/2} \left(1 + 2 \int_1^\infty e^{-\tau^2} d\tau\right) \leq 6n^{3/2}, \end{aligned}$$

и предложение доказано. $\square$

Аналогичный результат верен и для "неразделенного" хаоса.

Следствие 6.4. *Существует такое $K > 0$, что для произвольного целого $n \geq 2$ найдется расстановка знаков $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$, для которой*

$$\left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{i,j} r_i r_j \right\|_{L_\infty(I)} \leq K n^{3/2}. \quad (6.24)$$

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием предложения 6.3 и неравенства

$$\left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} r_i r_j \right\|_{L_\infty(I)} \leq \left\| \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_{L_\infty(I \times I)},$$

верного для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$. $\square$

Напомним (см. § 0.4), что последовательность случайных величин (или измеримых функций) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, определенных на некотором вероятностном пространстве, называется системой Сидона, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и для каждого полинома $P(t) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(t)$ выполнены неравенства:

$$C^{-1} \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \|P\|_\infty \leq C \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

где константа $C > 0$ не зависит от n и $a_k \in \mathbb{R}$.

Из предложения 6.3 и следствия 6.4 получаем

Следствие 6.5. *Последовательности $\{r_i(t)r_j(s)\}_{1 \leq i < j < \infty}$ и $\{r_i(t)r_j(t)\}_{1 \leq i < j < \infty}$ не являются системами Сидона на $I \times I$ и I соответственно.*

"Вероятностное" доказательство предложения 6.3 не предъявляет конкретной расстановки знаков, на которой достигается минимум (по порядку) величины $\varphi_n(\theta)$. Поэтому дополнительно приведем еще одно утверждение для близкой величины

$$\bar{\varphi}_n(\theta) = \left\| \sum_{i,j=1}^n \theta_{i,j} r_i(s) r_j(t) \right\|_\infty, \quad \theta_{i,j} = \pm 1 \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

где для простоты будет рассматриваться случай $n = 2^k$.

Предложение 6.4. *Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_{i,j}\}_{i,j=1}^{2^k}$ — матрица Уолша, построенная по первым 2^k функциям Уолша ($k = 0, 1, 2, \dots$). Тогда $\bar{\varphi}_{2^k}(\varepsilon) \leq 2^{3k/2}$.*

Доказательство. Напомним, что первые 2^k функций Уолша определяются соотношениями: $w_0(t) = 1$ и $w_{2^i+j}(t) = r_{i+1}(t)w_j(t)$ ($i = 0, 1, \dots; j = 0, \dots, 2^i - 1$) (см. [41, § 4.5, с. 150] или [34, § 1.3, с. 21]). Так как на интервалах $\Delta_k^i = ((i-1)2^{-k}, i2^{-k})$ ($1 \leq i \leq 2^k$) эти функции постоянны и равны $+1$ или -1 , то можно определить числа

$$\varepsilon_{i,j} = \text{sign } w_{j-1}(t), \quad t \in \Delta_k^i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2^k),$$

которые, как раз, и образуют матрицу Уолша $\varepsilon = \{\varepsilon_{i,j}\}_{i,j=1}^{2^k}$.

Для каждого $s \in I$ рассмотрим функцию

$$x_s(u) = \sum_{i=1}^{2^k} r_i(s) \chi_{\Delta_k^i}(u) \quad (u \in [0, 1]).$$

Так как $|x_s(u)| = 1$ п.в., то $\|x_s\|_2 = 1$. Коэффициенты Фурье-Уолша функции $x_s(u)$ для $1 \leq j \leq 2^k$ определяются соотношениями:

$$c_{j-1}(x_s) = \sum_{i=1}^{2^k} \int_{\Delta_k^i} w_{j-1}(u) du r_i(s) = 2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_{i,j} r_i(s).$$

Поэтому в силу неравенств Гельдера и Бесселя

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i,j=1}^{2^k} \varepsilon_{i,j} r_i(s) r_i(t) \right\|_{\infty} &= \sup_{0 < s \leq 1} \sum_{j=1}^{2^k} \left| \sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_{i,j} r_i(s) \right| = 2^k \sup_{0 < s \leq 1} \sum_{j=1}^{2^k} |c_{j-1}(x_s)| \\ &\leq 2^{3k/2} \sup_{0 < s \leq 1} \left\{ \sum_{j=1}^{2^k} (c_{j-1}(x_s))^2 \right\}^{1/2} \leq 2^{3k/2} \|x_s\|_2 = 2^{3k/2}, \end{aligned}$$

и предложение доказано. $\square$

Прежде, чем приступить к заключительной части доказательства теоремы 6.3, введем несколько обозначений. Если X — с.п. на $[0, 1]$, то $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ — подпространство X , состоящее из всех функций вида

$$x(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i(t) r_j(t), \quad \text{где } (a_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty} \in \ell_2.$$

Для произвольной расстановки знаков, т.е. последовательности $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$, $\theta_{i,j} = \pm 1$, определим на подпространстве $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ оператор

$$T_{\theta} x(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} \theta_{i,j} a_{i,j} r_i(t) r_j(t).$$

Заметим, что в случае, когда $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ — безусловная базисная последовательность в X , то для каждой расстановки знаков оператор T_{θ} ограниченно действует в $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$.

Далее нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 6.4. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $t_k = 2^{-n_{k+1}-2}$, $m_k = (n_{k+1} - n_k)(n_{k+1} - n_k - 1)/2$ и

$$y_k(t) = \sum_{n_k < i < j \leq n_{k+1}} r_i(t) r_j(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда, если $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(t)$ ($t \in [0, 1]$), где $c_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$), то

$$y^*(t_k) \geq \sum_{l=1}^k m_l c_l \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Если $1 \leq l \leq k$, то по определению функций Радемахера для $0 < t < 2t_k$ $y_l(t) = m_l$. Поэтому

$$y(t) = \sum_{l=1}^k m_l c_l + \sum_{l=k+1}^{\infty} c_l y_l(t) \quad (0 < t < 2t_k).$$

Кроме того, существует множество $E \subset (0, 2t_k)$, $m(E) = t_k$, такое, что при $t \in E$ $\sum_{l=k+1}^{\infty} c_l y_l(t) \geq 0$. Следовательно, из предыдущего равенства мы получаем:

$$y(t) \geq \sum_{l=1}^k c_l m_l \quad (t \in E),$$

и утверждение леммы вытекает из определения перестановки. $\square$

Следующие утверждения показывают, что при надлежащем выборе знаков $\theta_{i,j}$ ($1 \leq i < j < \infty$) образ оператора T_{θ} , определенного на $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$, содержит функции с достаточно большими перестановками.

Предложение 6.5. *Существует такая расстановка знаков $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдется функция $x \in \mathcal{R}_{\text{ch}}(L_\infty)$, для которой выполнено:*

$$(T_\theta x)^*(t) \geq b \log_2^{1/2-\varepsilon} 2/t \quad (0 < t \leq 2^{-6}),$$

где константа $b > 0$ зависит только от ε .

Доказательство. По следствию 6.4 для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся знаки $\theta_{i,j} = \pm 1$ ($2^k < i < j \leq 2^{k+1}$) такие, что функция

$$z_k(t) = \sum_{2^k < i < j \leq 2^{k+1}} \theta_{i,j} r_i(t) r_j(t)$$

удовлетворяет условию:

$$\|z_k\|_\infty \leq K 2^{3k/2}. \quad (6.25)$$

Обозначим $x_k(t) = 2^{-(3+2\varepsilon)k/2} z_k(t)$ и

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i(t) r_j(t),$$

где $a_{i,j} = 2^{-(3+2\varepsilon)k/2} \theta_{i,j}$ ($2^k < i < j \leq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$) и $a_{i,j} = 0$ в других случаях. Из (6.25) следует, что

$$\|x\|_\infty \leq K \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\varepsilon k} = \frac{K}{2^\varepsilon - 1},$$

т.е. $x \in \mathcal{R}_{\text{ch}}(L_\infty)$.

Пусть расстановка знаков θ состоит из найденных значений $\theta_{i,j}$ ($2^k < i < j \leq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$) и произвольных $\theta_{i,j}$ для остальных пар (i, j) , $i < j$. Получим:

$$y(t) = T_\theta x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(3+2\varepsilon)k/2} y_k(t),$$

где

$$y_k(t) = \sum_{2^k < i < j \leq 2^{k+1}} r_i(t) r_j(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применим лемму 6.4 в случае $n_k = 2^k$ и $c_k = 2^{-(3+2\varepsilon)k/2}$. Тогда $t_k = 2^{-2^{k+1}-2}$, а $m_k \geq 2^{2k-2}$. Поэтому для произвольного $k = 1, 2, \dots$

$$y^*(t_k) \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k 2^{2i} 2^{-(3+2\varepsilon)i/2} \geq 2^{(1/2-\varepsilon)k-2} \geq b' \log_2^{1/2-\varepsilon}(2/t_k),$$

где $b' > 0$ зависит только от ε . Для каждого $t \in (0, 2^{-6}]$ найдется такое $k = 1, 2, \dots$ что $t_{k+1} < t \leq t_k$. Тогда, если $b = 2^{\varepsilon-1/2} b'$, то ввиду предыдущего неравенства

$$y^*(t) \geq y^*(t_k) \geq b' \log_2^{1/2-\varepsilon}(2/t_k) \geq 2^{\varepsilon-1/2} b' \log_2^{1/2-\varepsilon}(2/t_{k+1}) \geq b \log_2^{1/2-\varepsilon} 2/t,$$

и теорема доказана. $\square$

Далее $M(\varphi_\varepsilon)$ — пространство Марцинкевича, построенное по функции $\varphi_\varepsilon(t) = t \log_2^{1/2-\varepsilon} 2/t$ ($\varepsilon < 1/2$).

Следствие 6.6. *Пусть с.п. X на $[0, 1]$ обладает тем свойством, что для произвольной расстановки знаков $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$ оператор T_θ ограничен в $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$. Тогда*

$$X \supset \bigcup_{\varepsilon \in (0, 1/2)} M(\varphi_\varepsilon).$$

Доказательство. По теореме 6.5 найдем такую расстановку знаков θ , что для заданного $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и некоторой функции $x \in \mathcal{R}_{\text{ch}}(L_\infty)$ (зависящей от ε)

$$(T_\theta x)^*(t) \geq b \log_2^{1/2-\varepsilon} 2/t \quad (0 < t \leq 2^{-6}).$$

Так как $X \supset L_\infty$, то из условия и симметричности этого пространства следует, что функция $\log_2^{1/2-\varepsilon} 2/t \in X$. Ввиду леммы 3.2 последнее означает, что $X \supset M(\varphi_\varepsilon)$, и тем самым следствие доказано. $\square$

Теорема 6.5. *Существует такая расстановка знаков $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$, что для произвольных $\varepsilon \in (-1/2, 1/2)$ и $\delta \in (0, 1/4 - \varepsilon/2)$ найдется функция $x \in \mathcal{R}_{\text{ch}}(M(\varphi_\varepsilon))$, для которой*

$$(T_\theta x)^*(t) \geq d \log_2^{1/2+\delta}(2/t) \quad (0 < t \leq 2^{-6}), \quad (6.26)$$

где константа $d > 0$ зависит только от ε и δ .

Доказательство. Пусть $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$, z_k и y_k ($k = 1, 2, \dots$) определены так же, как в доказательстве предложения 6.5. По лемме 3.2 пространство Марцинкевича $M(\varphi_{-1/2}) = M(t \log_2(2/t))$ совпадает с пространством Орлича L_{N_1} , $N_1(t) = e^t - 1$. Следовательно, ввиду ранее доказанной эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2)

$$\|z_k\|_{M(\varphi_{-1/2})} \asymp \left(\sum_{2^k < i < j \leq 2^{k+1}} |\theta_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \asymp 2^k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6.27)$$

Для произвольного $u \in (0, 1)$ пространство $M(\varphi_\varepsilon)$, $\varepsilon = (1 - 2u)/2$ является пространством типа u относительно пары $(L_\infty, M(\varphi_{-1/2}))$, т.е. существует $C > 0$, такое, что для всех $x \in L_\infty$

$$\|x\|_{M(\varphi_\varepsilon)} \leq C \|x\|_\infty^{1-u} \|x\|_{M(\varphi_{-1/2})}^u. \quad (6.28)$$

Действительно, в очередной раз применяя лемму 3.2, оценим

$$\begin{aligned} \|x\|_{M(\varphi_\varepsilon)} &\leq C' \sup\{x^*(t) \log_2^{-u}(2/t) : 0 < t \leq 1\} \leq \\ &\leq C' (\sup\{x^*(t) : 0 < t \leq 1\})^{1-u} (\sup\{x^*(t) \log_2^{-1}(2/t) : 0 < t \leq 1\})^u \leq \\ &\leq C \|x\|_\infty^{1-u} \|x\|_{M(\varphi_{-1/2})}^u. \end{aligned}$$

В итоге из соотношений (6.25), (6.27) и (6.28) следует:

$$\|z_k\|_{M(\varphi_\varepsilon)} \leq D 2^{(3-u)k/2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6.29)$$

Для пока произвольного $v > 0$ определим функции

$$x_k(t) = 2^{(u-3-2v)k/2} z_k(t) \quad \text{и} \quad x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t).$$

Ввиду (6.29) $x \in \mathcal{R}_{\text{ch}}(M(\varphi_\varepsilon))$. Кроме того, применяя лемму 6.4 в случае $n_k = 2^k$, $c_k = 2^{(u-3-2v)k/2}$ к функции

$$y(t) = T_\theta x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(u-3-2v)k/2} y_k(t),$$

получим, что для каждого $k = 1, 2, \dots$

$$y^*(t_k) \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k 2^{2i} 2^{(u-2v-3)i/2} \geq 2^{(1+u-2v)k/2-2} \geq d' \log_2^{(1+u-2v)/2}(2/t_k),$$

где, как и прежде, $t_k = 2^{-2^{k+1}-2}$. Отсюда точно так же, как при доказательстве предложения 6.5, следует, что

$$y^*(t) \geq d \log_2^{(1+u-2v)/2}(2/t) \quad (0 < t \leq 2^{-6}),$$

где $d > 0$ зависит только от u и v . Так как по условию $\delta < 1/4 - \varepsilon/2$, то v можно выбрать таким образом, что $0 < v < 1/4 - \varepsilon/2 - \delta$. Вспоминая, что $\varepsilon = (1 - 2u)/2$, получаем: $(u - 2v)/2 > \delta$, и тем самым соотношение (6.26) является непосредственным следствием предыдущего неравенства. $\square$

Точно таким же образом, как следствие 6.6, получаем

Следствие 6.7. Пусть при некотором $\varepsilon \in (-1/2, 1/2)$ с.п. $X \supset M(\varphi_\varepsilon)$. Если для произвольной расстановки знаков $\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i < j < \infty}$ оператор T_θ ограничен в $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$, то

$$X \supset \bigcup_{0 < \delta < 1/4 - \varepsilon/2} M(\varphi_{-\delta}).$$

Доказательство теоремы 6.3 (импликация 3) $\Rightarrow$ 1)). Если система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ безусловна в с.п. X , то для любой расстановки знаков θ оператор T_θ ограничен в $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$. Поэтому, в частности, по следствию 6.6 $X \supset M(\varphi_{1/5})$. Но тогда, в свою очередь, по следствию 6.7 $X \supset M(\varphi_{-1/10})$. Так как $M(\varphi_{-1/10}) \supset G$, то, тем более, $X \supset G$. В итоге, применяя предложение 6.1, заключаем, что система $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ эквивалентна в X каноническому базису в ℓ_2 . $\square$

Ранее (см. следствие 4.2) было доказано, что для любого пространства последовательностей E , интерполяционного между ℓ_1 и ℓ_2 , найдется такое функциональное с.п. X на $[0, 1]$, что соответствующее пространство последовательностей коэффициентов по системе Радемахера совпадает с E , т.е.

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j \right\|_X \asymp \|(c_j)\|_E.$$

В случае хаоса Радемахера ситуация совершенно иная.

Следствие 6.8. Пусть E – банахова решетка числовых последовательностей, а X – с.п. функций, определенных на $[0, 1]$. Соотношение

$$\left\| \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j} r_i r_j \right\|_X \asymp \|(a_{i,j})\|_E \quad (6.30)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $E = \ell_2$ и $X \supset H$.

Доказательство. Если $E = \ell_2$ и $X \supset H$, то, применяя теорему 6.3, получаем (6.30). Наоборот, из соотношения (6.30) следует, что $\{r_i r_j\}_{1 \leq i < j < \infty}$ – безусловная базисная последовательность в X , а, значит, опять по теореме 6.3 $E = \ell_2$ и $X \supset H$. $\square$

Замечание 6.1. Несложный анализ доказательств этого параграфа показывает, что аналогичные утверждения (прежде всего, теоремы 6.2 и 6.3) справедливы и для кратной системы Радемахера $\{r_i(s)r_j(t)\}_{1 \leq i < j < \infty}$, рассматриваемой на квадрате $I \times I$.

Замечание 6.2. Теорема 6.3 показывает точность экспоненциальной суммируемости хаоса Радемахера, т.е. суммируемости для любого $\alpha > 0$ функции

$$\exp\left(\alpha \left| \sum_{1 \leq i < j < \infty} b_{i,j} r_i r_j \right| \right)$$

при условии $\sum_{1 \leq i < j < \infty} b_{i,j}^2 < \infty$. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) этой теоремы интересно сравнить с утверждением теоремы 3.2 для обычной системы Радемахера, в котором роль H играет пространство G , замыкание L_∞ в пространстве Орлича L_{N_2} , где $N_2(t) = e^{t^2} - 1$.

Замечание 6.3. Напомним, что хаос Радемахера произвольного натурального порядка d – это множество всех функций, представимых в виде:

$$x(t) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d < \infty} a_{i_1, i_2, \dots, i_d} r_{i_1}(t) r_{i_2}(t) \dots r_{i_d}(t).$$

Рассуждая примерно так же, как при доказательстве теоремы 6.3, нетрудно показать, что для него справедлив аналогичный результат с заменой H на пространство H_d , замыкание L_∞ в пространстве Орлича $L_{N_{2/d}}$, построенном по функции $N_{2/d}(t) = \exp(t^{2/d}) - 1$.

В заключительной части этого параграфа мы рассмотрим вопрос о дополняемости подпространства $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ в с.п. X . Как и следует ожидать, ответ формулируется в терминах пространства H (точно так же, как в теореме 3.4 в терминах G).

Теорема 6.6. Пусть X – с.п. на $[0, 1]$. Подпространство $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ всех функций из X , представимых в виде (6.2), дополняемо в этом пространстве тогда и только тогда, когда $H \subset X \subset H'$.

Доказательство. Так как рассуждения аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 3.4, то относительно первой (более простой) части доказательства мы сделаем лишь несколько замечаний.

Прежде всего, используя теорему 6.3 в случае обоих пространств X и X' , нетрудно показать, что при условии $H \subset X \subset H'$ в X ограничен ортогональный проектор

$$Pf(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} a_{i,j}(f)r_i(t)r_j(t), \quad (6.31)$$

где

$$c_{i,j}(f) = \int_0^1 f(s)r_i(s)r_j(s) ds \quad (1 \leq i < j < \infty). \quad (6.32)$$

Далее, так как проектор P самосопряжен, то вложения $H \subset X \subset H'$, в свою очередь, являются следствием его ограниченности в пространстве X . Таким образом, остается доказать, что из дополняемости $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ в X вытекает ограниченность проектора P в этом пространстве.

Напомним (см. доказательство теоремы 3.4), что операция

$$t \oplus u = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}[(\alpha_i + \beta_i) \bmod 2],$$

где $t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 2^{-i}$, $u = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 2^{-i}$ ($\alpha_i, \beta_i = 0, 1$) — двоичные разложения чисел $t, u \in [0, 1]$, превращает отрезок $[0, 1]$ в компактную абелеву группу. Для каждого $u \in [0, 1]$ преобразование $w_u(s) = s \oplus u$ сохраняет меру Лебега на $[0, 1]$. Поэтому операторы $T_u f = f \circ w_u$ ($0 \leq u \leq 1$) изометрически действуют в X . Легко проверить также, что подпространство $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ инвариантно относительно действия этих операторов. Следовательно, опять согласно теореме Рудина [57, теорема 5.18] существует ограниченный проектор Q из X на $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$, коммутирующий со всеми операторами T_u ($0 \leq u \leq 1$). Покажем, что $Q = P$ (см. соотношения (6.31) и (6.32)).

Сначала представим проектор Q в виде

$$Qf(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} Q_{i,j}(f)r_i(t)r_j(t), \quad f \in X, \quad (6.33)$$

и покажем, что координатные функционалы $Q_{i,j}$ ($1 \leq i < j < \infty$) ограничены на X . Действительно, ввиду предложения 1.3 и вложения $X \subset L_1$ получаем:

$$|Q_{i,j}(f)| \leq \|(Q_{i,j}(f))\|_2 \leq C'\|Q(f)\|_1 \leq C\|Q(f)\|_X \leq C\|Q\|\|f\|_X.$$

Кроме того, для любых $1 \leq k < m$

$$Q_{i,j}(r_k r_m) = \begin{cases} 1, & k = i \text{ и } m = j, \\ 0, & k \neq i \text{ или } m \neq j. \end{cases} \quad (6.34)$$

Рассмотрим множества

$$\gamma_i = \left\{ u \in [0, 1] : u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 2^{-j}, \alpha_i = 0 \right\}, \quad \bar{\gamma}_i = [0, 1] \setminus \gamma_i.$$

Легко проверить, что

$$r_i(t \oplus u) = \begin{cases} r_i(t), & u \in \gamma_i, \\ -r_i(t), & u \in \bar{\gamma}_i. \end{cases}$$

Следовательно, ввиду соотношений коммутативности $T_u Q = Q T_u$ ($u \in [0, 1]$) имеем:

$$Q_{i,j}(T_u f) = \begin{cases} Q_{i,j}(f), & u \in \gamma_i \cap \gamma_j \text{ или } u \in \bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j \\ -Q_{i,j}(f), & u \in \gamma_i \cap \bar{\gamma}_j \text{ или } u \in \bar{\gamma}_i \cap \gamma_j \end{cases}$$

Так как

$$m(\gamma_i \cap \gamma_j) = m(\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j) = m(\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j) = m(\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j) = \frac{1}{4},$$

то

$$\int_{\gamma_i \cap \gamma_j} Q_{i,j}(T_u f) du = \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} Q_{i,j}(T_u f) du = \frac{1}{4} Q_{i,j}(f)$$

и

$$\int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} Q_{i,j}(T_u f) du = \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} Q_{i,j}(T_u f) du = -\frac{1}{4} Q_{i,j}(f).$$

Заметим, что ввиду ограниченности координатные функционалы $Q_{i,j}$ в последних соотношениях можно вынести за знак интеграла, и, таким образом, мы приходим к равенству:

$$\begin{aligned} Q_{i,j}(f) &= Q_{i,j} \left(\int_{\gamma_i \cap \gamma_j} T_u f du + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} T_u f du \right. \\ &\quad \left. - \int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} T_u f du - \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} T_u f du \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Легко проверить, что

$$\{s \in [0, 1] : s = t \oplus u, \quad u \in \gamma_i\} = \begin{cases} \gamma_i, t \in \gamma_i, \\ \bar{\gamma}_i, t \in \bar{\gamma}_i \end{cases}$$

$$\{s \in [0, 1] : s = t \oplus u, \quad u \in \bar{\gamma}_i\} = \begin{cases} \bar{\gamma}_i, t \in \gamma_i, \\ \gamma_i, t \in \bar{\gamma}_i. \end{cases}$$

Поэтому, так как отображение ω_u сохраняет меру Лебега на $[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} T_u f(t) du &= \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \gamma_j}(t) + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) \\ &\quad + \int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j}(t), \\ \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} T_u f(t) du &= \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j}(t) + \int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) \\ &\quad + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) + \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \gamma_j}(t), \\ \int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} T_u f(t) du &= \int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j}(t) \\ &\quad + \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \gamma_j}(t) + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} T_u f(t) du &= \int_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \bar{\gamma}_j}(t) + \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \gamma_j}(t) \\ &\quad + \int_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j} f(s) ds \cdot \chi_{\bar{\gamma}_i \cap \gamma_j}(t) + \int_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j} f(s) ds \cdot \chi_{\gamma_i \cap \bar{\gamma}_j}(t). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения вместе с (6.35), а также равенством $r_i(t) = \chi_{\gamma_i}(t) - \chi_{\bar{\gamma}_i}(t)$, нетрудно проверить, что

$$Q_{i,j}(f) = Q_{i,j} \left(\int_0^1 f(s) r_i(s) r_j(s) ds \cdot r_i(t) r_j(t) \right) = \int_0^1 f(s) r_i(s) r_j(s) ds,$$

т.е. $Q_{i,j}(f) = c_{i,j}(f)$ ($1 \leq i < j < \infty$) (см. (6.32)). В итоге $Q = P$, и теорема доказана. $\square$

Аналогичный результат справедлив и для "разделенного" хаоса, т.е. системы $\{r_i(s) r_j(t)\}_{i,j=1}^\infty$. Так как его доказательство почти ничем не отличается от доказательства предыдущей теоремы, мы его не приводим. Заметим только, что вместо проектора P нужно рассматривать проектор

$$Sf(s, t) = \sum_{i,j=1}^\infty \int_0^1 \int_0^1 x(u, v) r_i(u) r_j(v) du dv r_i(s) r_j(t),$$

а вместо преобразований w_u отрезка $I = [0, 1]$ — преобразования $\psi_{u,v}(s, t) = (s \oplus u, t \oplus v)$ ($0 \leq u, v \leq 1$) квадрата $I \times I$.

Теорема 6.7. *Подпространство $\mathcal{R}_{\text{dch}}(X)$ всех функций из с.п. $X(I \times I)$, представимых в виде (6.9), дополняемо в $X(I \times I)$ тогда и только тогда, когда $H \subset X \subset H'$.*

Замечание 6.4. Те же методы позволяют рассмотреть вопрос о дополняемости подпространства $\mathcal{R}_{\text{ch}}^d(X)$, соответствующего хаосу Радемахера произвольного натурального порядка d . А именно, рассуждая примерно таким же образом, можно показать, что $\mathcal{R}_{\text{ch}}^d(X)$ дополняемо в с.п. X тогда и только тогда, когда $H_d \subset X \subset (H_d)'$, где, как и ранее (см. замечание 6.3), H_d — замыкание L_∞ в пространстве Орлича $L_{N_{2/d}}$, построенном по функции $N_{2/d}(t) = \exp(t^{2/d}) - 1$.

Комментарии и литературные указания. Истоки теории хаосов, построенных по системам независимых функций, восходят к работе Н. Винера [140], опубликованной еще в 1941-м году. С тех пор введенные там случайные полилинейные формы и полиномиальный хаос, соответствующие последовательностям независимых случайных величин, стали важным объектом исследований, которому посвящена обширная литература. Упомянем здесь, прежде всего, монографии М. Леду и М. Талаграна [112, Chapter 4], а также С. Квапеня и В. Войчинского [111, Chapter 6] (см. также библиографию, содержащуюся там). В этой литературе, с одной стороны, весьма детально разработаны общие методы изучения хаоса (максимальные неравенства, принцип сжатия, метод декаплинга, моментные неравенства, вопросы сходимости), с другой, изучается поведение конкретных хаосов (прежде всего, радемахеровского и гауссовского) в L_p -пространствах. Главной целью § 6, содержание которого, в основном, почерпнуто из работ автора [67] и [68], является изучение свойств хаоса Радемахера в общих с.п.

Условие интерполяционности пространства X относительно пары (L_1, L_∞) в теореме 6.2 не является очень ограничительным. Все наиболее важные в приложениях с.п. (Орлича, Лоренца, Марцинкевича и т.д.) обладают этим свойством [46, § 2.4]. Кроме того, приведенное доказательство показывает, что это условие можно заменить несколько более слабым: равномерной ограниченностью в X операторов усреднения, соответствующих двоичным разбиениям отрезка $[0, 1]$.

Центральным результатом параграфа является теорема 6.3, критерий безусловности хаоса Радемахера в с.п., формулируемый в терминах вложений так же, как и теорема Родина-Семенова 3.2. Доказательство этой теоремы существенным образом основано на идее декаплинга, суть которого состоит в переходе к так называемому "разделенному" хаосу (6.9). Методу декаплинга посвящена обширная литература. Кроме уже упоминавшихся монографий укажем, не претендуя на полноту, на работы [110, 94, 92, 93], где получены различные варианты декаплинг-неравенств для моментов и распределений случайных величин со значениями в банаховом пространстве, на фундаментальную работу [108], где рассматривается возможность применения декаплинга к хаосу Радемахера в квазинормированных пространствах, а также на работы [84] и [48], содержащие приложения этого метода к геометрии банаховых пространств и гармоническому анализу. Относительно поведения хаоса, а также кратной системы Радемахера в L_p -пространствах см. [114, Proposition 2.d.6], [130] и [79]. В последней из этих работ рассматриваются более общие подсистемы функций Уолша, построенные по множествам индексов определенной комбинаторной размерности, обнаружены интересные связи между их поведением в L_p -пространствах и соответствующим вариантом центральной предельной теоремы. О пространствах со смешанной нормой подробнее см. в [37, § 11.1]. Результат леммы 6.3 хорошо известен (см. [30], [137] и [82]). В этих же работах можно найти примеры, показывающие, что он верен не для всех с.п. Понятие RUC-системы, являющееся естественным обобщением понятия безусловной базисной последовательности, было введено в работе [78] и в последнее время интенсивно изучается, в том числе, и в рамках теории с.п. [59, 137, 95]. Неравенство (6.19) из предложения 6.2 зачастую называется 4/3-неравенством Литтлвуда; иначе, говорят, что последовательность $\{r_i(s)r_j(t)\}_{1 \leq i < j < \infty}$ является системой Сидона порядка 4/3 (с этой точки зрения, обычная система Сидона будет называться системой Сидона порядка 1). Известно оно довольно-таки давно [115]. Здесь мы приводим доказательство из [80, § 2.5]. Имеется аналог этого неравенства и для произвольной размерности: d -кратная последовательность Радемахера — система Сидона порядка $2d/(d+1)$ [97] (см. также

[80, § 7.10, Theorem 34]). Результат следствия 6.5 о том, что хаос Радемахера не является системой Сидона, иначе был доказан в [130, Theorem 4]. Следствие 6.4 дает количественную оценку его не сидоновости, в определенном смысле отвечая на вопрос из [130] о геометрии подпространства, порожденного этим хаосом в пространстве L_∞ . Заметим, однако, что из декаплинг-неравенств (см., например, [92]) следует, что хаос Радемахера порядка d так же, как и d -кратная последовательность Радемахера, — система Сидона порядка $2d/(d+1)$.

§ 7

ПОДПРОСТРАНСТВО $\text{Rad } X$

Предположим, что X — произвольное симметричное пространство на $I = [0, 1]$. Как и всюду ранее, через $X(I \times I)$ обозначается пространство измеримых на $I \times I$ функций с нормой

$$\|x\|_{X(I \times I)} = \|x^*\|_X,$$

где $x^*(u)$ — перестановка функции $|x(s, t)|$ в убывающем порядке. В этом небольшом параграфе мы рассмотрим свойства подпространства с.п. $X(I \times I)$, порожденного функциями Радемахера с векторными коэффициентами. Точнее, нас будет интересовать множество $\text{Rad } X$ всех функций $x(s, t) \in X(I \times I)$ вида

$$x(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \quad (x_i \in X) \quad (\text{ряд сходится п.в. на } I \times I). \quad (7.1)$$

Начнем со следующего простого утверждения.

Предложение 7.1. *Для любого с.п. X $\text{Rad } X$ — замкнутое линейное подпространство пространства $X(I \times I)$.*

Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой состоит в непосредственном применении теоремы Фубини, а также теорем 1.1 и 1.2.

Лемма 7.1. *Ряд из правой части (7.1) сходится п.в. на $I \times I$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2(s) < \infty \quad \text{для п.в. } s \in I. \quad (7.2)$$

Доказательство предложения 7.1. Пусть последовательность $\{x^n\} \subset \text{Rad } X$ и $\|x^n - x\|_{X(I \times I)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторой функции $x \in X(I \times I)$. Тогда по определению $\text{Rad } X$

$$x^n(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n(s) r_i(t) \quad (x_i^n \in X).$$

Так как любое с.п. непрерывно вложено в L_1 (см. § 0.2), то одновременно $\|x^n - x\|_{L_1(I \times I)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Тем самым для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для всех $m > n \geq N$ и $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^k (x_i^m(s) - x_i^n(s)) r_i(t) \right| ds dt \leq \varepsilon.$$

Так как ввиду теоремы Фубини и L_1 -неравенства Хинчина с точной константой (см. замечание 1.4) левая часть из последнего неравенства не меньше, чем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^k (x_i^m(s) - x_i^n(s))^2 \right)^{1/2} ds,$$

то отсюда

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^k (x_i^m(s) - x_i^n(s))^2 \right)^{1/2} ds \leq \sqrt{2} \varepsilon \quad (7.3)$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$ и всех $m > n \geq N$. Это показывает, в частности, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ последовательность $\{x_i^n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_1(I)$. Поэтому для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется такая функция $x_i \in L_1(I)$, что $\|x_i^m - x_i\|_{L_1(I)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Воспользовавшись леммой Фату и переходя в неравенстве (7.3) к пределу сначала при $m \rightarrow \infty$ при фиксированных $k \in \mathbb{N}$ и $n \geq N$, а затем и при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^\infty (x_i(s) - x_i^n(s))^2 \right)^{1/2} ds \leq \sqrt{2}\varepsilon \quad (n \geq N). \quad (7.4)$$

Так как $x^n \in \text{Rad } X$ ($n \in \mathbb{N}$), то отсюда по лемме 7.1 ряд

$$f(s, t) = \sum_{i=1}^\infty x_i(s)r_i(t)$$

сходится п.в. на $I \times I$. Заметим также, что ввиду равенства Парсеваля, неравенства $\|g\|_{L_1(I)} \leq \|g\|_{L_2(I)}$, а также теоремы Фубини левая часть неравенства (7.4) не меньше, чем

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^\infty (x_i(s) - x_i^n(s))r_i(t) \right)^2 dt \right)^{1/2} ds \geq \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^\infty (x_i(s) - x_i^n(s))r_i(t) \right| dt ds.$$

Поэтому из (7.4) получаем:

$$\|x^n - f\|_{L_1(I \times I)} \leq \sqrt{2}\varepsilon,$$

если только $n \geq N$. Таким образом, $\|x^n - f\|_{L_1(I \times I)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда $x = f \in \text{Rad } X$, и предложение доказано. $\square$

Следующей нашей целью будет описание $\text{Rad } X$ как некоторого пространства последовательностей элементов X . Через $X(\ell_2)$ обозначим пространство последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$, где $x_i \in X$, таких, что

$$\sum_{i=1}^\infty x_i^2(s) < \infty \quad \text{для п.в. } s \in I \quad \text{и} \quad \|x\|_{X(\ell_2)} = \left\| \left(\sum_{i=1}^\infty x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_X < \infty.$$

Теорема 7.1. Пусть X — с.п. на $I = [0, 1]$ с порядково полунепрерывной нормой. Следующие условия эквивалентны:

1) существует такое число $M > 0$, что для любого $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in X(\ell_2)$

$$M^{-1}\|x\|_{X(\ell_2)} \leq \left\| \sum_{i=1}^\infty x_i(s)r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq M\|x\|_{X(\ell_2)}; \quad (7.5)$$

2) нижний индекс Бойда $\alpha_X > 0$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся некоторые свойства оператора, порожденного тензорным произведением. Точнее, если $\varphi(t)$ — измеримая функция на I , то положим $T_\varphi x(s, t) = x(s)\varphi(t)$.

Лемма 7.2. (a) Пусть $\varphi(t)$ — неограниченная измеримая функция на I . Если оператор T_φ ограничен из X в $X(I \times I)$, то $\alpha_X > 0$;

(b) Пусть $\varphi(t) = \ln^a e/t$, где $a > 0$. Если $\alpha_X > 0$, то оператор T_φ ограничен из X в $X(I \times I)$.

Доказательство. (a) Предположим, что $\alpha_X = 0$. Это означает, что $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} = 1$ ($0 < \tau \leq 1$), и тем самым для любого $n = 1, 2, \dots$ существует функция $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, такая, что

$$\|\sigma_{\frac{1}{n}} x_n\| \geq \frac{1}{2}.$$

Так как по условию оператор T_φ ограничен из X в $X(I \times I)$, а функции $x_n(s)\chi_{(0, \frac{1}{n})}(t)$ и $\sigma_{\frac{1}{n}} x_n(s)$ равноизмеримы, то существует такое $C > 0$, что для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} C &\geq \|T_\varphi x_n\|_{X(I \times I)} = \|x_n(s)\varphi(t)\|_{X(I \times I)} = \|x_n(s)\varphi^*(t)\|_{X(I \times I)} \\ &\geq \|x_n(s)\varphi^*(n^{-1})\chi_{(0, \frac{1}{n})}(t)\|_{X(I \times I)} = \varphi^*(n^{-1})\|\sigma_{\frac{1}{n}} x_n\|_X \geq \frac{1}{2}\varphi^*(n^{-1}). \end{aligned}$$

Полученное неравенство противоречит неограниченности $\varphi(t)$. Следовательно, исходное предположение неверно, и $\alpha_X > 0$.

(b) По определению нижнего индекса Бойда существует такое $C_1 > 0$, что для всех $\tau \in (0, 1)$

$$\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq C_1 \tau^{\alpha_X/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|T_\varphi x\|_{X(I \times I)} &= \|T_\varphi x^*\|_{X(I \times I)} \leq \left\| x^*(s) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^a \chi_{(e^{-k}, e^{-k+1}]}(t) \right\|_{X(I \times I)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^a \|x^*(s) \cdot \chi_{(e^{-k}, e^{-k+1}]}(t)\|_{X(I \times I)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^a \|\sigma_{e^{-k+1}} x\|_X \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{(1-k)\alpha_X/2} (k+1)^a \|x\|_X = C_a \|x\|_X. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 7.1. Прежде всего, если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, то $\{x_k(s)r_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ — безусловная базисная последовательность в $X(I \times I)$ с константой 1, т.е.

$$\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} = \left\| \sum_{i=1}^n x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \quad (7.6)$$

для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\theta_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Действительно, по теореме Фубини и предложению 1.4 для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} m\left\{(s, t) \in I \times I : \left| \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i(s) r_i(t) \right| > \tau\right\} &= \int_0^1 m\left\{t \in I : \left| \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i(s) r_i(t) \right| > \tau\right\} ds \\ &= \int_0^1 m\left\{t \in I : \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right| > \tau\right\} ds \\ &= m\left\{(s, t) \in I \times I : \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right| > \tau\right\}, \end{aligned}$$

и равенство (7.6) вытекает из определения с.п. Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\{x_k(s)r_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна, т.е.

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.7)$$

Далее, ввиду (7.6), а также неравенств Минковского и Хинчина (см. теорему 1.4 и замечание 1.4) для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} &= \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n x_i(s) r_i(t) r_i(u) \right\|_{X(I \times I)} du \\ &\geq \left\| \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n x_i(s) r_i(t) r_i(u) \right| du \right\|_{X(I \times I)} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{i=1}^n x_i(s)^2 \right)^{1/2} \right\|_{X(I \times I)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \end{aligned}$$

Если теперь

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \in X(I \times I),$$

то ввиду порядковой полунепрерывности нормы в X и неравенства (7.7)

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)}.$$

Тем самым после перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ в предыдущем неравенстве получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\|_{X(\ell_2)}. \quad (7.8)$$

Заметим, что неравенство (7.8) выполнено в любом с.п. X .

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Предположим сначала, что $\alpha_X > 0$. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X(\ell_2)$, то

$$f := \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} \in X \quad \text{и} \quad \|f\|_X = \|\{x_k\}\|_{X(\ell_2)}.$$

По лемме 2.4 для п.в. $s \in I$

$$m\left\{t \in I : \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right| > \tau\right\} \leq \exp\left(-\frac{\tau^2}{2f(s)^2}\right).$$

Так как, в свою очередь,

$$\exp\left(-\frac{\tau^2}{2f(s)^2}\right) \leq m\{t \in I : 2f(s) \ln^{1/2} e/t > \tau\} \quad (0 < s \leq 1),$$

то после интегрирования по $s \in I$, получим

$$m\left\{(s, t) \in I \times I : \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right| > \tau\right\} \leq m\{(s, t) \in I \times I : 2f(s) \ln^{1/2} e/t > \tau\},$$

откуда

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq 2\|T_{\varphi} f\|_{X(I \times I)},$$

где $\varphi(t) = \ln^{1/2} e/t$. В итоге, применяя утверждение (b) леммы 7.2, приходим к неравенству

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq M\|f\|_X = M\|\{x_k\}\|_{X(\ell_2)}.$$

Докажем противоположное утверждение. Предположим, что выполнено соотношение (7.5) (точнее, его правая часть). Пусть

$$\Psi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \quad 0 < u < \infty.$$

Обозначим через $\varphi(t)$ функцию, обратную к $\Psi(u)$. Функция $\varphi(t)$ определена на $[0, 1]$ и неограниченно возрастает при $t \rightarrow +0$. Применяя примерно такие же рассуждения, как в доказательстве теоремы 3.2, покажем, что оператор T_{φ} ограничен из X в $X(I \times I)$ и затем воспользуемся утверждением (a) леммы 7.2.

Пусть $z_n(t) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n r_i(t)$. Ввиду центральной предельной теоремы [27, теорема 7.2] при всех $u > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\{t \in [0, 1] : |z_n(t)| > u\} = \Psi(u).$$

Отсюда по лемме 3.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^*(t) = \varphi(t)$ ($0 < t \leq 1$).

Для произвольных $x \in X''$ и $n = 1, 2, \dots$ определим: $y_k^n = \frac{1}{\sqrt{n}} x$ ($1 \leq k \leq n$) и $y_k^n = 0$ ($k > n$). Очевидно, что $y^n := \{y_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in X''(\ell_2)$ и $\|y^n\|_{X''(\ell_2)} = \|x\|_{X''}$.

Положим $x^N(s) = \min\{N, |x(s)|\}$ ($N = 1, 2, \dots$). Тогда $x^N \uparrow |x|$ и $x^N \in L_\infty \subset X$. Так как норма пространства X порядково полунепрерывна, то X изометрически вложено в пространство X'' , которое, в свою очередь, максимально (обладает свойством Фату). Поэтому по условию теоремы

$$\|x^N(s)z_n^*(t)\|_{X(I \times I)} = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} x^N(s) r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq M \|y^n\|_{X''(\ell_2)} = M \|x\|_{X''}.$$

Переходя затем к пределу в последнем соотношении при $N \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, получим:

$$\|T_\varphi x\|_{X''(I \times I)} = \|x(s)\varphi(t)\|_{X''(I \times I)} \leq M \|x\|_{X''} \quad (x \in X'').$$

Так как $\alpha_X = \alpha_{X''}$ [46, теорема 2.4.11], то отсюда по лемме 7.2 $\alpha_X > 0$. Теорема 7.1 доказана. $\square$

Перейдем теперь к вопросу о дополняемости $\text{Rad } X$ в с.п. $X(I \times I)$. Напомним, что в случае скалярных коэффициентов аналогичная задача рассматривалась в главе 3 (см. теорему 3.4). Там было доказано, что подпространство $\mathcal{R}(X)$ дополняемо в с.п. X тогда и только тогда, когда имеют место вложения $G \subset X \subset G'$, где G — сепарабельная часть пространства Орлича L_{N_2} , $N_2(t) = e^{t^2} - 1$.

Покажем, что в случае $\text{Rad } X$ необходимым и достаточным является более ограничительное условие нетривиальности индексов Бойда.

Теорема 7.2. *Пусть X — с. п. на $I = [0, 1]$ с порядково полунепрерывной нормой. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) *подпространство $\text{Rad } X$ дополняемо в $X(I \times I)$;*
- 2) *индексы Бойда пространства X нетривиальны, т.е.*

$$0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1.$$

В доказательстве теоремы центральную роль будут играть свойства ортогонального проектора

$$Pf(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 f(s, v) r_i(v) dv \cdot r_i(t). \quad (7.9)$$

Предложение 7.2. *Проектор P ограничен в с.п. $X(I \times I)$ тогда и только тогда, когда индексы Бойда пространства X нетривиальны. При этом образ P совпадает с $\text{Rad } X$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$. Если $f(s, t) \in L_p(I \times I)$ при некотором $1 < p < \infty$, то по теореме Фубини $f(s, \cdot) \in L_p(I)$ для п.в. $s \in I$. Поэтому (см. доказательство теоремы 3.4) проектор P определен на $\cup_{1 < p < \infty} L_p(I \times I)$ (ряд из правой части (7.9) сходится п.в. на $I \times I$) и, кроме того, для каждого $p \in (1, \infty)$ существует такая константа $C_p > 0$, что для п.в. $s \in I$

$$\int_0^1 |Pf(s, t)|^p dt \leq C_p \int_0^1 |f(s, t)|^p dt.$$

Интегрируя последнее неравенство по $I = [0, 1]$, мы получаем, что P ограничен в $L_p(I \times I)$ для всех $1 < p < \infty$. Поэтому ввиду интерполяционной теоремы Бойда [114, Theorem 2.b.11] (см. также [46, теорема 2.6.12]) ряд из правой части (7.9) сходится п.в. на $I \times I$ для любой $f \in X$ и оператор P ограничен в X . Тем самым, в частности, образ P содержится в $\text{Rad } X$. Если, наоборот, $x(s, t) \in \text{Rad } X$, т.е. эта функция представима в виде (7.1), то по лемме 7.1 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2(s) < \infty$ для п.в. $s \in [0, 1]$. Так как отсюда следует, что $Px = x$, то в итоге образ P совпадает с $\text{Rad } X$.

Докажем противоположное утверждение. Пусть P ограничен в $X(I \times I)$ и $A := \|P\|_{X(I \times I) \rightarrow X(I \times I)}$. Обозначим

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 \int_0^1 f(s, t) g(s, t) ds dt \quad (f \in X, g \in X').$$

Так как норма X порядково полунепрерывна, то X изометрически вложено во второе двойственное X'' . Кроме того, легко проверить, что $\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \sup_{\|f\|_{X(I \times I)} \leq 1} \|Pf\|_{X''(I \times I)} = \sup_{\|f\|_{X(I \times I)} \leq 1} \sup_{\|g\|_{X'(I \times I)} \leq 1} \langle Pf, g \rangle \\ &= \sup_{\|g\|_{X'(I \times I)} \leq 1} \sup_{\|f\|_{X(I \times I)} \leq 1} \langle f, Pg \rangle = \sup_{\|g\|_{X'(I \times I)} \leq 1} \|Pg\|_{X'(I \times I)}, \end{aligned}$$

и значит, P ограничен в $X'(I \times I)$ и

$$\|P\|_{X'(I \times I) \rightarrow X'(I \times I)} = A. \quad (7.10)$$

Если функция $f \in \text{Rad } X$ и представима в виде $f(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)r_i(t)$ ($x_i \in X$), то по теореме Фубини для произвольной $g \in X'(I \times I)$ выполнено:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)r_i(t) \cdot g(s, t) ds dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s) \int_0^1 g(s, t)r_i(t) dt ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)r_i(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 g(s, v)r_i(v) dv r_i(t) dt ds = \langle f, Pg \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая порядковую полунепрерывность нормы X , а также соотношение (7.10), получим:

$$\begin{aligned} \|f\|_{X(I \times I)} &= \sup\{\langle f, g \rangle : \|g\|_{X'(I \times I)} \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle f, Pg \rangle : \|g\|_{X'(I \times I)} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\langle f, h \rangle : h \in \text{Rad } X, \|h\|_{X'(I \times I)} \leq A\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Для произвольных $x = \{x_i\} \in X(\ell_2)$ и $y = \{y_i\} \in X'(\ell_2)$ положим

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 x_i(s)y_i(s)ds.$$

Тогда, если $f \in \text{Rad } X$ и $g \in \text{Rad } X$, т.е.

$$f(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)r_i(t) \text{ и } g(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(s)r_i(t),$$

где $x_i \in X$ и $y_i \in X$, то $\langle f, g \rangle = (x, y)$. Кроме того, ввиду неравенства Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\|_{X(\ell_2)}\|y\|_{X'(\ell_2)}$. Поэтому $X'(\ell_2) \subset (X(\ell_2))^*$ и $\|y\|_{(X(\ell_2))^*} \leq \|y\|_{X'(\ell_2)}$. Наконец, как отмечалось выше (см. соотношение (7.8)),

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} y_i(s)r_i(t) \right\|_{X'(I \times I)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|y\|_{X'(\ell_2)}.$$

Учитывая последние соотношения, а также (7.11), в итоге получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i(s)r_i(t) \right\|_{X(I \times I)} &\leq \sup\{(x, y) : y \in X'(\ell_2), \|y\|_{X'(\ell_2)} \leq \sqrt{2}A\} \leq \\ &\leq \sup\{(x, y) : y \in X'(\ell_2), \|y\|_{(X(\ell_2))^*} \leq \sqrt{2}A\} \leq \sqrt{2}A\|x\|_{X(\ell_2)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и теоремы 7.1 вытекает, что $\alpha_X > 0$.

Согласно (7.10) проектор P одновременно ограничен в $X'(I \times I)$. Значит, по-доказанному, $\alpha_{X'} > 0$. Так как норма X порядково полунепрерывна, то $\beta_X = 1 - \alpha_{X'}$ [46, теорема 2.4.11]. Следовательно, отсюда $\beta_X < 1$, и предложение доказано. $\square$

Доказательство теоремы 7.2. Ввиду предложения 7.2 достаточно показать лишь то, что из дополняемости $\text{Rad } X$ в $X(I \times I)$ следует ограниченность в этом пространстве проектора P .

Пусть $t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 2^{-i}$, $u = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i 2^{-i}$ ($\alpha_i, \beta_i = 0, 1$) – двоичные разложения чисел $t, u \in [0, 1]$. Так же, как в доказательстве теоремы 3.4, определим следующую операцию:

$$t \oplus u = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [(\alpha_i + \beta_i) \bmod 2].$$

Эта операция превращает отрезок $[0, 1]$ в компактную абелеву группу. Для $(s, t) \in I \times I, u \in I$ положим: $w_u(s, t) = (s, t \oplus u)$. Преобразования w_u сохраняют меру Лебега на $I \times I$. Поэтому операторы T_u ($0 \leq u \leq 1$), заданные равенствами

$$T_u f(s, t) = f \circ w_u(s, t) = f(s, t \oplus u),$$

изометрически действуют в $X(I \times I)$. Кроме того, легко проверить, что $\text{Rad } X$ инвариантно относительно них. Таким образом, согласно теореме Рудина [57, теорема 5.18] существует проектор Q , ограниченный из $X(I \times I)$ в $\text{Rad } X$ и коммутирующий со всеми операторами T_u ($0 \leq u \leq 1$). Покажем, что $Q = P$.

Представим проектор Q в виде:

$$Qf(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i f(s) r_i(t), \quad (7.12)$$

где Q_i — линейные операторы из $X(I \times I)$ в X . Легко видеть, что

$$Q_i(x(s)r_j(t)) = \begin{cases} x(s), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (7.13)$$

Рассмотрим множества

$$\gamma_i = \{u \in [0, 1] : u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 2^{-j}, \alpha_i = 0\} \quad \text{и} \quad \overline{\gamma_i} = [0, 1] \setminus \gamma_i.$$

Нетрудно проверить, что

$$r_i(t \oplus u) = \begin{cases} r_i(t), & u \in \gamma_i, \\ -r_i(t), & u \in \overline{\gamma_i}. \end{cases}$$

Из этого соотношения, равенства $w_u^2 = I$ и условий коммутативности $T_u Q = Q T_u$ ($0 \leq u \leq 1$) следует:

$$Q_i(f \circ w_u) = \begin{cases} Q_i f, & u \in \gamma_i, \\ -Q_i f, & u \in \overline{\gamma_i}. \end{cases}$$

Тем самым, так как $m(\gamma_i) = m(\overline{\gamma_i}) = \frac{1}{2}$, получим:

$$\int_{\gamma_i} Q_i(f \circ w_u) du = \frac{1}{2} Q_i f, \quad \int_{\overline{\gamma_i}} Q_i(f \circ w_u) du = -\frac{1}{2} Q_i f. \quad (7.14)$$

Далее ввиду (7.6) и (7.12)

$$\|Q_i f\|_X \leq \|Qf\|_{X(I \times I)} \leq \|Q\| \|f\|_X,$$

т.е. операторы Q_i ($i = 1, 2, \dots$) ограничены. Следовательно, в (7.14) Q_i можно вынести за знак интеграла, откуда

$$Q_i f = Q \left(\int_{\gamma_i} (f \circ w_u) du - \int_{\overline{\gamma_i}} (f \circ w_u) du \right). \quad (7.15)$$

Для каждого $u \in [0, 1]$ отображение $t \mapsto t \oplus u$ сохраняет меру Лебега на $[0, 1]$. Кроме того, для всякого $t \in [0, 1]$

$$\{v \in [0, 1] : v = t \oplus u, \quad u \in \gamma_i\} = \begin{cases} \gamma_i, & t \in \gamma_i, \\ \overline{\gamma_i}, & t \in \overline{\gamma_i} \end{cases}$$

и

$$\{v \in [0, 1] : v = t \oplus u, \quad u \in \overline{\gamma_i}\} = \begin{cases} \overline{\gamma_i}, t \in \gamma_i, \\ \gamma_i, t \in \overline{\gamma_i}. \end{cases}$$

Значит,

$$\int_{\gamma_i} (f \circ w_u)(s, t) du = \int_{\gamma_i} f(s, v) dv \cdot \chi_{\gamma_i}(t) + \int_{\overline{\gamma_i}} f(s, v) dv \cdot \chi_{\overline{\gamma_i}}(t)$$

и

$$\int_{\overline{\gamma_i}} (f \circ w_u)(s, t) du = \int_{\overline{\gamma_i}} f(s, v) dv \cdot \chi_{\gamma_i}(t) + \int_{\gamma_i} f(s, v) dv \cdot \chi_{\overline{\gamma_i}}(t).$$

Непосредственная проверка показывает, что $r_i = \chi_{\gamma_i} - \chi_{\overline{\gamma_i}}$ ($i = 1, 2, \dots$). Поэтому из двух последних равенств следует:

$$\int_{\gamma_i} (f \circ w_u)(s, t) du - \int_{\overline{\gamma_i}} (f \circ w_u)(s, t) du = \int_0^1 f(s, v) r_i(v) dv \cdot r_i(t).$$

Отсюда и из (7.13) получаем:

$$Q_i f(s) = \int_0^1 f(s, v) r_i(v) dv \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Соотношения (7.9) и (7.12) в итоге позволяют заключить, что $Q = P$. Таким образом, проектор P ограничен, и теорема доказана. $\square$

Комментарии и литературные указания. Введенные здесь определения пространств $\text{Rad } X$ и $X(\ell_2)$ несколько отличаются от используемых в монографии [114, Section 2.d.], совпадая с ними в случае сепарабельного X . Достаточность условия $\alpha_X > 0$ для выполнения (7.5) в теореме 7.1 доказана в [114, Proposition 2.d.1], необходимость — в [20]. Тензорное произведение и операторы, порожденные им (см. лемму 7.2) изучались во многих работах, см. в частности, [124, 118, 119, 120, 121, 3, 5, 66, 21, 72]. В том случае, когда коэффициенты ряда в (7.5) — независимые функции, это соотношение выполняется тогда и только тогда, когда с.п. X имеет свойство Круглова [19]. Теорема 7.2 доказана в [20].

§ 8

СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СИСТЕМЕ РАДЕМАХЕРА

Основная цель этого параграфа состоит в сравнении произвольных систем функций (случайных величин) с "модельной" системой Радемахера. Чтобы прояснить смысл слова "сравнение", введем следующие определения.

Определение 8.1. Будем говорить, что система с.в. $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *мажорируется по распределению* системой с.в. $\{g_i\}_{i=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega', \Sigma', \mathbb{P}')$ (пишем: $\{f_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{g_i\}$), если существует такое $C > 0$, что для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $z > 0$

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega)\right| > z\right\} \leq C \mathbb{P}'\left\{\omega' \in \Omega' : \left|\sum_{i=1}^m a_i g_i(\omega')\right| > C^{-1} z\right\}.$$

Определение 8.2. Системы с.в. $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ будем называть *эквивалентными по распределению* (пишем: $\{f_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{g_i\}$), если одновременно $\{f_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{g_i\}$ и $\{g_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{f_i\}$. Иначе говоря, $\{f_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{g_i\}$, если существует такое $C > 0$, что для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $z > 0$

$$\begin{aligned} C^{-1} \mathbb{P} \left\{ \omega \in \Omega : \left| \sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega) \right| > Cz \right\} &\leq \mathbb{P}' \left\{ \omega' \in \Omega' : \left| \sum_{i=1}^m a_i g_i(\omega') \right| > z \right\} \leq \\ &\leq C \mathbb{P} \left\{ \omega \in \Omega : \left| \sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega) \right| > C^{-1} z \right\}. \end{aligned}$$

Поставим перед собой задачу найти условия, при которых общая система с.в. мажорируется системой Радемахера, рассматриваемой на $[0, 1]$, или эквивалентна ей. Важным средством при изучении этого вопроса будет понятие $\mathcal{K}$ -функционала Петре элемента $x \in E_0 + E_1$ относительно банаховой пары (E_0, E_1) . В частности, как и ранее, используется обозначение:

$$\kappa_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2),$$

где $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$, а $t > 0$.

Сначала мы рассмотрим свойство мажорируемости и докажем, что для равномерно ограниченных систем соотношение $\{f_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{r_i\}$ эквивалентно следующему условию "сильной" суммируемости рядов по системе $\{f_i\}_{i=1}^\infty$: если последовательность коэффициентов $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$, то функция

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^\infty a_i f_i(\omega) \in L_{N_2}(\Omega),$$

где L_{N_2} — пространство Орлича, построенное по функции $N_2(t) = e^{t^2} - 1$.

Напомним, что по теореме 4.1 суммы Радемахера

$$x(t) = \sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t), \quad \text{где } a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2, \quad (8.1)$$

удовлетворяют соотношению:

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \asymp \kappa_a(t) \quad (t > 0),$$

где G — замыкание L_∞ в пространстве Орлича L_{N_2} . Получим аналогичное соотношение для $\mathcal{K}$ -функционала пары (L_p, L_∞) ($1 \leq p < \infty$).

Предложение 8.1. Если $1 \leq p < \infty$, то с константами, не зависящими от $a = (a_i)_{i=1}^\infty$ и от $0 < u \leq 1$, для функций $x(t)$ вида (8.1) выполнено соотношение:

$$\mathcal{K}(u, x; L_p, L_\infty) \asymp u \cdot \kappa_a(\ln^{1/2} e/u). \quad (8.2)$$

Доказательство. Прежде всего, напомним, что по следствию 2.2

$$x^*(u) \leq C_1 \kappa_a(\ln^{1/2} e/u) \quad (0 < u \leq 1)$$

и

$$x^*(\beta u) \geq C_2^{-1} \kappa_a(\ln^{1/2} e/u) \quad (0 < u \leq 1),$$

где $\beta \in (0, 1)$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Отсюда сразу следует, что с константами, зависящими лишь от p ,

$$\int_0^u x^*(s)^p ds \asymp \int_0^u \kappa_a(\ln^{1/2} e/s)^p ds \quad (0 < u \leq 1). \quad (8.3)$$

Покажем, что

$$\int_0^u \kappa_a(\ln^{1/2} e/s)^p ds \asymp u \cdot \kappa_a(\ln^{1/2} e/u)^p \quad (0 < u \leq 1). \quad (8.4)$$

Пусть сначала $u = e^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ввиду вогнутости $\kappa_a(t)$

$$\int_0^{e^{-k}} \kappa_a(\ln^{1/2} e/s)^p ds = \sum_{i=k}^\infty \int_{e^{-i-1}}^{e^{-i}} \kappa_a(\ln^{1/2} e/s)^p ds \asymp \sum_{i=k}^\infty \kappa_a(i^{1/2})^p e^{-i}.$$

С одной стороны, ясно, что последняя сумма больше, чем $\kappa_a(k^{1/2})^p e^{-k}$. С другой, опять же из-за вогнутости $\kappa_a(t)$ она меньше, чем

$$\frac{\kappa_a(k^{1/2})^p}{k^{p/2}} \sum_{i=k}^{\infty} i^{p/2} e^{-i} \leq e \frac{\kappa_a(k^{1/2})^p}{k^{p/2}} \int_k^{\infty} x^{p/2} \cdot e^{-x} dx.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_k^{\infty} x^{p/2} \cdot e^{-x} dx &= k^{p/2} e^{-k} + \frac{p}{2} \int_k^{\infty} x^{p/2-1} \cdot e^{-x} dx \\ &\leq k^{p/2} e^{-k} + \frac{p}{2k} \int_k^{\infty} x^{p/2} \cdot e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Тем самым для $k > p/2$

$$k^{p/2} e^{-k} < \int_k^{\infty} x^{p/2} \cdot e^{-x} dx \leq \frac{2k}{2k-p} k^{p/2} e^{-k},$$

откуда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-p/2} e^k \int_k^{\infty} x^{p/2} \cdot e^{-x} dx = 1.$$

Поэтому ввиду предыдущего

$$\sum_{i=k}^{\infty} \kappa_a(i^{1/2})^p e^{-i} \leq C \cdot \kappa_a(k^{1/2})^p e^{-k},$$

где $C > 0$ зависит только от p . Тем самым соотношение (8.4) выполнено для $u = e^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Если $u \in (0, 1]$ произвольно, то выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $e^{-k} < u \leq e^{-k+1}$. Тогда, учитывая опять вогнутость функции $\kappa_a(t)$ и пользуясь уже рассмотренным случаем, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^u \kappa_a(\ln^{1/2} e/s)^p ds &\asymp \int_0^{e^{-k}} \kappa_a(\ln^{1/2} e/s)^p ds \\ &\asymp e^{-k} \kappa_a(\ln^{1/2}(e^{k+1}))^p \\ &\asymp u \kappa_a(\ln^{1/2} e/u)^p, \end{aligned}$$

и тем самым соотношение (8.4) доказано.

Как известно (см. § 0.5 или подробнее [26, теорема 5.2.1]), $\mathcal{K}$ -функционал, соответствующий банаховой паре (L_p, L_∞) , определяется соотношением:

$$\mathcal{K}(u, x; L_p, L_\infty) \asymp \left(\int_0^{u^p} x^*(s)^p ds \right)^{1/p}.$$

Поэтому, используя (8.3) и (8.4), а также в очередной раз вогнутость функции $\kappa_a(t)$, получаем (8.2), и предложение доказано. $\square$

Применяя только что доказанное утверждение в случае $p = 1$ вместе с формулой для $\mathcal{K}$ -функционала $\kappa_a(t)$ из леммы 2.2, получаем

Следствие 8.1. *С константой, не зависящей от $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$ и $0 < u \leq 1$,*

$$\int_0^u \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(t) \right)^* dt \asymp u \left\{ \sum_{i=1}^{[\ln e/u]} a_i^* + \ln^{1/2} e/u \left[\sum_{i=[\ln e/u]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Замечание 8.1. Соотношение (8.2) можно распространить на все значения $u > 0$. Действительно, ввиду определения $\mathcal{K}$ -функционала, неравенств: $\|x\|_p \leq \|x\|_\infty$ и $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$, а также теоремы 1.4 для произвольной суммы $x(t)$ вида (8.1) и $u \geq 1$ имеем:

$$\mathcal{K}(u, x; L_p, L_\infty) \asymp \|x\|_p \asymp \|a\|_2 \asymp u \cdot \kappa_a(1/u) \asymp u \kappa_a(\ln^{1/2}(1 + 1/u^2))$$

(константы второй из эквивалентностей зависят от p). Объединяя это с соотношением (8.2), получаем:

$$\mathcal{K}(u, x; L_p, L_\infty) \asymp u \kappa_a(\ln^{1/2}(1 + 1/u^2)) \quad (u > 0). \quad (8.5)$$

Кроме того, так как для произвольной банаховой пары (E_0, E_1)

$$\mathcal{K}(u, x; E_0, E_1) = u\mathcal{K}(1/u, x; E_1, E_0) \quad (u > 0),$$

то из (8.5) следует:

$$\mathcal{K}(u, x; L_\infty, L_p) \asymp \kappa_a(\ln^{1/2}(1+u^2)) \quad (u > 0). \quad (8.6)$$

При этом константы эквивалентностей (8.5) и (8.6) зависят только от p .

В доказательстве двух следующих теорем существенную роль будут играть свойства функции $\kappa_a(t)$ из следствия 2.1. Обозначим также $\bar{\kappa}_a(t) := \kappa_a(\sqrt{t})$.

Теорема 8.1. *Для произвольной системы с.в. $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует $C > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_i)_{i=1}^m$ и $t \in [0, 1]$, такое, что*

$$\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m a_i f_i \right)^*(s) ds \leq C t \mathcal{K}(\ln^{1/2} e/t, a; \ell_1, \ell_2); \quad (8.7)$$

(b) *существует $B > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_i)_{i=1}^m$ и $p \geq 1$, такое, что*

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_p \leq B \mathcal{K}(\sqrt{p}, a; \ell_1, \ell_2); \quad (8.8)$$

(c) $\{f_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{r_i\}$.

Кроме того, если система $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ равномерно ограничена, т.е. $|f_i(\omega)| \leq D$, $\omega \in \Omega, i = 1, 2, \dots$, то каждое из условий (a) — (c) эквивалентно следующему:

(d) *для произвольной последовательности $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$ функция $f = \sum_{i=1}^\infty a_i f_i$ принадлежит пространству Орлица L_{N_2} .*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Ввиду предложения 8.1 и формулы для $\mathcal{K}$ -функционала в банаховой паре (L_1, L_∞) (см. § 0.5) соотношение (8.7) можно переписать в виде

$$\mathcal{K}\left(u, \sum_{i=1}^m a_i f_i; L_1, L_\infty\right) \leq C' \mathcal{K}\left(u, \sum_{i=1}^m a_i r_i; L_1, L_\infty\right) \quad (0 < u \leq 1). \quad (8.9)$$

Так как L_p ($1 \leq p \leq \infty$) интерполяционно относительно $\mathcal{K}$ -монотонной пары (L_1, L_∞) (см. [46, § 2.4] или [26]), то соотношение (8.8) — непосредственное следствие последнего неравенства и теоремы 2.1.

(b) $\Rightarrow$ (c). Прежде всего, $\bar{\kappa}_a(t) = \mathcal{K}(\sqrt{t}, a; \ell_1, \ell_2)$ ($t \geq 1$). Поэтому, если $f = \sum_{i=1}^m a_i f_i$, то ввиду неравенства Чебышева и соотношения (8.8)

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq \lambda \bar{\kappa}_a(t)\} \leq \lambda^{-t} \left[\frac{\|f\|_t}{\bar{\kappa}_a(t)} \right]^t \leq \left(\frac{B}{\lambda} \right)^t$$

для произвольных $t \geq 1$ и $\lambda > 0$. В частности, если $\lambda = Be$, то

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq Be \bar{\kappa}_a(t)\} \leq e^{-t} \quad (t \geq 1)$$

или

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq Be \bar{\kappa}_a(t)\} \leq e^{1-t} \quad (t > 0). \quad (8.10)$$

Далее, для произвольного $z > 0$ по следствию 2.1 найдем такое $t' > 0$, что $0 < \bar{\kappa}_a(t') \leq (Be)^{-1} z$. Тогда из (8.10) следует:

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} \leq \mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq Be \bar{\kappa}_a(t')\} \leq e^{1-t'},$$

и, значит, если

$$F(s) = \sup\{t > 0 : \bar{\kappa}_a(t) \leq s\} \quad (s > 0), \quad (8.11)$$

то

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} \leq e^{1-F(C_1^{-1}z)} \quad (z > 0), \quad (8.12)$$

где $C_1 = Be$. Заметим также, что из (8.8) и формулы Хольмстедта (2.8) следует:

$$\|f_n\|_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f_n\|_t \leq B \quad (n \in \mathbb{N}),$$

и поэтому $\|f\|_\infty \leq B\|a\|_1$. Таким образом,

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} = 0, \text{ если } z \geq B\|a\|_1. \quad (8.13)$$

Напомним, что по теореме 2.1 с некоторой константой $0 < \gamma < 1$, не зависящей от $t \in [1, \infty)$ и $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$,

$$\gamma \bar{\kappa}_a(t) \leq \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t \leq \bar{\kappa}_a(t). \quad (8.14)$$

Если теперь $r(x) = \sum_{n=1}^m a_n r_n(x)$ ($0 \leq x \leq 1$), то ввиду неравенства Пэли-Зигмунда (2.15) для всех $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|r(x)| \geq \frac{\gamma}{2} \bar{\kappa}_a(t)\} &\geq m\{|r(x)|^t \geq 2^{-t} \|r\|_t^t\} \geq \\ &\geq (1 - 2^{-t})^2 \frac{\|r\|_t^{2t}}{\|r\|_{2t}^{2t}} \geq \gamma^{2t} (1 - 2^{-t})^2 \left\{ \frac{\bar{\kappa}_a(t)}{\bar{\kappa}_a(2t)} \right\}^{2t} \geq \left(\frac{\gamma}{4} \right)^{2t}, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве используется вогнутость $\mathcal{K}$ -функционала, а также то, что $1 - 2^{-t} \leq 2^{-t}$ ($t \geq 1$). Так как $\bar{\kappa}_a(t)$ возрастает по t , то отсюда

$$m\{|r(x)| \geq \frac{\gamma}{2} \bar{\kappa}_a(t)\} \geq \left(\frac{\gamma}{4} \right)^{2t+2}$$

уже для всех $t > 0$. Если $0 < z < \gamma\|a\|_1/16$, то, еще раз применяя следствие 2.1, найдем такое $t'' > 0$, что $\bar{\kappa}_a(t'') \geq 4z\gamma^{-1}$. Тогда из предыдущего неравенства следует:

$$m\{|r(x)| > z\} \geq m\{|r(x)| \geq \frac{\gamma}{2} \bar{\kappa}_a(t'')\} \geq \left(\frac{\gamma}{4} \right)^{2t''+2}.$$

Значит, если

$$G(s) = \inf\{t > 0 : \bar{\kappa}_a(t) \geq s\} \quad (s > 0),$$

то

$$m\{|r(x)| > z\} \geq \left(\frac{\gamma}{4} \right)^{2G(4z\gamma^{-1})+2},$$

откуда

$$m\{|r(x)| > z\} \geq C_2^{-1} e^{-C_3 G(4z\gamma^{-1})}, \text{ если } 0 < z < \frac{\gamma}{16} \|a\|_1, \quad (8.15)$$

где $C_2 = (4/\gamma)^2$, $C_3 = 2 \ln(4/\gamma)$.

Легко видеть, что $F(s) \leq G(s)$ ($s > 0$), где, напомним, функционал $F(s)$ определяется посредством (8.11). Покажем, что одновременно для $C_4 = 4(2C_3)^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1}$ выполнено:

$$C_3 G(4z\gamma^{-1}) \leq F(C_4 z) \quad (z > 0).$$

Действительно, ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала, определений $G(s)$ и $\bar{\kappa}_a(t)$, а также того, что $C_3 \geq 1$, получаем

$$\bar{\kappa}_a(C_3 G(4z\gamma^{-1})) \leq (2C_3)^{\frac{1}{2}} \bar{\kappa}_a(2^{-1} G(4z\gamma^{-1})) \leq 4(2C_3)^{\frac{1}{2}} \gamma^{-1} z = C_4 z,$$

и остается воспользоваться определением $F(s)$. Таким образом, (8.15) можно переписать в виде:

$$m\{|r(x)| > z\} \geq C_2^{-1} e^{-F(C_4 z)}, \text{ если } 0 < z < \frac{\gamma}{16} \|a\|_1. \quad (8.16)$$

Пусть далее

$$A := \max\left(C_2 e, C_1 C_4, \frac{16B}{\gamma}\right). \quad (8.17)$$

Заметим, что ввиду универсальности константы γ зависимость A от системы $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ исчерпывается лишь ее зависимостью от B , константы соотношения (8.8).

Если $z/A < \gamma\|a\|_1/16$, то из (8.12), (8.16) и (8.17), а также возрастания $F(s)$ следует:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} &\leq e^{1-F(C_1^{-1}z)} \leq e^{1-F(C_4 z/A)} \\ &\leq C_2 e m\{|r(x)| > z/A\} \\ &\leq A m\{|r(x)| > z/A\}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

В случае, когда $z/A \geq \gamma\|a\|_1/16$, из (8.17) получаем: $z \geq B\|a\|_1$. Значит, ввиду (8.13) $\mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} = 0$, и (8.18) снова выполнено. Неравенство (8.18) означает, что $\{f_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{r_n\}$, и импликация (b) $\Rightarrow$ (c) доказана.

(c) $\Rightarrow$ (a). По условию

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega)\right| > z\right\} \leq Cm \left\{x \in [0, 1] : \left|\sum_{i=1}^m a_i r_i(x)\right| > C^{-1}z\right\} \quad (z > 0).$$

Отсюда ввиду ограниченности оператора растяжения в с.п. мы сразу получаем неравенство (8.9), а значит, и эквивалентное ему неравенство (8.7). Таким образом, доказательство эквивалентности условий (a) — (c) закончено.

(c) $\Rightarrow$ (d). По теореме 3.1 функция $r(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(x) \in L_{N_2}$, если $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$. Так как по условию для функции $f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(\omega)$ выполнено: $n_{|f|}(z) \leq Cn_{|r|}(z/C)$ ($z > 0$), то ввиду симметричности пространства L_{N_2} мы получаем, что $f \in L_{N_2}$, и (d) доказано. Заметим, что равномерная ограниченность функций системы $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ здесь нами не использовалась (на самом деле, она является следствием условия (c)).

(d) $\Rightarrow$ (a). Прежде всего, проверим, что линейный оператор $T(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ ограниченно действует из ℓ_2 в L_{N_2} . Рассмотрим соответствующий максимальный оператор

$$M(a_i)(\omega) = \sup_{n=1,2,\dots} |T_n(a_i)(\omega)|, \quad \text{где } T_n(a_i)(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\omega).$$

Очевидно, что каждый из операторов T_n линеен и ограничен из ℓ_2 в пространство $S = S(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ всех измеримых конечных почти всюду функций на Ω , которое рассматривается с топологией сходимости по вероятности $\mathbb{P}$. Кроме того, по условию $M(a_i)(\omega) < \infty$ п. в. на Ω для любой последовательности $(a_i) \in \ell_2$. Следовательно, по теореме Банаха о непрерывности максимального оператора [64, Theorem 2.7] M ограниченно действует из ℓ_2 в S . Тем более, этим свойством обладает оператор T . Осталось применить теорему о замкнутом графике. Пусть $(a_i^m) \rightarrow (a_i)$ в ℓ_2 и $T(a_i^m) \rightarrow g$ в L_{N_2} при $m \rightarrow \infty$. Так как L_{N_2} непрерывно вложено в S , то $T(a_i^m) \rightarrow g$ также и в S . С другой стороны, по-доказанному, $T(a_i^m) \rightarrow T(a_i)$ в S . Тем самым $g = T(a_i)$, и по теореме о замкнутом графике оператор T ограничен из ℓ_2 в L_{N_2} .

Напомним, что согласно лемме 3.2 пространство Орлича L_{N_2} совпадает с пространством Марцинкевича $M(\varphi)$, где $\varphi(t) = t \ln^{1/2}(e/t)$. Следовательно, ограниченность T эквивалентна выполнению неравенства

$$\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right)^*(s) ds \leq C_5 t \ln^{1/2}(e/t) \|a\|_2,$$

где $C_5 > 0$ не зависит от $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t \in [0, 1]$. Пусть теперь $a_k^* = |a_{i_k}|$ ($k = 1, 2, \dots$) — невозрастающая перестановка последовательности $(|a_i|)_{i=1}^{\infty}$. Ввиду предыдущего неравенства, а также условий теоремы для произвольного $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{-j}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right)^*(s) ds &\leq \int_0^{e^{-j}} \left(\sum_{k=1}^j a_{i_k} f_{i_k} \right)^*(s) ds + \int_0^{e^{-j}} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} a_{i_k} f_{i_k} \right)^*(s) ds \\ &\leq e^{-j} D \sum_{k=1}^j |a_{i_k}| + C_5 e^{-j} \ln^{1/2}(e^{j+1}) \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} |a_{i_k}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq e^{-j} \max(D, 2C_5) \left\{ \sum_{k=1}^j a_k^* + \sqrt{j} \left[\sum_{k=j+1}^{\infty} (a_k^*)^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &\leq e^{-j} \cdot 4 \max(D, 2C_5) \mathcal{K}(\sqrt{j}, a; \ell_1, \ell_2), \end{aligned}$$

где последнее неравенство является следствием формулы Хольмстедта (2.8).

Таким образом, соотношение (8.7) выполнено для $t = e^{-j}$ ($j \in \mathbb{N}$). Так как рассматриваемые здесь функции вогнуты, то оно справедливо и при всех $t \in [0, 1]$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 8.2. Равномерная ограниченность с.в. f_i ($i = 1, 2, \dots$) в условии (d) существенна. Действительно, рассмотрим систему функций $f_i(t) = \ln^{1/2} e/t \cdot \chi_{[2^{-i}, 2^{-i+1})}(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) на $[0, 1]$. Для произвольной последовательности $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_{L_{N_2}} \leq \|\ln^{1/2} e/t\|_{L_{N_2}} \cdot \|a\|_2 = C\|a\|_2,$$

т.е. $\sum_{i=1}^\infty a_i f_i \in L_{N_2}$. Тем не менее, конечно, $\{f_i\} \not\stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_i\}$.

Следующей нашей задачей будет нахождение условий, при которых произвольная последовательность с.в. эквивалентна по распределению системе Радемахера. В дальнейшем это поможет нам, с одной стороны, получить содержательные примеры таких систем $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, что $\{f_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}$, с другой, найти необходимые и достаточные условия, при которых из последовательности с.в. можно выделить подпоследовательность, эквивалентную по распределению системе Радемахера.

Теорема 8.2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\{f_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}$;

2) с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, \dots, m$),

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t \asymp \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t;$$

3) с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ и $a = (a_n)_{n=1}^m$,

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t \asymp \mathcal{K}(\sqrt{t}, a; \ell_1, \ell_2).$$

Доказательство. Прежде всего, ввиду (8.14) эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 3) очевидна, а импликация 1) $\Rightarrow$ 2) — непосредственное следствие определения эквивалентности систем по распределению. Таким образом, остается доказать лишь импликацию 3) $\Rightarrow$ 1).

Используя прежние обозначения, перепишем условие следующим образом:

$$B^{-1} \bar{\kappa}_a(t) \leq \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t \leq B \bar{\kappa}_a(t), \quad (8.19)$$

где $B > 0$ не зависит от $t \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ и $a = (a_n)_{n=1}^m$. Заметим также, что ввиду предыдущей теоремы нам нужно показать только то, что $\{r_i\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{f_i\}$.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$f(\omega) = \sum_{n=1}^m a_n f_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \quad \text{и} \quad r(x) = \sum_{n=1}^m a_n r_n(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

Используя (8.14) и (8.19) и рассуждая точно так же, как в доказательстве импликации (b) $\Rightarrow$ (c) теоремы 8.1, получаем соотношения:

$$m\{|r(x)| > z\} \leq e^{1-F((C'_1)^{-1}z)}, \quad \text{если } z > 0, \quad (8.20)$$

$$m\{|r(x)| > z\} = 0, \quad \text{если } z \geq \|a\|_1, \quad (8.21)$$

и

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} \geq (C'_2)^{-1} e^{-F(C'_4 z)}, \quad \text{если } 0 < z < (16B)^{-1} \|a\|_1, \quad (8.22)$$

где C'_1 — универсальная константа, а C'_2 и C'_4 зависят лишь от B .

Обозначим

$$A' := \max(C'_2 e, C'_1 C'_4, 16B). \quad (8.23)$$

Заметим, что зависимость константы A' (точно так же, как и A из (8.17)) от системы $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ связана лишь с ее зависимостью от B , константы соотношения (8.19).

Если $0 < z < (16B)^{-1}\|a\|_1$, то ввиду соотношений (8.20), (8.22) и (8.23), а также возрастания функционала $F(s)$

$$\begin{aligned} m\{|r(x)| > A'z\} &\leq e^{1-F((C'_1)^{-1}A'z)} \leq e^{1-F(C'_4z)} \\ &\leq C'_2 e \mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} \leq A' \mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Если же $z \geq (16B)^{-1}\|a\|_1$, то из (8.23) следует: $A'z \geq \|a\|_1$, и поэтому ввиду (8.21) $m\{|r(x)| > A'z\} = 0$. Таким образом, неравенство (8.24) в этом случае также выполнено. В итоге $\{r_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{f_n\}$, и теорема доказана. $\square$

Замечание 8.3. Отметим на будущее, что аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для конечных наборов с.в. При этом доказательство показывает, что константы эквивалентностей из условий 1) – 3) зависят лишь друг от друга. Так, например, если соотношение (8.19) выполнено для наборов $\{f_n\}_{n=1}^N$ с константой, не зависящей от $N = 1, 2, \dots$, то $\{f_n\}_{n=1}^N \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}_{n=1}^N$ с константой, также не зависящей от $N = 1, 2, \dots$

Применим полученные результаты к изучению некоторых конкретных классов систем с.в. Начнем с мультипликативных систем (определение и примеры см. в §0.4). Напомним, что через $\mathbb{E}f$ обозначается математическое ожидание с.в. f , т.е. $\mathbb{E}f = \int_{\Omega} f(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$.

Теорема 8.3. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — мультипликативная, а $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — сильно мультипликативная системы с.в. на вероятностных пространствах $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ и $(\Omega', \Sigma', \mathbb{P}')$ соответственно, такие, что для каждого $i = 1, 2, \dots$ $g_i \neq 0$ и

$$\|f_i\|_{\infty} \cdot \|g_i\|_{\infty} \leq \mathbb{E}(g_i^2). \quad (8.25)$$

Тогда для любых $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ и вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполнено:

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\|_p \leq 2 \left\| \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\|_p. \quad (8.26)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор

$$Tx(\omega) = \int_{\Omega'} K(\omega, \omega') x(\omega') d\mathbb{P}' \quad (\omega \in \Omega)$$

с ядром

$$K(\omega, \omega') = \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i f_i(\omega) g_i(\omega')), \quad (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega',$$

где

$$\alpha_i = \frac{1}{\mathbb{E}g_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Перечислим некоторые свойства ядра $K(\omega, \omega')$. Прежде всего, из (8.25) следует, что

$$K(\omega, \omega') \geq 0 \quad \text{для п.в. } (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'. \quad (8.27)$$

Кроме того, ввиду мультипликативности систем $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\int_{\Omega'} K(\omega, \omega') d\mathbb{P}' = 1 \quad \text{для п.в. } \omega \in \Omega. \quad (8.28)$$

и

$$\int_{\Omega} K(\omega, \omega') d\mathbb{P} = 1 \quad \text{для п.в. } \omega' \in \Omega'. \quad (8.29)$$

Заметим также, что для всех $j = 1, 2, \dots, n$

$$f_j(\omega) = Tg_j(\omega). \quad (8.30)$$

Действительно, так как $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ — сильно мультипликативная система, то, учитывая определение α_j , мы получим

$$\begin{aligned} Tg_j(\omega) &= \int_{\Omega'} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i f_i(\omega) g_i(\omega')) \cdot g_j(\omega') d\mathbb{P}' \\ &= \int_{\Omega'} \left(g_j(\omega') + \alpha_j f_j(\omega) g_j^2(\omega') + g_j(\omega') \sum_{i \neq j} \alpha_i f_i(\omega) g_i(\omega') \right. \\ &\quad \left. + g_j(\omega') \sum_{k=2}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_k} f_{i_1}(\omega) g_{i_1}(\omega') \dots f_{i_k}(\omega) g_{i_k}(\omega') \right) d\mathbb{P}' = f_j(\omega). \end{aligned}$$

Ввиду (8.30) для любых вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\sum_{j=1}^n a_j f_j(\omega) = T \left(\sum_{j=1}^n a_j g_j \right) (\omega). \quad (8.31)$$

Далее, соотношения (8.27) и (8.28) показывают, что оператор T ограничен из $L_\infty(\Omega')$ в $L_\infty(\Omega)$. В самом деле, для всех $x \in L_\infty(\Omega')$

$$|Tx(\omega)| \leq \int_{\Omega} K(\omega, \omega') |x(\omega')| d\mathbb{P}' \leq \int_{\Omega} K(\omega, \omega') d\mathbb{P}' \cdot \|x\|_\infty = \|x\|_\infty,$$

или эквивалентно,

$$\|T\|_{L_\infty(\Omega') \rightarrow L_\infty(\Omega)} \leq 1. \quad (8.32)$$

Покажем теперь, что

$$\|T\|_{L_1(\Omega') \rightarrow L_1(\Omega)} \leq 1. \quad (8.33)$$

Для этого рассмотрим оператор T' , ассоциированный к T , т.е.

$$T'y(t) = \int_{\Omega} K(\omega, \omega') y(\omega) d\mathbb{P}, \quad \omega' \in \Omega'.$$

Используя (8.27) и (8.29) вместо (8.27) и (8.28), точно так же, как и для T , получим, что

$$\|T'\|_{L_\infty(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega')} \leq 1.$$

Таким образом, положительный интегральный оператор T' ограничен из $L_\infty(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega')$. Следовательно, оператор, сопряженный к T' , совпадает с ассоциированным к нему [44, теорема 2.4.5], а значит, с T , который ограничен из $L_1(\Omega')$ в $L_1(\Omega)$. Кроме того,

$$\|T\|_{L_1(\Omega') \rightarrow L_1(\Omega)} = \|T'\|_{L_\infty(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega')},$$

и тем самым ввиду предыдущего соотношения мы получаем (8.33).

По интерполяционной теореме Рисса-Торина (см. § 0.5 или подробнее [26, теорема 1.1.1]) любой линейный оператор A , ограниченный из $L_\infty(\Omega')$ в $L_\infty(\Omega)$ и из $L_1(\Omega')$ в $L_1(\Omega)$, ограничен из $L_p(\Omega')$ в $L_p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$), и

$$\|A\|_{L_p(\Omega') \rightarrow L_p(\Omega)} \leq 2 \max \left(\|A\|_{L_\infty(\Omega') \rightarrow L_\infty(\Omega)}, \|A\|_{L_1(\Omega') \rightarrow L_1(\Omega)} \right).$$

Поэтому неравенство (8.26) является следствием соотношений (8.31) — (8.33), и теорема доказана. $\square$

Из теорем 8.1 — 8.3 вытекает следующий результат.

Теорема 8.4. *Предположим, что мультипликативная система с.в. $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, равномерно ограничена, т.е.*

$$|\varphi_n(\omega)| \leq D \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots \text{ и } \omega \in \Omega. \quad (8.34)$$

Тогда $\{\varphi_n\} \prec^{\mathbb{P}} \{r_n\}$ с константой, зависящей только от D .

Если дополнительно $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ сильно мультипликативна и

$$d := \inf_{n=1,2,\dots} \mathbb{E}(\varphi_n^2) > 0, \quad (8.35)$$

то $\{\varphi_n\} \sim^{\mathbb{P}} \{r_n\}$, причем константа этой эквивалентности зависит только от D и d .

Доказательство. Прежде всего, напомним, что система Радемахера сильно мультипликативна (см. следствие 1.2).

Если $\{\varphi_n\}$ мультипликативна и равномерно ограничена константой D , то условие (8.25) теоремы 8.3 выполнено для систем с.в. $f_n = \varphi_n/D$ и $g_n = r_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому, применяя неравенство (8.26), получим, что при всех $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$)

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n \varphi_n \right\|_p \leq 2D \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_p.$$

В итоге теорема 8.1 вместе с теоремой 2.1 дает нам первое утверждение.

Предположим, что, более того, $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ сильно мультипликативна и удовлетворяет условию (8.35). Тогда (8.25) выполняется также для с.в. $f_n = (d/D)r_n$ и $g_n = \varphi_n$. Тем самым опять по теореме 8.3 мы получаем неравенство, противоположное к предыдущему, т.е.

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_p \leq \frac{2D}{d} \left\| \sum_{n=1}^m a_n \varphi_n \right\|_p.$$

Для завершения доказательства осталось применить теперь уже теорему 8.2. $\square$

Из последней теоремы и определения симметричного пространства вытекает

Следствие 8.2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — мультипликативная система с.в. на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, удовлетворяющая условию (8.34). Тогда для любого с.п. X на $[0, 1]$, всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольных вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполнено:

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|_X \leq C \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_X,$$

где $C > 0$ зависит лишь от D .

Если дополнительно $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ сильно мультипликативна и имеет место (8.35), то, более того, для любого с.п. X на $[0, 1]$, всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольных вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|_X \asymp \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_X,$$

причем константа эквивалентности зависит только от D и d .

В частном случае независимых функций (см. пример 0.2) получаем следующее утверждение.

Следствие 8.3. Всякая последовательность независимых с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $\mathbb{E}(f_n) = 0$, удовлетворяющая условиям (8.34) и (8.35), эквивалентна по распределению системе Радемахера.

Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию. Пусть G — компактная абелева группа с вероятностной мерой Хаара μ , Γ — группа характеров, определенных на G , $C(G)$ — пространство непрерывных комплекснозначных функций на G . В соответствии с приведенным в § 0.4 определением множество $F \subset \Gamma$ называют множеством Сидона, если при некотором $C_F > 0$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)| \leq C_F \|f\|_\infty$$

для всякой $f \in C(G)$, такой, что

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(s) \gamma(-s) d\mu = 0, \text{ если } \gamma \notin F.$$

Докажем следующее утверждение, в определенном смысле аналогичное теореме 8.3.

Теорема 8.5. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ — две компактные абелевы группы с вероятностными мерами Хаара μ и ν соответственно. Предположим, что $(f_j)_{j=1}^\infty$ — последовательность характеров на

$\mathcal{S}$, а $(g_j)_{j=1}^\infty$ — последовательность характеров на $\mathcal{T}$, удовлетворяющие условию: существуют такие константы $C > 0$ и $c > 0$, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и комплексных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$c \cdot \sup_{t \in \mathcal{T}} \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \right| \leq \sup_{s \in \mathcal{S}} \left| \sum_{i=1}^n a_i g_i(s) \right| \leq C \cdot \sup_{t \in \mathcal{T}} \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \right|. \quad (8.36)$$

Тогда для любых $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ и комплексных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполнено:

$$\frac{c}{C} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\|_p \leq \frac{C}{c} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\|_p. \quad (8.37)$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что ввиду соотношения (8.36) отображение U такое, что $Uf_j = g_j$ ($j = 1, 2, \dots$) продолжается до изоморфизма замкнутой линейной оболочки $[f_j]$, рассматриваемой с нормой из $C(\mathcal{S})$, на замкнутую линейную оболочку $[g_j]$ с нормой из $C(\mathcal{T})$. При этом $\|U\| \leq C$, а $\|U^{-1}\| \leq c^{-1}$.

Для фиксированного $t \in \mathcal{T}$ через δ_t обозначим меру Дирака, порожденную точкой t , а через φ_t^* — сужение δ_t на $[g_j]$. Очевидно, φ_t^* — линейный ограниченный функционал на $[g_j]$, причем $\|\varphi_t^*\| \leq 1$. Кроме того, для каждого $j = 1, 2, \dots$

$$g_j(t) = \varphi_t^*(g_j) = \varphi_t^*(Uf_j) = (U^* \varphi_t^*)(f_j). \quad (8.38)$$

Пусть μ_t — комплексная борелевская мера на $\mathcal{S}$, которая по теореме представления Рисса порождает продолжение линейного функционала $U^* \varphi_t^*$ на пространство $C(\mathcal{S})$, существующее согласно теореме Хана-Банаха. Определим также меры μ'_t и $\bar{\mu}_t$ на борелевских множествах $V \subset \mathcal{S}$:

$$\mu'_t(V) = \mu_t(-V); \quad \bar{\mu}_t(V) = \overline{\mu_t(V)}.$$

Заметим, что полные вариации мер μ'_t и $\bar{\mu}_t$ удовлетворяют оценке:

$$\|\bar{\mu}_t\| = \|\mu'_t\| = \|\mu_t\| \leq \|U^*\| = \|U\| \leq C. \quad (8.39)$$

Кроме того, ввиду (8.38) коэффициенты Фурье этих мер, соответствующие характерам f_j ($j = 1, 2, \dots$), определяются равенствами:

$$\hat{\mu}'_t(f_j) = \int_{\mathcal{S}} f_j(-s) d\mu'_t = \int_{\mathcal{S}} f_j(s) d\mu_t = g_j(t) \quad (8.40)$$

и

$$\hat{\bar{\mu}}_t(f_j) = \int_{\mathcal{S}} f_j(-s) d\bar{\mu}_t = \int_{\mathcal{S}} \overline{f_j(s)} d\bar{\mu}_t = \overline{g_j(t)} = g_j(-t). \quad (8.41)$$

Для произвольных комплексных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $t \in \mathcal{T}$ определим

$$f(s) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(s) \quad \text{и} \quad f_t(s) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(t) f_i(s) \quad (s \in \mathcal{S}).$$

Тогда, если $f * \mu$ — свертка меры μ с функцией f , т.е.

$$(f * \mu)(s) = \int_{\mathcal{S}} f(s - \sigma) d\mu(\sigma) \quad (s \in \mathcal{S}),$$

то сравнение коэффициентов Фурье с учетом соотношений (8.40) и (8.41) приводит к равенствам:

$$f * \mu'_t = f_t \quad \text{и} \quad f_t * \bar{\mu}_t = f.$$

Таким образом, ввиду хорошо известного неравенства Юнга и соотношений (8.39)

$$\|f_t\|_p \leq \|\mu'_t\| \|f\|_p \leq \|U\| \cdot \|f\|_p \leq C \|f\|_p \quad \text{и} \quad \|f\|_p \leq \|\bar{\mu}_t\| \|f_t\|_p \leq \|U\| \cdot \|f_t\|_p \leq C \|f_t\|_p,$$

где, как обычно, $\|f\|_p = (\int_{\mathcal{S}} |f|^p d\mu)^{1/p}$. Интегрируя последние неравенства по мере ν на $\mathcal{T}$ и применяя теорему Фубини, мы получаем:

$$C^{-1} \cdot \|f\|_p \leq \left(\int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{T}} \left| \sum_{j=1}^n a_j f_j(s) g_j(t) \right|^p d\nu d\mu \right)^{1/p} \leq C \cdot \|f\|_p.$$

Совершенно аналогично, меняя местами последовательности $\{f_j\}$ и $\{g_j\}$, находим, что для $g(t) = \sum_{j=1}^n a_j g_j(t)$ выполнено соотношение:

$$c \cdot \|g\|_p \leq \left(\int_S \int_T \left| \sum_{j=1}^n a_j f_j(s) g_j(t) \right|^p d\nu d\mu \right)^{1/p} \leq c^{-1} \cdot \|g\|_p.$$

Так как соотношение (8.37) является непосредственным следствием двух последних неравенств, то теорема доказана. $\square$

Хорошо известно (см. комментарии к §1), что систему Радемахера (точнее, эквивалентную ей по распределению) можно рассматривать как последовательность характеров, определенных на компактной абелевой группе Кантора $\mathcal{K} := \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, легко проверить (см. замечание 1.5), что для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и комплексных $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполнено соотношение

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(s) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Поэтому мы получаем

Следствие 8.4. Если $F = \{\gamma_n\} \subset \Gamma$ – множество Сидона, то с константой, зависящей только от константы Сидона C_F ,

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n \gamma_n \right\|_p \asymp \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_p \quad (p \geq 1).$$

Следующий результат является непосредственным следствием последнего утверждения и теоремы 8.2.

Теорема 8.6. Всякая бесконечная система Сидона характеров $F = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на компактной абелевой группе, эквивалентна по распределению системе Радемахера. Константа эквивалентности при этом зависит лишь от константы Сидона C_F .

Так как при условии $k_{n+1}/k_n \geq \lambda > 1$ последовательность $\{e^{ik_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ является системой Сидона характеров на торе $\mathbb{T}$ [135], то последний результат верен как для нее, так и для ее вещественного варианта, т.е. лакунарной тригонометрической системы (см. пример 0.1).

Следствие 8.5. Последовательности $f_n(x) = \sin(2\pi k_n x)$ и $g_n(x) = \cos(2\pi k_n x)$, $0 \leq x \leq 1$, при условии $k_{n+1}/k_n \geq \lambda > 1$ эквивалентны по распределению системе Радемахера.

Комментарии и литературные указания. Понятие мажорирования (или доминирования) по распределению и различные результаты о сравнении сумм независимых случайных величин см. в [31, § 5.4] и [111, Chapter 3]. Вероятно, наиболее важным вопросом в этой области является следующий: когда из оценок по распределению для индивидуальных слагаемых вытекает аналогичная оценка для их сумм. Сформулируем один из наиболее известных и важных результатов (теорема Квапеня-Рыхлика) [31, теорема 5.4.4]. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — две последовательности независимых симметричных случайных величин, такие, что

$$\mathbb{P}\{|g_i(\omega)| > r\} \leq C \mathbb{P}\{\alpha |f_i(\omega)| > r\}$$

для некоторых $C > 0$, $\alpha > 0$ и всех $r > 0$ и $i \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$, произвольных вещественных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $r > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i g_i(\omega) \right| > r \right\} \leq 2C \mathbb{P}\left\{ C\alpha \left| \sum_{i=1}^n x_i f_i(\omega) \right| > r \right\}.$$

Заметим, что последнее утверждение (разумеется, с заменой в последнем неравенстве модуля на норму) верно и в том случае, когда коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат произвольному банаховому пространству. Предложение 8.1 и теорема 8.1 (без пункта (b)) были доказаны в работе автора [11]. Теорема 8.2, а также сама идея сведения задачи об эквивалентности по распределению произвольной системы и системы Радемахера к сравнению L_p -норм полиномов по этим

системам содержатся в другой работе автора [13]. Теорема 8.3 принадлежит Я. Якубовскому и С. Квапеню [104]. Здесь мы приводим, на наш взгляд, более непосредственное доказательство, отличное от оригинального. Теорема 8.4, а также следствия 8.2 и 8.3 взяты также из работы автора [13]. Теорема 8.5 о сравнении систем характеров на компактной абелевой группе была доказана А. Пелчинским [127]. Следствие 8.4, получающееся из теоремы 8.5, если в качестве одной из систем взять систему Радемахера, было ранее иным способом доказано Ж. Пизье [128, Théorème 2.1]. Теорема 8.6, являющаяся здесь непосредственным следствием теоремы Пелчинского и теоремы 8.2, иным образом (опираясь на упомянутую теорему Пизье) была доказана Н. Асмар и С. Монтгомери-Смитом [65, Theorem 1.3]. Последнее утверждение параграфа — следствие 8.5 — можно рассматривать как определенный итог достаточно длительных предыдущих исследований. Именно аналогия в поведении рядов Радемахера и лакунарных тригонометрических рядов послужила исходным пунктом для выявления более глубоких связей между ними, приведя в результате к изучению систем, эквивалентных по распределению "модельной" системе Радемахера. После того, как в конце 70-ых — начале 80-ых годов прошлого столетия стало ясно, что нормы полиномов по системе Радемахера и лакунарных тригонометрических полиномов эквивалентны в L_p -пространствах, достаточно большое количество работ и докладов на конференциях было посвящено перенесению этих результатов на те или иные классы с.п. Достаточно показательна в этой связи заметка А. С. Белова и В. А. Родина [25]. В ней авторы, используя теорему 8.3, переносят результаты работы [133] о рядах Радемахера на лакунарные тригонометрические ряды. При этом они вынуждены в ряде случаев требовать, чтобы соответствующие с.п. удовлетворяли некоторым дополнительным условиям, например, были интерполяционными относительно пары (L_1, L_∞) . Следствие 8.5 показывает, что в действительности эквивалентность норм полиномов по системе Радемахера и лакунарных тригонометрических полиномов имеет место во всех с.п. без исключения, являясь следствием более фундаментального факта: эквивалентности этих систем функций по распределению.

§ 9

ВЫДЕЛЕНИЕ ЛАКУНАРНЫХ ПОДСИСТЕМ

Основная цель этого параграфа состоит в нахождении условий, при которых последовательность случайных величин, заданных на произвольном вероятностном пространстве, содержит подпоследовательность, эквивалентную по распределению системе Радемахера, рассматриваемой, как обычно, на отрезке $[0, 1]$. Мы увидим, что в случае равномерно ограниченных систем они фактически будут повторять условия классических теорем о выделении подсистем Сидона и S_∞ -подсистем (см. § 0.4, а также комментарии в конце этого параграфа). Тем самым, так как вместе с системой Радемахера этими свойствами обладает также и последовательность, эквивалентная ей по распределению, полученные здесь результаты являются развитием и усилением классических. Отметим также то важное обстоятельство, что эквивалентность по распределению системе Радемахера является в определенном смысле наилучшей возможной лакунарностью, которая может быть достигнута за счет прореживания последовательности. В этом параграфе нас будет интересовать также и количественная сторона этого явления, т.е. плотность лакунарных в том же самом смысле подсистем, которые можно выделить из конечных наборов измеримых функций.

Сформулируем одно из основных утверждений этого параграфа.

Теорема 9.1. *Для того, чтобы из системы с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, можно было выделить подсистему $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентную по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$, необходимо и достаточно существование подпоследовательности $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, удовлетворяющей условиям:*

- (1) $|f_{n_k}(\omega)| \leq D$ ($k = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$);
- (2) $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 ;
- (3) $d = \inf_{k=1,2,\dots} \|f_{n_k}\|_2 > 0$.

При этом константа эквивалентности зависит лишь от D и d .

"Трудной" частью доказательства этой теоремы является доказательство достаточности условий (1) — (3) для существования подсистемы $\{\varphi_k\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_k\}$. Мы проведем его в два этапа: сначала покажем, что условия теоремы позволяют выделить подпоследовательность $\{\varphi_k\} \subset \{f_n\}$, которая мажорируется по распределению системой Радемахера, а затем докажем противоположное утверждение о том, что, наоборот, существует подсистема, мажорирующая ее. Начнем со вспомогательного утверждения, в котором через $\mathbb{E}[f|g_1, \dots, g_n]$ будет обозначаться условное математическое ожидание с.в. f относительно σ -подалгебра σ -алгебры Σ , порожденной с.в. $g_1, g_2, \dots, g_n$ (см. § 0.3).

Лемма 9.1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $|f_n(\omega)| \leq D$ ($\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$) и $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$. Тогда существуют последовательности $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что

- (i) $|g_k(\omega)| \leq 2D$, $\omega \in \Omega, k \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\mathbb{E}[g_k|g_1, \dots, g_{k-1}] = 0$ п.в. на Ω ;
- (iii) $\|f_{n_k} - g_k\|_k \leq 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Так как $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то можно найти $n_1 \in \mathbb{N}$, для которого

$$|\mathbb{E}[f_{n_1}]| \leq \frac{1}{6}. \quad (9.1)$$

Далее, существует конечнозначная функция h_1 , $|h_1(\omega)| \leq D$ ($\omega \in \Omega$), такая, что

$$\mathbb{E}[|f_{n_1} - h_1|] \leq \frac{1}{6}. \quad (9.2)$$

Если теперь $g_1 := h_1 - \mathbb{E}[h_1]$, то $\mathbb{E}[g_1] = 0$ и $|g_1(\omega)| \leq 2D$. Кроме того, из неравенств (9.1) и (9.2) следует:

$$\begin{aligned} \|f_{n_1} - g_1\|_1 &\leq \mathbb{E}[|f_{n_1} - h_1|] + \mathbb{E}[|h_1 - g_1|] \\ &= \mathbb{E}[|f_{n_1} - h_1|] + |\mathbb{E}[h_1]| \\ &\leq 2\mathbb{E}[|f_{n_1} - h_1|] + |\mathbb{E}[f_{n_1}]| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $k > 1$ и найдены величины $f_{n_1}, \dots, f_{n_{k-1}}$, $1 \leq n_1 < \dots < n_{k-1}$ и $g_1, \dots, g_{k-1}$, такие, что при всех $s = 1, 2, \dots, k-1$

- a) $|g_s(\omega)| \leq 2D$;
- b) g_s постоянна на множествах $e_i^{(s)} \subset \Omega$, $i = 1, \dots, i_s$, $e_i^{(s)} \cap e_j^{(s)} = \emptyset$ ($i \neq j$) и $\bigcup_i e_i^{(s)} = \Omega$, причем $e_i^{(s)}$ целиком лежат во множествах постоянства $e_i^{(s-1)}$, $i = 1, \dots, i_{s-1}$ функции g_{s-1} ;
- c) $\mathbb{E}[g_s|g_1, \dots, g_{s-1}] = 0$ п.в. на Ω ;
- d) $\|f_{n_s} - g_s\|_s \leq 2^{-s}$.

Найдем следующую пару величин f_{n_k} и g_k , удовлетворяющую аналогичным условиям. Так как $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, то существует $n_k > n_{k-1}$, такое, что для всех $i = 1, \dots, i_{k-1}$

$$\left| \int_{e_i^{(k-1)}} f_{n_k}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \right| \leq \frac{2^{-k}}{3} \mathbb{P}(e_i^{(k-1)}). \quad (9.3)$$

Пусть h_k — конечнозначная функция, $|h_k(\omega)| \leq D$, все множества постоянства которой целиком содержатся во множествах $e_i^{(k-1)}$ ($i = 1, \dots, i_{k-1}$) и, кроме того, для всех $i = 1, \dots, i_{k-1}$

$$\int_{e_i^{(k-1)}} |f_{n_k}(\omega) - h_k(\omega)|^k d\mathbb{P}(\omega) \leq \left(\frac{2^{-k}}{3} \right)^k \mathbb{P}(e_i^{(k-1)}). \quad (9.4)$$

Положим: $g_k = h_k - \mathbb{E}[h_k|g_1, \dots, g_{k-1}]$. Тогда $\mathbb{E}[g_k|g_1, \dots, g_{k-1}] = 0$ п.в. на Ω и $|g_k(\omega)| \leq 2D$. Так как для $\omega \in e_i^{(k-1)}$ и произвольной с.в. f на Ω

$$\mathbb{E}[f|g_1, \dots, g_{k-1}](\omega) = \mathbb{P}(e_i^{(k-1)})^{-1} \int_{e_i^{(k-1)}} f(u) d\mathbb{P}(u),$$

то ввиду (9.4)

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[(f_{n_k} - h_k) | g_1, \dots, g_{k-1}]| &\leq \max_{i=1, \dots, i_{k-1}} \mathbb{P}(e_i^{(k-1)})^{-1} \int_{e_i^{(k-1)}} |f_{n_k}(u) - h_k(u)| d\mathbb{P}(u) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, i_{k-1}} \mathbb{P}(e_i^{(k-1)})^{-1/k} \left(\int_{e_i^{(k-1)}} |f_{n_k}(u) - h_k(u)|^k d\mathbb{P}(u) \right)^{1/k} \leq \frac{2^{-k}}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя (9.3), получим:

$$|\mathbb{E}[h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]| \leq |\mathbb{E}[(f_{n_k} - h_k) | g_1, \dots, g_{k-1}]| + |\mathbb{E}[f_{n_k} | g_1, \dots, g_{k-1}]| \leq \frac{2^{-k+1}}{3}.$$

Отсюда и из (9.4) следует:

$$\|f_{n_k} - g_k\|_k \leq \|f_{n_k} - h_k\|_k + \|E[h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]\|_\infty \leq \frac{2^{-k}}{3} + \frac{2^{-k+1}}{3} = 2^{-k},$$

и доказательство леммы закончено. $\square$

Как и ранее, всюду в дальнейшем $\kappa_a(t) := \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$, где $a \in \ell_2$, а $t > 0$.

Теорема 9.2. *Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $|f_n(\omega)| \leq D$ ($\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$) и $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$. Тогда из $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что*

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_{n_i} \right\|_t \leq C \kappa_a(\sqrt{t}) \quad (t \geq 1).$$

Доказательство. По лемме 9.1 существуют последовательности $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ и $\{g_k\}$ со следующими свойствами: $|g_k(\omega)| \leq 2D$, $\mathbb{E}[g_k | g_1, \dots, g_{k-1}] = 0$ п.в. и

$$\|g_k - f_{n_k}\|_k \leq 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (9.5)$$

Заметим, что последовательность $\{g_k\}$ мультипликативна. Действительно, по свойствам условного математического ожидания [63, леммы 1.11 и 1.13] для произвольных $k_1 < \dots < k_m$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_{k_1} \dots g_{k_{m-1}} g_{k_m} | g_{k_1}, \dots, g_{k_{m-1}}] &= g_{k_1} \dots g_{k_{m-1}} \mathbb{E}[g_{k_m} | g_{k_1}, \dots, g_{k_{m-1}}] = \\ &= g_{k_1} \dots g_{k_{m-1}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[g_{k_m} | g_1 g_2 \dots, g_{k_{m-1}}] | g_{k_1}, \dots, g_{k_{m-1}}] = 0, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathbb{E}[g_{k_1} \dots g_{k_{m-1}} g_{k_m}] = \int_\Omega \mathbb{E}[g_{k_1} \dots g_{k_{m-1}} g_{k_m} | g_{k_1} \dots g_{k_{m-1}}] d\mathbb{P}(\omega) = 0.$$

Тем самым по теореме 8.3 для произвольных $(b_k) \in \ell_2$ и $p \geq 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty b_k g_k \right\|_p \leq 2D \left\| \sum_{k=1}^\infty b_k r_k \right\|_p. \quad (9.6)$$

Поэтому, применяя соотношение (9.5), теорему 1.3 и неравенство (2.8), для любого $t \in \mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_{n_i} \right\|_t &\leq \left\| \sum_{i=1}^t a_i f_{n_i} \right\|_t + \left\| \sum_{i=t+1}^\infty a_i (f_{n_i} - g_i) \right\|_t + \left\| \sum_{i=t+1}^\infty a_i g_i \right\|_t \\ &\leq D \sum_{i=1}^t |a_i| + \left(\sum_{i=t+1}^\infty a_i^2 \right)^{1/2} \sum_{i=t+1}^\infty \|f_{n_i} - g_i\|_i + 2D \left\| \sum_{i=t+1}^\infty a_i r_i \right\|_t \\ &\leq D \sum_{i=1}^t |a_i| + (2D + 2^{-t}) \sqrt{t} \left(\sum_{i=t+1}^\infty a_i^2 \right)^{1/2} \leq 4(2D + 1) \kappa_a(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство стандартным образом распространяется на случай произвольного вещественного $t \geq 1$, то теорема доказана. $\square$

Следующие три результата непосредственно вытекают из только что доказанной теоремы и теоремы 8.1. В последнем из них, кроме того, используется слабая предкомпактность ограниченных множеств в L_2 .

Следствие 9.1. Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность с.в., удовлетворяющая условиям теоремы 9.2, то из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что $\{f_{n_k}\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{r_k\}$ с константой, зависящей лишь от D .

Следствие 9.2. Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность с.в., удовлетворяющая условиям теоремы 9.2, то из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, что $\exp(\lambda \sum_{k=1}^\infty a_k r_{n_k})^2 \in L_1$ для любых $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следствие 9.3. Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — равномерно ограниченная ортонормированная последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, мажорируемую по распределению системой Радемахера.

Докажем теперь утверждение, которое будет играть решающую роль в доказательстве теоремы 9.1.

Теорема 9.3. Пусть система с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, удовлетворяет тем же условиям 1) — 3), что и подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ в теореме 9.1. Тогда существуют подсистема $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ и константа $C > 0$, зависящая лишь от D и d , такие, что для всех $t \geq 1$ и $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$

$$\kappa_a(\sqrt{t}) \leq C \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i \right\|_t. \quad (9.7)$$

Доказательство. Здесь мы еще раз используем следующую аппроксимацию $\mathcal{K}$ -функционала $\kappa_a(t)$ (см. § 2): для произвольных $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ и $t^2 \in \mathbb{N}$

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leq \kappa_a(t) \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)}, \quad (9.8)$$

где

$$\|a\|_{Q(t)} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \right\} \quad (a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2, t \in \mathbb{N}) \quad (9.9)$$

(верхняя грань берется по всем разбиениям $\{A_j\}_{j=1}^t$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$). Другим важным компонентом в доказательстве этой теоремы будет оценка сверху L_q -норм ($q > 1$) модифицированных произведений Рисса.

Прежде всего, так как из условий теоремы следует: $0 < d \leq \|f_n\|_2 \leq D$ ($n = 1, 2, \dots$), то ввиду положительной однородности относительно $a \in \ell_2$ обеих частей соотношения (9.7) можно считать, что $\|f_n\|_2 = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) и, в частности, поэтому $D \geq 1$.

Пусть числовая последовательность $(\varepsilon_i)_{i=1}^\infty$ такова, что

$$0 < \varepsilon_i < \frac{1}{16} \quad \text{и} \quad \sum_{k=i+1}^\infty \varepsilon_k < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (9.10)$$

Так как по условиям теоремы последовательность f_n^2 слабо предкомпактна в L_2 , то существует $\{h_k\} \subset \{f_n\}$, такая, что $h_k^2 \rightarrow h$ слабо в этом пространстве. При этом ввиду свойств $\{h_k\}$ $0 \leq h(\omega) \leq D^2$ и $\mathbb{E}(h) = 1$. Кроме того, последовательность $h_k \rightarrow 0$ слабо в L_2 , и, значит, можно найти номер k_1 так, что для функции $\varphi_1 = h_{k_1}$ выполнено:

$$|\mathbb{E}(\varphi_1)| + |\mathbb{E}(h\varphi_1)| + |\mathbb{E}(\varphi_1^2 - h)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2D}.$$

Предположим, что номера $k_1 < k_2 < \dots < k_{i-1}$ и функции $\varphi_1 = h_{k_1}, \varphi_2 = h_{k_2}, \dots, \varphi_{i-1} = h_{k_{i-1}}$ ($i \geq 2$) уже выбраны. Найдем $k_i > k_{i-1}$ так, чтобы для $\varphi_i = h_{k_i}$ выполнялось соотношение:

$$\begin{aligned} & \sum \left\{ |\mathbb{E}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| + |\mathbb{E}(h \varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| + |\mathbb{E}[\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} (\varphi_i^2 - h)]| \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^s |\mathbb{E}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_{l-1}} \varphi_{j_l}^2 \varphi_{j_{l+1}} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| \right\} \leq \frac{\varepsilon_i}{2D}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где $\varphi_{j_0} = \varphi_{j_{s+1}} = 1$, а сумма берется по всем наборам индексов

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l < \dots < j_s \leq i-1 \quad (s = 1, 2, \dots, i-1).$$

Заметим также, что ввиду теоремы 9.2 мы можем дополнительно предположить, что всякая функция

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(\omega), \quad a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

принадлежит пространству L_p для любого $1 \leq p < \infty$. Покажем, что выделенная таким образом последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет соотношению (9.7).

Пусть сначала $t \in \mathbb{N}$, а $\{A_j\}_{j=1}^t$ – произвольное разбиение натурального ряда $\mathbb{N}$. Для $N \in \mathbb{N}$ и $j = 1, 2, \dots, t$ определим множества $A_j^N = \{i = 1, \dots, N : i \in A_j\}$ (возможно, некоторые из них пусты). Образует произведение Рисса, состоящие из блоков, соответствующих множествам A_j^N :

$$R_N(\omega) = \prod_{i=1}^N (1 + b_i \varphi_i(\omega)) = \prod_{j=1}^t \prod_{i \in A_j^N} (1 + b_i \varphi_i(\omega)),$$

где $b_i \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i \in A_j} b_i^2 \leq D^{-2} \quad (j = 1, 2, \dots, t). \quad (9.12)$$

Следуя идее классического метода Сидона, оценим снизу интеграл

$$I_N = \int_{\Omega} R_N(\omega) \varphi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{E}(R_N \varphi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta_{i,N}. \quad (9.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_{i,N} = \mathbb{E}(R_N \varphi_i) &= \int_{\Omega} \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k \varphi_k(\omega) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq N} b_{k_1} b_{k_2} \varphi_{k_1}(\omega) \varphi_{k_2}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + b_1 b_2 \dots b_N \varphi_1(\omega) \dots \varphi_N(\omega) \right] \varphi_i(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = b_i \alpha_{i,N} + \gamma_{i,N}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где $\alpha_{i,N} = 1$ ($i \leq N$), $\alpha_{i,N} = 0$ ($i > N$), а

$$\begin{aligned} \gamma_{i,N} = \mathbb{E}(\varphi_i) &+ \sum_{k=1, k \neq i}^N b_k \mathbb{E}(\varphi_k \varphi_i) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq N} b_{k_1} b_{k_2} \mathbb{E}(\varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \varphi_i) + \dots \\ &\dots + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq N} b_{k_1} \dots b_{k_s} \mathbb{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} \varphi_i) + \dots + b_1 \dots b_N \mathbb{E}(\varphi_1 \dots \varphi_N \varphi_i). \end{aligned}$$

Тогда

$$\gamma_{i,N} = S_1^i + S_2^i + S_3^i, \quad (9.15)$$

где суммы S_k^i ($k = 1, 2, 3$) определяются следующим образом. Представляя в случае, если $k_1 < k_2 < \dots < k_s < i$,

$$\mathbb{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} \varphi_i^2) = \mathbb{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} h) + \mathbb{E}[\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} (\varphi_i^2 - h)],$$

отнесем к сумме S_1^i все слагаемые, содержащие интегралы вида $\mathbb{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} \varphi_i)$ или $\mathbb{E}[\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} (\varphi_i^2 - h)]$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_s < i$. В S_2^i включим все слагаемые с интегралами $\mathbb{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_{l-1}} \varphi_i \varphi_{k_l} \dots \varphi_{k_s})$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_{l-1} \leq i < k_l < \dots < k_s$, $1 \leq l \leq s$, а в S_3^i – слагаемые с интегралами $\mathbb{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} h)$.

Ввиду (9.12) $|b_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots$), и поэтому из (9.11) и (9.10) следует:

$$|S_1^i| \leq \frac{\varepsilon_i}{D} \quad \text{и} \quad |S_2^i| \leq \frac{1}{D} \sum_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon_i}{D}. \quad (9.16)$$

Что касается S_3^i , то в каждое слагаемое этой суммы входит множитель b_i , и следовательно, используя снова (9.11) и (9.10), получаем

$$|S_3^i| \leq \frac{|b_i|}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{|b_i|}{8}. \quad (9.17)$$

Заметим также, что при $i > N$ суммы S_2^i и S_3^i в (9.15) отсутствуют, откуда

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_{i,N}| \leq \frac{1}{D} \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{1}{16D}. \quad (9.18)$$

Пусть теперь $1 \leq i \leq N$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, t$ ввиду соотношений (9.15) – (9.17), (9.10) и (9.12)

$$\left(\sum_{i \in A_j^N} \gamma_{i,N}^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i \in A_j^N} (S_k^i)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2}{D} \sum_{i \in A_j^N} \varepsilon_i + \frac{1}{8} \left(\sum_{i \in A_j^N} b_i^2 \right)^{1/2} \leq \frac{3}{8D}. \quad (9.19)$$

Для того, чтобы применить полученные неравенства к оценке интеграла I_N снизу, представим его в виде (см. (9.13) и (9.14)):

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{i=1}^N a_i b_i + \sum_{i=1}^N a_i \gamma_{i,N} + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \gamma_{i,N} = \\ &= \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i b_i \right) + \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i \gamma_{i,N} \right) + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \gamma_{i,N}. \end{aligned}$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$ настолько большое, что для каждого $j = 1, 2, \dots, t$

$$\sum_{i \in A_j} a_i^2 \leq \frac{9}{4} \sum_{i \in A_j^N} a_i^2. \quad (9.20)$$

Тогда для каждого $j = 1, 2, \dots, t$ можно найти числа b_i ($i \in A_j^N$), удовлетворяющие условиям (9.12), для которых выполнено равенство

$$\sum_{i \in A_j^N} a_i b_i = \frac{1}{D} \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда и из соотношений (9.18), (9.19) и (9.10) получаем:

$$\begin{aligned} I_N &\geq \frac{1}{D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in A_j^N} \gamma_{i,N}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad - \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \gamma_{i,N}^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{2D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, а также соотношение (9.20) показывают, что для каждого $t \in \mathbb{N}$ и произвольного разбиения $\{A_j\}_{j=1}^t$ натурального ряда найдутся достаточно большое N и числа b_i ($i = 1, 2, \dots, N$), удовлетворяющие условиям (9.12), такие, что

$$I_N = \int_{\Omega} R_N(\omega) \varphi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \geq \frac{1}{3D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2}. \quad (9.21)$$

Следующая часть доказательства — оценка интеграла I_N сверху выражением $C\|\varphi\|_t$, где $C > 0$ — некоторая константа. Ввиду неравенства Гельдера

$$|I_N| \leq \|R_N\|_{t'} \|\varphi\|_t, \quad t' = \frac{t}{t-1} \quad (9.22)$$

и неотрицательности произведений Рисса для этого достаточно оценить сверху величину

$$L_N = \|R_N\|_{t'}^{t'} = \int_{\Omega} [R_N(\omega)]^{t'} d\mathbb{P}(\omega). \quad (9.23)$$

Пусть $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$. По-прежнему $\{A_j\}_{j=1}^t$ — разбиение $\mathbb{N}$, $A_j^N = \{i = 1, \dots, N : i \in A_j\}$, а числа b_i удовлетворяют соотношениям (9.12). Из элементарного неравенства $(1+x)^y \leq 1+yx$ ($x \geq 1$, $0 < y \leq 1$) следует:

$$\begin{aligned} [R_N(\omega)]^{t'} &\leq \prod_{i=1}^N (1 + b_i \varphi_i(\omega)) [1 + (t-1)^{-1} b_i \varphi_i(\omega)] \\ &\leq \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{D^2}{t-1} b_i^2 + \frac{t}{t-1} b_i \varphi_i(\omega) \right) \\ &= \prod_{j=1}^t \prod_{i \in A_j^N} \left(1 + \frac{D^2}{t-1} b_i^2 + \frac{t}{t-1} b_i \varphi_i(\omega) \right). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Если $|B| := \text{card } B$, то внутреннее произведение в последнем выражении будет равно сумме

$$\begin{aligned} &1 + \frac{D^2}{t-1} \sum_{i \in A_j^N} b_i^2 + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^2 \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2 \in A_j^N}} b_{i_1}^2 b_{i_2}^2 + \dots + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^{|A_j^N|} \prod_{i \in A_j^N} b_i^2 + \\ &+ \sum_{\emptyset \neq C_j \subsetneq A_j^N} \left\{ 1 + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^{|A_j^N| - |C_j|} \prod_{i \in A_j^N \setminus C_j} b_i^2 \right\} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{|C_j|} \prod_{i \in C_j} b_i \varphi_i(\omega) + \\ &+ \left(\frac{t}{t-1} \right)^{|A_j^N|} \prod_{i \in A_j^N} b_i \varphi_i(\omega). \end{aligned}$$

Так как ввиду неравенств (9.12)

$$1 + \frac{D^2}{t-1} \sum_{i \in A_j^N} b_i^2 + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^2 \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2 \in A_j^N}} b_{i_1}^2 b_{i_2}^2 + \dots + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^{|A_j^N|} \prod_{i \in A_j^N} b_i^2 \leq \frac{t-1}{t-2},$$

а

$$1 + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^{|A_j^N| - |C_j|} \prod_{i \in A_j^N \setminus C_j} b_i^2 \leq \frac{t}{t-1},$$

то из соотношений (9.23), (9.24) и опять (9.12) следует:

$$\begin{aligned} L_N &\leq \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^t + \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-1} \sum_{j=1}^t \sum_{C_j \subset A_j^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{|C_j|+1} \left| \mathbb{E} \left(\prod_{i \in C_j} \varphi_i(\omega) \right) \right| \\ &+ \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq t} \sum_{C_{j_1} \subset A_{j_1}^N} \sum_{C_{j_2} \subset A_{j_2}^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{|C_{j_1}| + |C_{j_2}| + 2} \left| \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^2 \prod_{i \in C_{j_k}} \varphi_i(\omega) \right) \right| \\ &\dots + \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-s} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq t} \sum_{C_{j_1} \subset A_{j_1}^N} \dots \sum_{C_{j_s} \subset A_{j_s}^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\sum_{k=1}^s |C_{j_k}| + s} \left| \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^s \prod_{i \in C_{j_k}} \varphi_i(\omega) \right) \right| \\ &\dots + \sum_{C_1 \subset A_1^N} \dots \sum_{C_t \subset A_t^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\sum_{j=1}^t |C_j| + t} \left| \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^t \prod_{i \in C_j} \varphi_i(\omega) \right) \right|. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Заметим, что для $t \geq 3$

$$\frac{t}{t-1} \leq 2 \text{ и } \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-s} \left(\frac{t}{t-1} \right)^s \leq 4e \quad (s = 0, 1, \dots, t). \quad (9.26)$$

Кроме того, так как множества A_j^N ($j = 1, 2, \dots, t$) попарно не пересекаются, то под интегралами в правой части (9.25) стоят различные произведения попарно различных функций φ_i ($i = 1, 2, \dots, N$). При этом число их равно $|C_j|$ ($j = 1, 2, \dots, t$) для слагаемых первой, $|C_{j_1}| + |C_{j_2}|$ ($1 \leq j_1 < j_2 \leq t$) — для слагаемых второй, $\dots$, $\sum_{j=1}^t |C_j|$ — для слагаемых последней суммы. Следовательно, максимальный из индексов функций φ_i в каждом подынтегральном произведении не меньше, чем $|C_j|$, $|C_{j_1}| + |C_{j_2}|, \dots, \sum_{j=1}^t |C_j|$ соответственно. В итоге из (9.25) и (9.26) получаем:

$$L_N \leq 4e \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N 2^i \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq i-1} |\mathbb{E}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| \right\}, \quad (9.27)$$

где внутренняя сумма берется по всем наборам индексов $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq i-1$. Поэтому из соотношений (9.10) и (9.11) и того, что $D \geq 1$, следует:

$$L_N \leq \frac{4e}{D} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \right) < 13,$$

и значит, (см. (9.22) и (9.23)) для всех $N \in \mathbb{N}$ и $t = 3, 4, \dots$

$$|I_N| \leq 13 \|\varphi\|_t.$$

Последнее неравенство вместе с соотношением (9.21) дает нам следующее:

$$\sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} \leq 39D \|\varphi\|_t,$$

откуда ввиду (9.8) и (9.9) (см. также лемму 2.2) мы получаем, что для натуральных $t \geq 3$ и произвольных $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$

$$\kappa_a(\sqrt{t}) \leq 39\sqrt{2} D \|\varphi\|_t.$$

Стандартные рассуждения, использующие вогнутость $\mathcal{K}$ -функционала, приводят тогда к неравенству, верному уже для всех вещественных $t \geq 3$:

$$\kappa_a(\sqrt{t}) \leq 78 D \|\varphi\|_t. \quad (9.28)$$

Осталось показать, что аналогичное неравенство выполнено, если $1 \leq t \leq 3$. Так как $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$, то $\mathcal{K}(1, a; \ell_1, \ell_2) = \|a\|_2$, и значит, опять из-за вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала для этого достаточно доказать, что с некоторой константой $M = M(D)$

$$\|a\|_2 \leq M \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \right\|_1 \quad (a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2). \quad (9.29)$$

Прежде всего, так как $\|\varphi_i\|_2 = 1$, то ввиду (9.10), (9.11) и неравенства Коши-Буняковского для произвольного $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_i a_j \mathbb{E}(\varphi_i \varphi_j) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m a_i^2 \left\{ 1 - 2 \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m} (\mathbb{E}(\varphi_i \varphi_j))^2 \right]^{1/2} \right\} \geq \frac{1}{2} \|(a_i)\|_2^2. \end{aligned}$$

Далее, так как для последовательности $\{f_n\}$ выполняются условия теоремы 9.2, то мы можем считать, что для произвольных $(b_k) \in \ell_2$ и $p \geq 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k \right\|_p \leq 2D \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k \right\|_p$$

(см. соотношение (9.6)). Применяя теперь два последних неравенства и используя неравенство Хинчина точно так же, как при доказательстве теоремы 1.4, получим

$$\begin{aligned} \|a\|_2^2 &\leq 2 \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_2^2 \leq 2 \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(t) \right| dt \right)^{2/3} \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(t) \right)^4 dt \right)^{1/3} \\ &\leq 2 \cdot 2^{4/3} D^{4/3} \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_1^{2/3} \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m a_i r_i(t) \right)^4 dt \right)^{1/3} \\ &\leq 8 \cdot D^{4/3} \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_1^{2/3} \|a\|_2^{4/3}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|a\|_2 \leq 16\sqrt{2}D^2 \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_1,$$

В итоге неравенство (9.29) выполнено с константой $M = 16\sqrt{2}D^2$. Как уже говорилось, отсюда и из неравенства (9.28) следует, что соотношение (9.7) имеет место для всех $t \geq 1$ с некоторой константой, зависящей от D и d . Тем самым теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 9.1. Предположим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ содержит подпоследовательность, удовлетворяющую условиям (1) — (3). Тогда существование подсистемы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$, эквивалентной по распределению системе Радемахера, — непосредственное следствие теорем 9.2, 9.3 и 8.2. Действительно, применяя последовательно первые две из них, мы выделим $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ такую, что

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i \right\|_t \asymp \kappa_a(\sqrt{t}), \quad a \in \ell_2, \quad t \geq 1.$$

Но тогда ввиду третьей из перечисленных теорем $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ эквивалентна по распределению системе Радемахера.

Пусть теперь, наоборот, существует подпоследовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$, эквивалентная по распределению системе Радемахера. Тогда из определения эквивалентности по распределению и того, что система Радемахера обладает свойствами (1) и (3), мы сразу получаем, что эти свойства имеет и $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$. Осталось показать, что некоторая подпоследовательность $\{\varphi_i\}$ слабо сходится к нулю в L_2 .

Так как $\{\varphi_i\}$ ограничена в L_2 , то ввиду слабой предкомпактности ограниченных множеств в этом пространстве существуют $\{\varphi'_k\} \subset \{\varphi_i\}$ и $f \in L_2$, такие, что $\varphi'_k \rightarrow f$ слабо в L_2 . Как уже говорилось, $\{\varphi_i\}$ равномерно ограничена, т.е. $|\varphi_i(\omega)| \leq D$ при некотором $D > 0$ и всех $i \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$. Легко показать, что тогда аналогичное неравенство выполнено и для слабого предела, т.е. $|f(\omega)| \leq D$ ($\omega \in \Omega$). Следовательно, если $\psi_k := \varphi'_k - f$, то $|\psi_k(\omega)| \leq 2D$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$. Так как, кроме того, $\{\psi_k\}$ слабо сходится к нулю в L_2 , мы можем применить следствие 9.1 и найти подпоследовательность $\{\psi_{k_j}\} \subset \{\psi_k\}$, такую, что $\{\psi_{k_j}\} \stackrel{\mathbb{P}}{\prec} \{r_k\}$. Таким образом, для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $a_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и $p > 2$

$$\sum_{j=1}^n a_j \|f\|_p \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j \varphi'_{k_j} \right\|_p + \left\| \sum_{j=1}^n a_j \psi_{k_j} \right\|_p \leq C \left\| \sum_{j=1}^n a_j r_j \right\|_p \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2},$$

где константа C_1 зависит от p и D , но не от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $f = 0$, и доказательство тем самым закончено. $\square$

Так как условия (1) — (3) теоремы 9.1 выполняются для равномерно ограниченных ортонормированных систем, мы получаем следующее важное утверждение.

Теорема 9.4. *Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$), то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентную по распределению системе Радемахера. Константа этой эквивалентности зависит только от D .*

Отметим, что система Радемахера является "идеальной" лакунарной последовательностью: по теореме 1.3 это S_∞ -система с константами $K_p \asymp \sqrt{p}$ ($p \rightarrow \infty$), а ввиду элементарного замечания 1.5 — система Сидона (определения см. в § 0.4). Очевидно, что в точности тем же "букетом" свойств обладает и произвольная последовательность случайных величин, эквивалентная по распределению системе Радемахера. Это дает нам основание сказать, что полученные результаты дают точные условия, при которых равномерно ограниченные системы функций содержат сильно лакунарные подпоследовательности. Последнее указывает как на то, что подпоследовательность имеет одновременно различные лакунарные свойства, так и на характер этих свойств. Покажем, например, что "сидоновость" последовательности $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентной по распределению системе Радемахера, является усиленной в том смысле, что знание порядка полинома $\sum_{i=1}^m a_i \varphi_i$ позволяет контролировать меру множества, на котором его модуль с точностью до константы превосходит $\sum_{i=1}^m |a_i|$.

Следствие 9.4. *Предположим, что из системы с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющую условиям (1) — (3) теоремы 9.1. Тогда $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ содержит подсистему $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, обладающую следующим свойством: для некоторых констант $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, зависящих лишь от D и d , и для любого полинома*

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(\omega)$$

существует множество $E = E(T) \subset \Omega$, $\mathbb{P}(E) > \alpha_1 2^{-m}$, такое, что

$$|T(\omega)| \geq \alpha_2 \|T\|_\infty \geq \alpha_3 \sum_{i=1}^m |a_i| \quad (\omega \in E).$$

Доказательство. По теореме 9.1 существует подпоследовательность $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$, такая, что при некотором $C > 0$ и всех $z > 0$

$$C^{-1} m(\{|\tilde{T}(x)| > Cz\}) \leq \mathbb{P}\{|T(\omega)| > z\} \leq C m(\{|\tilde{T}(x)| > C^{-1}z\}),$$

где $\tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^m a_i r_i(x)$ ($x \in [0, 1]$). В частности, отсюда

$$C^{-1} \|T\|_\infty \leq \|\tilde{T}\|_\infty \leq C \|T\|_\infty.$$

Поэтому из определения функций Радемахера следует:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|T(\omega)| > (2C^2)^{-1} \|T\|_\infty\} &\geq \mathbb{P}\{|T(\omega)| > (2C)^{-1} \|\tilde{T}\|_\infty\} \geq \\ &\geq C^{-1} m\{|\tilde{T}(x)| > 2^{-1} \|\tilde{T}\|_\infty\} \geq C^{-1} 2^{-m}. \end{aligned}$$

Положим $\alpha_1 = C^{-1}$, $\alpha_2 = (2C^2)^{-1}$ и $E = E(T) = \{\omega \in \Omega : |T(\omega)| > \alpha_2 \|T\|_\infty\}$. Тогда для $\omega \in E$

$$|T(\omega)| > \alpha_2 \|T\|_\infty \geq \alpha_2 C^{-1} \|\tilde{T}\|_\infty = \alpha_3 \sum_{i=1}^m |a_i|,$$

где $\alpha_3 = \alpha_2 C^{-1}$. □

Напомним (см. предложение 1.2), что система Радемахера является системой Сидона-Зигмунда в узком смысле. Следующий результат показывает, что при определенных условиях из последовательности функций на $[0, 1]$ можно выделить подпоследовательность, всюду "локально" эквивалентную по распределению системе Радемахера (и тем самым, конечно, также обладающую свойством Сидона-Зигмунда в узком смысле).

Теорема 9.5. *Предположим, что из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ функций, измеримых на $[0, 1]$, можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющую условиям (1) и (2) теоремы 9.1, а также следующему условию:*

$$d(I) := \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_I f_{n_k}^2(x) dx > 0 \quad \text{для любого промежутка } I \subset [0, 1]. \quad (9.30)$$

Тогда существует подсистема $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$, такая, что для всякого промежутка $I \subset [0, 1]$ найдется номер $k_0 = k_0(I)$, при котором последовательность $\{\varphi_i \chi_I\}_{i=k_0}^\infty$ эквивалентна по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$.

Доказательство. Ввиду теоремы 8.2 достаточно найти такую подсистему $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$, что для каждого промежутка $I \subset [0, 1]$ и некоторого $k_0 = k_0(I)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{k_0+i-1} \chi_I \right\|_t \asymp \kappa_a(\sqrt{t}) \quad (a \in \ell_2, t \geq 1) \quad (9.31)$$

(константа эквивалентности зависит от D и I).

Прежде всего, по теореме 9.2 существует $\{g_i\} \subset \{f_{n_k}\}$, такая, что для всякого промежутка $I \subset [0, 1]$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i \chi_I \right\|_t \leq C \kappa_a(\sqrt{t}) \quad (a \in \ell_2, t \geq 1), \quad (9.32)$$

где константа $C > 0$ зависит лишь от D и $d := d([0, 1])$. Таким образом, осталось найти подсистему $\{\varphi_i\} \subset \{g_i\}$, для которой выполнено противоположное соотношение.

Покажем сначала, что для любой функции $g \in L_2$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое i_0 , что для всякого интервала $I \subset [0, 1]$ и при всех $i \geq i_0$

$$\left| \int_I g(x) g_i(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (9.33)$$

Выберем по данной функции g натуральное $m = m(g, \varepsilon)$ так, что

$$\omega\left(\frac{1}{m}\right) := \sup_{E \subset [0, 1], m(E) \leq 1/m} \left(\int_E g(x)^2 dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3D}.$$

Разобьем затем $[0, 1]$ на m интервалов $J_1, \dots, J_m$ равной длины и ввиду слабой сходимости $\{g_i\}$ к нулю найдем такое i_0 , что

$$\sum_{k=1}^m \left| \int_{J_k} g(x) g_i(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i \geq i_0).$$

Любой интервал $I \subset [0, 1]$ представляется в виде объединения некоторых интервалов J_k и не более чем двух интервалов J' и J'' длины, меньшей, чем $1/m$. Поэтому из последних оценок и неравенства Коши-Буняковского следует

$$\left| \int_I g(x) g_i(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_{J'} g(x) g_i(x) dx \right| + \left| \int_{J''} g(x) g_i(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\omega\left(\frac{1}{m}\right)D < \varepsilon,$$

если $i \geq i_0$, и тем самым (9.33) доказано.

Далее, пусть (ε_i) — такая же последовательность, что и в начале доказательства теоремы 9.3. Используя только что доказанное соотношение (9.33) и действуя точно так же, как и там, можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_i\} \subset \{g_i\}$, для которой соотношения (9.11) выполнены для любого промежутка $I \subset [0, 1]$. Кроме того, можно выбрать номер $k_0 = k_0(I)$ так, чтобы, во-первых, благодаря условию (9.30)

$$\int_I \varphi_i^2(x) dx \geq \frac{d(I)^2}{2} \quad \text{для всех } i \geq k_0,$$

а во-вторых, чтобы за счет рассуждений, совершенно аналогичных примененным в доказательстве теоремы 9.3 (в частности, использующих достаточно "быстрое" стремление ε_i к нулю при $i \rightarrow \infty$), обеспечить выполнение неравенства

$$\kappa_a(\sqrt{t}) \leq C_1 \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{k_0+i-1} \chi_I \right\|_t \quad (a \in \ell_2, t \geq 1),$$

где константа $C_1 > 0$ зависит лишь от D и $d(I)$. Отсюда и из (9.32) следует (9.31), и теорема доказана. $\square$

Перейдем теперь к задаче выделения лакунарных подсистем из конечных равномерно ограниченных ортонормированных наборов $\{f_n\}_{n=1}^N$ функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Мы покажем, что любой такой набор содержит подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ "логарифмической плотности" (т.е. $s \geq C \log_2 N$), эквивалентную по распределению системе s функций Радемахера с константой, не зависящей от s . Начнем с точной формулировки главного результата.

Теорема 9.6. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^N$ – ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Тогда существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N$), где $s \geq \max\{[1/7 \log_2 N], 1\}$, такой, что для некоторого $C > 0$, зависящего только от D , всех $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $z > 0$,

$$C^{-1}m\left\{\left|\sum_{i=1}^s a_i r_i(x)\right| > Cz\right\} \leq m\left\{\left|\sum_{i=1}^s a_i f_{n_i}(x)\right| > z\right\} \leq Cm\left\{\left|\sum_{i=1}^s a_i r_i(x)\right| > C^{-1}z\right\}.$$

Для доказательства нам понадобятся две леммы. Первая из них показывает, что и в случае конечных наборов функций за счет "прореживания" можно получить подсистему со сколь угодно малыми смешанными моментами.

Лемма 9.2. Из любого набора функций $\{f_n\}_{n=1}^N$ ($N \geq 2^7$), удовлетворяющего условиям теоремы 9.6, можно выбрать функции $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N$), где $s \geq [1/7 \log_2 N]$, для которых выполнено соотношение:

$$\sum_{\theta \in \mathcal{A}_s} \left\{ \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^s \left(\frac{f_{n_i}(x)}{D} \right)^{\theta_i} \right] \right\}^2 \leq 10^{-s}, \quad (9.34)$$

где $\mathcal{A}_s$ – совокупность всевозможных наборов $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s$, таких, что

$$a) \theta_i = 0, 1 \text{ или } 2 ; \quad b) \sum_{i: \theta_i=1} 1 \geq 1 ; \quad c) \sum_{i: \theta_i=2} 1 \leq 1.$$

Доказательство. Для данного числа $s \leq N$ через $\mathcal{E}_N^s$ обозначим совокупность всех наборов натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^s$, $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N$. Идея доказательства, которое будет носить комбинаторный характер, состоит в оценке среднего значения сумм

$$I(\{n_k\}) := \sum_{\theta \in \mathcal{A}_s} \left\{ \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^s \left(\frac{f_{n_i}(x)}{D} \right)^{\theta_i} \right] \right\}^2$$

по всем $\{n_k\}_{k=1}^s \in \mathcal{E}_N^s$. Заметим, прежде всего, что все слагаемые суммы

$$G := \sum_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^s} I(\{n_k\}) \quad (9.35)$$

можно представить в виде или

$$\left(\frac{1}{D^j} \int_0^1 \prod_{k=1}^j f_{n_k}(x) dx \right)^2, \quad 1 \leq j \leq s, \quad \{n_k\} \in \mathcal{E}_N^j, \quad (9.36)$$

или

$$\left(\frac{1}{D^{j+1}} \int_0^1 f_{n_q}(x) \prod_{k=1}^j f_{n_k}(x) dx \right)^2, \quad 1 < j \leq s, \quad 1 \leq q \leq j, \quad \{n_k\} \in \mathcal{E}_N^j. \quad (9.37)$$

Оценим по отдельности суммы

$$G'_j := \sum_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^j} \left(\int_0^1 \prod_{k=1}^j f_{n_k}(x) dx \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

и

$$G''_j := \sum_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^j} \sum_{q=1}^j \left(\int_0^1 f_{n_q}(x) \prod_{k=1}^j f_{n_k}(x) dx \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Так как система ортонормированная, то по неравенству Бесселя

$$G'_1 := \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)^2 \leq \|\chi_{[0,1]}\|_2^2 = 1. \quad (9.38)$$

В случае $j > 1$

$$G'_j \leq \sum_{\{p_k\} \in \mathcal{E}_N^{j-1}} \sum_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^j} \delta(\{p_k\}, \{n_k\}) \left(\int_0^1 \prod_{k=1}^j f_{n_k}(x) dx \right)^2,$$

где $\delta(\{p_k\}, \{n_k\})$ равняется 1, если $\{p_k\} \subset \{n_k\}$, и 0 в противном случае. Так как опять по неравенству Бесселя для каждого набора $\{p_k\} \in \mathcal{E}_N^{j-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^j: \{n_k\} \supset \{p_k\}} \left(\int_0^1 \prod_{k=1}^j f_{n_k}(x) dx \right)^2 &\leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left\{ \int_0^1 \left(\prod_{k=1}^{j-1} f_{p_k}(x) \right) f_n(x) dx \right\}^2 \leq \left\| \prod_{k=1}^{j-1} f_{p_k} \right\|_2^2 \leq D^{2(j-1)}, \end{aligned}$$

то тем самым

$$G'_j \leq \sum_{\{p_k\} \in \mathcal{E}_N^{j-1}} D^{2(j-1)} = C_N^{j-1} D^{2(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots, s, \quad (9.39)$$

где C_m^l — число сочетаний из m по l .

Для оценки суммы G''_j представим ее в виде

$$G''_j = \sum_{p=1}^N G''_j(p),$$

где

$$G''_j(p) = \sum_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^{j-1}: p \notin \{n_k\}} \left(\int_0^1 f_p(x)^2 \prod_{k=1}^{j-1} f_{n_k}(x) dx \right)^2.$$

Оценивая сумму $G''_j(p)$ точно так же, как и G'_j , мы приходим к неравенству

$$G''_j(p) \leq C_{N-1}^{j-2} D^{2j}, \quad j = 2, 3, \dots, s,$$

откуда следует

$$G''_j \leq N C_{N-1}^{j-2} D^{2j}, \quad j = 2, 3, \dots, s. \quad (9.40)$$

Заметим, что при $s > 1$ каждое из слагаемых (9.36) и (9.37) встречается в сумме (9.35) C_{N-j}^{s-j} раз. Поэтому, учитывая, что $D \geq 1$ и $G''_1 = 0$, из соотношений (9.38) — (9.40) мы получаем

$$G \leq \sum_{j=1}^s \frac{1}{D^{2j}} C_{N-j}^{s-j} (G'_j + G''_j) \leq \sum_{j=1}^s C_{N-j}^{s-j} (C_N^{j-1} + N C_{N-1}^{j-2}).$$

Так как количество элементов в $\mathcal{E}_N^s$ равно C_N^s , то из последнего неравенства следует:

$$\min_{\{n_k\} \in \mathcal{E}_N^s} I(\{n_k\}) \leq \frac{G}{C_N^s} \leq \sum_{j=1}^s \frac{C_{N-j}^{s-j}}{C_N^s} (C_N^{j-1} + N C_{N-1}^{j-2}).$$

Нетрудно проверить, что $jC_N^{j-1} \geq NC_{N-1}^{j-2}$, и поэтому правая часть в последнем соотношении не больше, чем

$$\begin{aligned} (1+s) \sum_{j=1}^s \frac{C_{N-j}^{s-j} C_N^{j-1}}{C_N^s} &= (1+s) \sum_{j=1}^s \frac{1}{N-j+1} \cdot \frac{s!}{(s-j)!(j-1)!} \\ &\leq \frac{(1+s)}{N-s} \sum_{j=1}^s j C_s^j \leq \frac{2^s s(1+s)}{N-s} \leq 10^{-s}, \end{aligned}$$

если $N \geq (128)^s$, т.е. $s \leq \frac{1}{7} \log_2 N$. Лемма доказана. $\square$

Вторая лемма позволяет при определенных условиях продолжить равномерно ограниченный набор функций, определенных на $[0, 1]$, на более широкое множество так, чтобы он стал мультипликативным, оставшись при этом равномерно ограниченным.

Лемма 9.3. Пусть $\{g_i\}_{i=1}^s$ – набор функций на $[0, 1]$, $|g_i(x)| \leq D$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$ и $x \in [0, 1]$ и, кроме того,

$$\max_{\theta \in \mathcal{A}_s'} \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^s \left(\frac{g_i(x)}{D} \right)^{\theta_i} \right] \right| < 2^{-s}, \quad (9.41)$$

где $\mathcal{A}_s'$ – совокупность всех наборов $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s \in \mathcal{A}_s$, таких, что $\theta_i = 0$ или 1.

Тогда существует мультипликативный набор $\{h_i\}_{i=1}^s$ функций на отрезке $[0, 2]$, такой, что $h_i(x)\chi_{[0,1]}(x) = g_i(x)$ и $\|h_i\|_{L_\infty[0,2]} \leq D$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

Доказательство. Представим:

$$[1, 2) = \bigcup_{k=1}^{2^s} \Delta_k, \quad \Delta_k = [a_{k-1}, a_k), \quad a_k = 1 + k2^{-s} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2^s).$$

Так как $\text{card } \mathcal{A}_s' = 2^s - 1$, то можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{A}_s'$ и семейством промежутков $\{\Delta_k\}_{k=1}^{2^s-1}$. Возьмем одно из таких соответствий (произвольным образом) и зафиксируем его.

Пусть $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s$ – соответствующий Δ_k ($1 \leq k \leq 2^s - 1$) элемент множества $\mathcal{A}_s'$. Обозначим $\{i_j\}_{j=1}^m = \{i = 1, 2, \dots, s : \theta_i = 1\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ ($m = 1, 2, \dots, s$). Мы хотим, чтобы продолжения h_i функций g_i на $[0, 2]$ удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\int_{\Delta_k} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_m} dx = -\mathbb{E}(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_m}) \quad (9.42)$$

и

$$\int_{\Delta_k} h_{i'_1} h_{i'_2} \dots h_{i'_l} dx = 0 \quad (9.43)$$

для любого набора $\{i'_j\}_{j=1}^l$, не соответствующего (как элемент $\mathcal{A}_s'$) промежутку Δ_k .

Для произвольного $\alpha \in \Delta_k$ определим функцию

$$u_\alpha(x) = \chi_{[a_{k-1}, \alpha)}(x) - \chi_{[\alpha, a_k)}(x) \quad (x \in \Delta_k).$$

Тогда величина

$$v(\alpha) = \int_{\Delta_k} u_\alpha(x) dx = 2\alpha - a_{k-1} - a_k \quad (a_{k-1} \leq \alpha \leq a_k)$$

принимает все значения из отрезка $[-2^{-s}, 2^{-s}]$. Так как по условию (9.41) для функций $\bar{g}_i(x) = g_i(x)/D$ выполнено: $|\mathbb{E}(\bar{g}_{i_1} \bar{g}_{i_2} \dots \bar{g}_{i_m})| < 2^{-s}$, то найдется такое $\alpha_k \in (a_{k-1}, a_k)$, что

$$v(\alpha_k) = -\mathbb{E}(\bar{g}_{i_1} \bar{g}_{i_2} \dots \bar{g}_{i_m}). \quad (9.44)$$

Пусть сначала $m \geq 2$. Возьмем систему кусочно-постоянных функций $d_j(x)$, $x \in [a_{k-1}, \alpha_k)$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) со следующими свойствами:

$$|d_j(x)| \equiv 1 \quad \text{и} \quad \int_{a_{k-1}}^{\alpha_k} d_{j_1} d_{j_2} \dots d_{j_l} dx = 0 \quad (9.45)$$

для произвольных наборов $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq m-1$ (такую систему можно построить, например, перенеся на промежуток $[a_{k-1}, \alpha_k]$ с отрезка $[0, 1]$ функции Радемахера). Через $c_j(x)$, $x \in [\alpha_k, a_k]$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) обозначим аналогичную систему, но построенную на промежутке $[\alpha_k, a_k]$.

Определим функции $h_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) для $x \in \Delta_k$ ($k = 1, \dots, 2^s - 1$). Если $i \neq i_j$ для любого $j = 1, 2, \dots, m$ (напомним, что набор $\{i_j\}_{j=1}^m$ соответствует Δ_k как элемент $\mathcal{A}_s'$), то полагаем $h_i(x) \equiv 0$. Иначе,

$$h_{i_j}(x) = D(d_j(x)\chi_{[a_{k-1}, \alpha_k]}(x) + c_j(x)\chi_{[\alpha_k, a_k]}(x)) \text{ если } j = 1, 2, \dots, m-1,$$

и

$$h_{i_m}(x) = D\left(\prod_{j=1}^{m-1} d_j(x)\chi_{[a_{k-1}, \alpha_k]}(x) - \prod_{j=1}^{m-1} c_j(x)\chi_{[\alpha_k, a_k]}(x)\right).$$

Ввиду (9.45) и (9.44)

$$\int_{\Delta_k} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_m} dx = D^m \int_{\Delta_k} u_{\alpha_k}(x) dx = D^m v(\alpha_k) = -\mathbb{E}(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_m}),$$

и мы получаем (9.42). Заметим также, что соотношение (9.43) является непосредственным следствием определения функций h_i ($i = 1, 2, \dots, s$) и (9.45).

В случае $m = 1$ мы определим h_i на Δ_k следующим образом:

$$h_i(x) \equiv 0, \text{ если } i \neq i_1, \text{ и } h_{i_1}(x) = Du_{\alpha_k}(x).$$

Как легко видеть, соотношения (9.42) и (9.43) тогда опять выполнены.

Доопределим функции $h_i(x)$ на всем отрезке $[0, 2]$: $h_i(x) = g_i(x)$ ($x \in [0, 1]$) и $h_i(x) = 0$ ($x \in \Delta_{2^s}$). Тогда ввиду определения, а также соотношений (9.42) и (9.43) набор $\{h_i\}_{i=1}^s$ — мультипликативный на отрезке $[0, 2]$, и $|h_i(x)| \leq D$. $\square$

Доказательство теоремы 9.6. Ввиду теоремы 8.2 и замечания 8.3 после нее достаточно показать, что существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$, $s \geq \max\{[1/7 \log_2 N], 1\}$, такой, что с некоторой константой, зависящей только от D ,

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_t \asymp \kappa_a(\sqrt{t}) \quad (t \geq 1, a = (a_i)_{i=1}^s), \quad (9.46)$$

где по-прежнему $\kappa_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$.

Воспользовавшись леммой 9.2, выделим подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ так, чтобы она удовлетворяла условию (9.34) и $s \geq \max\{[1/7 \log_2 N], 1\}$. Так как $\mathcal{A}_s' \subset \mathcal{A}_s$, то одновременно для $g_i = f_{n_i}$ выполнено и соотношение (9.41). Поэтому по лемме 9.3 набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ можно продолжить до мультипликативного набора $\{h_i\}_{i=1}^s$ на $[0, 2]$, $|h_i(x)| \leq D$. Но тогда функции $h'_i(x) = h_i(2x)$ образуют мультипликативную систему уже на $[0, 1]$, $|h'_i(x)| \leq D$, и поэтому ввиду следствия 8.2 и теоремы 2.1 для произвольных $t \geq 1$ и $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, s$).

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i h'_i \right\|_{L_t[0,1]} \leq C' \kappa_a(\sqrt{t}),$$

откуда

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_t \leq C \kappa_a(\sqrt{t}), \quad (9.47)$$

где константа $C > 0$ зависит лишь от D .

Для доказательства противоположного неравенства обозначим:

$$a = (a_i)_{i=1}^s \quad \text{и} \quad P(x) = \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i}(x).$$

Пусть сначала $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$. Тогда, если $s \leq 16D^2$, то ввиду ортонормированности системы, неравенства Коши-Буняковского и определения $\mathcal{K}$ -функционала

$$\|P\|_t \geq \|P\|_2 = \|a\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s |a_i| \geq \frac{1}{4D} \kappa_a(\sqrt{t}). \quad (9.48)$$

Перейдем к более сложному случаю, когда

$$s > 16D^2. \quad (9.49)$$

Пусть $\{A_j\}_{j=1}^t$ — произвольное разбиение множества $\{1, 2, \dots, s\}$ на t непересекающихся подмножеств (возможно, некоторые из них пусты) и $(b_i)_{i=1}^s$ — набор чисел, удовлетворяющий условию

$$\sum_{i \in A_j} b_i^2 \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, t). \quad (9.50)$$

Образует произведение Рисса

$$R(x) = \prod_{i=1}^s \left(1 + \frac{b_i}{D} f_{n_i}(x) \right)$$

и сначала оценим интеграл

$$I_s := \int_0^1 P(x) R(x) dx$$

снизу. Так как $\|f_{n_k}\|_2 = 1$ ($k = 1, \dots, s$), то его можно представить следующим образом:

$$I_s = D^{-1} \sum_{i=1}^s a_i b_i + \sum_{i=1}^s a_i \gamma_i, \quad (9.51)$$

где

$$\gamma_i = \int_0^1 f_{n_i}(x) dx + \int_0^1 f_{n_i}(x) \cdot \sum_{\theta \in \mathcal{A}_s'(i)} \prod_{k=1}^s \left(\frac{b_k}{D} f_{n_k}(x) \right)^{\theta_k} dx,$$

$$\mathcal{A}_s'(i) = \mathcal{A}_s' \setminus \{\theta^i\}, \quad \theta^i = (\theta_j^i), \quad \theta_i^i = 1, \quad \theta_j^i = 0 \quad (j \neq i).$$

Так как ввиду (9.50) $|b_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$), то отсюда

$$\sum_{i=1}^s |\gamma_i| \leq D \sum_{\theta \in \mathcal{A}_s} \left| \int_0^1 \prod_{k=1}^s \left(\frac{f_{n_k}(x)}{D} \right)^{\theta_k} dx \right|,$$

где $\mathcal{A}_s$ — семейство всевозможных наборов $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s$ из леммы 9.2. Заметим также, что $\text{card } \mathcal{A}_s = 2^s - 1 + (2^{s-1} - 1)s \leq s2^s$. Поэтому ввиду неравенства Коши-Буняковского и условия (9.34)

$$\sum_{i=1}^s |\gamma_i| \leq D(s2^s)^{1/2} 10^{-s/2} = D(s5^{-s})^{1/2}.$$

Так как согласно (9.49) $(s5^{-s})^{1/2} \leq 8/s < 2^{-1}D^{-2}$, то отсюда

$$\sum_{i=1}^s |\gamma_i| \leq \frac{1}{2D}. \quad (9.52)$$

Для каждого $j = 1, 2, \dots, t$ выберем числа b_i ($i \in A_j$) так, чтобы выполнялось (9.50) и дополнительно

$$\sum_{i \in A_j} a_i b_i = \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда из (9.51) и (9.52) получаем:

$$I_s \geq \frac{1}{D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^t \left| \sum_{i \in A_j} a_i \gamma_i \right| \geq \frac{1}{D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in A_j} |\gamma_i| \right) \geq \frac{1}{2D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Так как разбиение $\{A_j\}_{j=1}^t$ произвольно, то в итоге ввиду (9.8)

$$I_s \geq \frac{1}{2\sqrt{2}D} \kappa_a(\sqrt{t}) \quad (t \in \mathbb{N}, t \geq 3). \quad (9.53)$$

Оценим теперь интеграл I_s сверху. Прежде всего, по неравенству Гельдера

$$|I_s| \leq \|R\|_{t'} \|P\|_t, \quad t' = \frac{t}{t-1}. \quad (9.54)$$

Затем точно так же, как в доказательстве теоремы 9.3 (см. соотношение (9.27)), можно показать, что для $t \geq 3$

$$\|R\|_{t'}^{t'} \leq 4e \left(1 + 2^s \sum_{\theta \in \mathcal{A}'_s} \left| \mathbb{E} \left\{ \prod_{i=1}^s \left[\frac{f_{n_i}(x)}{D} \right]^{\theta_i} \right\} \right| \right).$$

Тем самым ввиду неравенства Коши-Буняковского, вложения $\mathcal{A}'_s \subset \mathcal{A}_s$, а также условия (9.34) получаем:

$$\|R\|_{t'} \leq 4e(1 + 2^{3s/2} \cdot 10^{-s/2}) \leq 8e.$$

Таким образом, из (9.53) и (9.54) следует:

$$\kappa_a(\sqrt{t}) \leq 16\sqrt{2}eD\|P\|_t \quad (t \in \mathbb{N}, t \geq 3).$$

Аналогичные соотношения имеют место также для $t = 2$ и $t = 1$. Действительно, так как $\kappa_a(1) = \|a\|_2$, а система $\{f_n\}_{n=1}^N$ ортонормирована, то

$$\kappa_a(\sqrt{2}) \leq \sqrt{2}\kappa_a(1) = \sqrt{2}\|P\|_2 \text{ и } \kappa_a(1) = \|a\|_2 \leq \sqrt{2}\|P\|_1,$$

где в самом конце мы также используем L_1 -неравенство Хинчина с точной константой (см. теорему 1.4 и замечание 1.4). Стандартным образом распространяя последние оценки на случай произвольных вещественных $t \geq 1$, в итоге мы получаем:

$$\kappa_a(\sqrt{t}) \leq C\|P\|_t \quad (t \geq 1),$$

где константа C зависит лишь от D . Объединяя последнее соотношение с (9.47), мы приходим к эквивалентности (9.46), константы которой зависят только от D . Этого, как уже говорилось, достаточно для доказательства теоремы. $\square$

Замечание 9.1. Как и в случае бесконечных систем, набор функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$, для которого выполнено утверждение теоремы 9.6, является как системой Сидона, так и S_∞ -системой, причем константы в соответствующих неравенствах зависят только от D (но не от числа функций N в исходном наборе). Более того, доказанные в этом параграфе теоремы о выделении как бесконечных, так и конечных подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера, окончательны в том смысле, что дальнейшее "прореживание" не может улучшить распределений соответствующих полиномов. Действительно, ввиду следствия 1.7 для любой подпоследовательности $\{r_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ системы Радемахера и произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $z > 0$

$$m \left\{ \left| \sum_{i=1}^m a_i r_{n_i}(x) \right| > z \right\} = m \left\{ \left| \sum_{i=1}^m a_i r_i(x) \right| > z \right\},$$

и поэтому любая подсистема системы, эквивалентной по распределению системе Радемахера, эквивалентна ей же.

В заключение мы покажем, что утверждение теоремы 9.6 неулучшаемо по порядку. Мы докажем это даже для более слабого, чем эквивалентность по распределению системе Радемахера, свойства "сидоновости".

Предложение 9.1. Если последовательность $\{\sqrt{2} \cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^\infty$ ($0 \leq x \leq 1$) является системой Сидона, то для некоторого $C > 0$

$$\sum_{k: n_k \leq N} 1 \leq C \ln N \quad (N = 2, 3, \dots). \quad (9.55)$$

Доказательство. Пусть $f_n(x) := \sqrt{2} \cos 2\pi n x$ ($n = 1, 1, \dots$). Докажем следующее соотношение для случайных тригонометрических полиномов:

$$m\left\{t \in [0, 1] : \left\| \sum_{n=1}^N a_n f_n r_n(t) \right\|_{\infty} > 8 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2} \ln^{1/2} N \right\} \leq \frac{C}{N^2}, \quad (9.56)$$

где $C > 0$ — универсальная константа. Для этого мы сначала покажем, что для L_{∞} -норм тригонометрических полиномов $P(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x)$ справедлива оценка

$$\|P\|_{\infty} \leq 2 \max_{k=0,1,\dots,36N^2} \left| P\left(\frac{k}{36N^2}\right) \right|. \quad (9.57)$$

Действительно, так как система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована, то по неравенству Коши-Буняковского

$$|P'(x)| \leq 2\sqrt{2}\pi N \sum_{n=1}^N |a_n| \leq 2\sqrt{2}\pi N^{3/2} \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2}\pi N^{3/2} \|P\|_{\infty} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Поэтому, если $x_0 \in [(k-1)/(36N^2), k/(36N^2)]$ ($k = 0, 1, \dots, 36N^2$) такова, что $\|P\|_{\infty} = |P(x_0)|$, то

$$\left| P(x_0) - P\left(\frac{k}{36N^2}\right) \right| \leq \frac{1}{36N^2} \|P'\|_{\infty} \leq \frac{2\sqrt{2}\pi N^{3/2}}{36N^2} |P(x_0)| < \frac{1}{2} |P(x_0)|.$$

Тем самым $|P(k/(36N^2))| > \frac{1}{2} |P(x_0)| = \frac{1}{2} \|P\|_{\infty}$, и соотношение (9.57) доказано.

Ввиду (9.57) мы можем оценить левую часть соотношения (9.56) следующим образом:

$$\begin{aligned} m\left\{t \in [0, 1] : \left\| \sum_{n=1}^N a_n f_n r_n(t) \right\|_{\infty} > 8 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2} \ln^{1/2} N \right\} \leq \\ m\left\{t \in [0, 1] : \max_{k=0,1,\dots,36N^2} \left| \sum_{n=1}^N a_n f_n\left(\frac{k}{36N^2}\right) r_n(t) \right| > 4 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2} \ln^{1/2} N \right\} \leq \\ \leq 36N^2 \cdot \max_{k=0,1,\dots,36N^2} m\left\{t \in [0, 1] : \left| \sum_{n=1}^N a_n f_n\left(\frac{k}{36N^2}\right) r_n(t) \right| > 4 \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 \right)^{1/2} \ln^{1/2} N \right\}. \end{aligned}$$

Применяя далее экспоненциальную оценку для распределений полиномов Радемахера

$$m\left\{ \left| \sum_{n=1}^N b_n r_n \right| > u \right\} \leq C' \exp\left(-\frac{u^2}{2 \sum_{n=1}^N b_n^2}\right) \quad (u > 0) \quad (9.58)$$

(см. следствие 1.5), а также неравенство $|f_n(x)| \leq \sqrt{2}$ ($n = 1, 2, \dots$), мы получим, что последняя величина в предыдущем соотношении не больше, чем

$$36N^2 C' \max_{k=0,1,\dots,36N^2} \exp\left(-\frac{8 \ln N \sum_{n=1}^N a_n^2}{\sum_{n=1}^N a_n^2 f_n^2(k/(36N^2))}\right) \leq 36N^2 C' \exp(-4 \ln N) = \frac{36C'}{N^2},$$

и соотношение (9.56) в итоге доказано.

Так как по условию последовательность $\{f_{n_k}\}$ является системой Сидона, то для некоторого C_1 и всех $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$) выполнено:

$$\sum_{k=1}^m |a_k| \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^m a_k f_{n_k} \right\|_{\infty}.$$

Пусть $a_n = 0$, если $n \neq n_k$ для всех $k = 1, 2, \dots$, и $a_{n_k} = 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда для того, чтобы последнее соотношение не противоречило (9.56), необходимо должно выполняться неравенство

$$\sum_{k: n_k \leq N} 1 \leq 8C_1 \ln^{1/2} N \left(\sum_{k: n_k \leq N} 1 \right)^{1/2},$$

откуда следует (9.55), и предложение доказано. $\square$

Комментарии и литературные указания. Проблематика, связанная с выделением лакунарных подсистем, подробно рассматривается в обзорной статье В. Ф. Гапошкина "Лакунарные ряды и независимые функции" [32]. Напомним содержащиеся в ней наиболее важные результаты, относящиеся к интегрируемости и абсолютной сходимости ряда, построенного по данной системе функций. Ввиду неравенства Хинчина сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ ($x \in [0, 1]$) принадлежит всем пространствам L_p при условии, если последовательность коэффициентов $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Для лакунарных тригонометрических рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x, \quad \text{где} \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1, \quad (9.59)$$

аналогичный результат был получен А. Зигмундом [142]. В связи с этим несколько позднее в работах С. Банаха и С. Сидона возникло понятие лакунарной системы порядка p (короче, S_p -системы), а также S_{∞} -системы. С. Банах доказал, что из всякой ортонормированной последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, такой, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p < \infty$, можно извлечь S_p -подсистему (см. [74] или [39, § 7.2]). Отсюда, в частности, следует возможность выделения S_{∞} -подсистемы из любой равномерно ограниченной ортонормированной системы функций. Следующий более точный результат был получен С.Б. Стечкиным [32, теорема 1.3.1]. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, измеримых на $[0, 1]$, и $p > 2$. Для того, чтобы из нее можно было извлечь S_p -подсистему, необходимо и достаточно существование такой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, что $\|f_{n_k}\|_p \leq D$ ($k = 1, 2, \dots$) и $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 .

Изучение абсолютной сходимости лакунарных рядов началось с работы П. Фату [98], в которой доказано, что всякий сходящийся всюду ряд вида (9.59), где $q > 3$, сходится абсолютно. Далее С. Сидон установил то же самое свойство, но уже для любого лакунарного ряда (9.59), определяющего ограниченную функцию [135]. А. Зигмунд доказал локальный вариант этой теоремы [143]. Чуть раньше аналогичные результаты были получены для системы Радемахера и некоторых других конкретных лакунарных систем функций [107]. Как естественное обобщение всех этих результатов возникли понятия системы Сидона и системы Сидона-Зигмунда. Следующие широкие достаточные условия, обеспечивающие возможность выделения подсистем Сидона и Сидона-Зигмунда, были получены В. Ф. Гапошкиным [32, теоремы 1.4.1 и 1.4.2]. Пусть система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, измеримых на $[0, 1]$, обладает следующими свойствами: 1) $\|f_n\|_2 = 1$ ($n = 1, 2, \dots$); 2) $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots; x \in [0, 1]$); 3) существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, что $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 . Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить как подсистему Сидона, так и подсистему Сидона-Зигмунда. Если же дополнительно подпоследовательность из условия 3) такова, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_F f_{n_k}^2(x) dx > 0 \quad \text{для любого } F \subset [0, 1], m(F) > 0,$$

то из $\{f_n\}$ можно выделить подсистему Сидона-Зигмунда в узком смысле.

Теоремы 9.1 и 9.4, а также следствия 9.4 и 9.5, обеспечивая лакунарность выделенной подсистемы сразу в обоих отношениях, а также некоторые дополнительные свойства, усиливают и дополняют приведенные утверждения. Все эти результаты, а также теорема 9.3, играющая ключевую роль при доказательстве теоремы 9.1, были получены в работе автора [13]. Лемма 9.1 была доказана в [11], при ее доказательстве используется идея доказательства леммы А из работы [33]. Утверждение следствия 9.2 о возможности выделения экспоненциально интегрируемых подсистем было анонсировано В. Ф. Гапошкиным [32, теорема 1.3.2]; подробное доказательство было опубликовано в работе [11]. Заметим также, что теорема 9.1 нашла ряд интересных приложений как при изучении самой системы Радемахера (см. следующий параграф), так и при рассмотрении геометрических свойств симметричных пространств [96].

Перейдем теперь к вопросам выделения лакунарных подсистем из конечных наборах с.в. Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^N$ — набор с.в. Требуется найти как можно большее $s = s(N)$ со следующим свойством: существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s \subset \{f_n\}_{n=1}^N$, удовлетворяющий некоторому условию лакулярности с константой, не зависящей от N . Следующая теорема о плотности конечных подсистем Сидона была доказана Б. С. Кашиным (см. [40] или [41, теорема 9.4.9]). Пусть $\{f_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, \dots, N; x \in [0, 1]$). Тогда существует такая подсистема $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s \subset \{f_n\}_{n=1}^N$ ($1 \leq n_1 < \dots < n_s \leq N$), что $s \geq \max\{[1/6 \log_2 N], 1\}$

и для любых $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, s$) выполнено:

$$D^{-1} \left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^s |a_i| \leq 4D \left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_{\infty}.$$

Несколько ранее аналогичный, но более слабый результат (когда $s \geq C(D) \ln \ln N$) был доказан В. Д. Мильманом и Х. Вольфсоном [122]. Теорема 9.6 показывает, что, более того, любой такой набор содержит подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ той же самой "логарифмической плотности" (т.е. $s \geq C \log_2 N$), эквивалентную по распределению системе s функций Радемахера с константой, не зависящей от N . Уже после того, как автор доказал эту теорему в работе [13] (результат был также анонсирован в заметке [12]), он узнал, что еще раньше аналогичный результат с заменой эквивалентности по распределению на эквивалентность L_p -норм был доказан С. Шареком [139, Theorem 1]. Последний результат формально, конечно, слабее, чем теорема 9.6. Однако, учитывая теорему 8.2 и замечание 8.3, можно заключить, что эти утверждения по сути дела эквивалентны. В той же работе С. Шарек доказал следующую теорему о плотности подсистем, мажорируемых системой Радемахера в L_p для фиксированного $p > 0$ [139, Theorem 2]. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^N$ — ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, \dots, N$; $x \in [0, 1]$). Для произвольного $p > 0$ положим $p^* = 4$, если $p < 2$ и p^* — наименьшее четное целое число, не меньшее p , если $p \geq 2$. Пусть $s \leq N^{1/p^*}$. Тогда существует такой набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s \subset \{f_n\}_{n=1}^N$ ($1 \leq n_1 < \dots < n_s \leq N$), что для любых $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, s$)

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_{L_p} \leq C \left\| \sum_{i=1}^s a_i r_i \right\|_{L_p},$$

где $C > 0$ зависит только от D . Заметим, что результаты работы [139] верны также и для векторнозначных рядов Радемахера. Комбинаторная лемма 9.2, играющая существенную роль при доказательстве теоремы 9.6, принадлежит Б. С. Кашину (см. [40] или [41, лемма 9.4.1]). Другая важная лемма 9.3 о продолжении равномерно ограниченного набора функций до мультипликативного была доказана в [13]. И наконец, предложение 9.1 о точности по порядку утверждений теоремы Кашина и теоремы 9.6 было доказано Б. С. Стечкиным [60]. Доказательство следует изложению этого результата в монографии [41] (см. соотношения (71) — (73) в главе 4).

§ 10

ПРОСТРАНСТВО МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ, ПОРОЖДЕННОЕ СИСТЕМОЙ РАДЕМАХЕРА

Пусть X — симметричное пространство функций на $[0, 1]$. Напомним, что $\mathcal{R}(X)$ — его замкнутое подпространство, состоящее из всех функций $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in X$, представимых в виде: $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t)$, где по-прежнему $r_k(t)$ — функции Радемахера.

Определение 10.1. *Пространством мультипликаторов, порожденным системой Радемахера в с.п. X , будем называть множество $\Lambda(\mathcal{R}, X)$, состоящее из всех измеримых $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $f \cdot g \in X$ для всех функций $g \in \mathcal{R}(X)$.*

Предложение 10.1. *Для любого с.п. X на $[0, 1]$ множество $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ — банахова функциональная решетка относительно нормы*

$$\|f\|_{\Lambda} = \sup \{ \|f \cdot g\|_X : g \in \mathcal{R}(X), \|g\|_X \leq 1 \}.$$

Доказательство. Прежде всего, применяя принцип равномерной ограниченности Банаха-Штейнгауза, легко убедиться в том, что $\|f\|_{\Lambda} < \infty$ для любой функции $f \in \Lambda(\mathcal{R}, X)$. Так как все свойства нормы для этого функционала, а также ее монотонность проверяются непосредственно, осталось показать, что пространство $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ полно.

Пусть последовательность $\{f_n\} \subset \Lambda(\mathcal{R}, X)$ фундаментальна в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$. Из определения нормы в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ сразу следует, что для каждой $g \in \mathcal{R}(X)$ последовательность $f_n \cdot g$ фундаментальна в

пространстве X . Так как X полно и из сходимости в каждом с.п. вытекает сходимость по мере, то существует такая функция $f \in X$, что $\|f_n g - f g\|_X \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой $g \in \mathcal{R}(X)$. Используя снова фундаментальность $\{f_n\}$ в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$, найдем для любого $\varepsilon > 0$ такой номер N , что для всех $m \geq n \geq N$ и $g \in \mathcal{R}(X)$, $\|g\|_X \leq 1$, выполнено: $\|f_n g - f_m g\|_X \leq \varepsilon$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим $\|f_n g - f g\|_X \leq \varepsilon$, если $g \in \mathcal{R}(X)$, $\|g\|_X \leq 1$, или эквивалентно $\|f_n - f\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)} \leq \varepsilon$. Тем самым $f \in \Lambda(\mathcal{R}, X)$ и $f_n \rightarrow f$ в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$. $\square$

Название $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ объясняется тем, что это множество можно рассматривать как пространство мультипликаторов в X , ограниченно действующих из подпространства $\mathcal{R}(X)$ во все пространство. В этом параграфе в центре нашего внимания будут вопросы, так или иначе связанные с симметричностью решетки $\Lambda(\mathcal{R}, X)$. Во-первых, мы покажем, что для "большинства" с. п. она не симметрична, т.е. из принадлежности функции $f(t)$ к $\Lambda(\mathcal{R}, X)$, вообще говоря, не следует, что к $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ принадлежит невозрастающая перестановка $f^*(t)$ ее модуля. В связи с этим будет введено определение симметричного ядра $\text{Sym}(E)$ банаховой решетки измеримых функций E как наибольшего симметричного пространства, содержащегося в E . Нас, прежде всего, будет интересовать симметричное ядро $\text{Sym}(X)$ пространства мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$; в случае максимальных с.п. мы получим его описание.

Ситуация изменяется в том случае, когда X расположено достаточно "близко" к пространству L_∞ . Будут получены простые и легко проверяемые необходимые и достаточные условия, при которых $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$ (с эквивалентностью норм). Для других пространств, несколько более "далеких" от L_∞ (например, некоторых экспоненциальных пространств Орлича), пространство мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ также симметрично, хотя и не совпадает при этом с L_∞ .

Напомним сначала, что по лемме 3.2

$$\|x\|_{L_{N_2}} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t) \ln^{-1/2}(e/t),$$

где по-прежнему L_{N_2} — пространство Орлича, построенное по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$. Поэтому существует такое $C > 0$, что для всех $x \in L_{N_2}$ и $0 < t \leq 1$

$$x^*(t) \leq C \|x\|_{L_{N_2}} \cdot \ln^{1/2}(e/t). \quad (10.1)$$

Если теперь $X \supset G$, где G — сепарабельная часть пространства Орлича L_{N_2} , то по теореме 3.2 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(L_{N_2}) = \ell_2$, и, применяя последнее неравенство для сумм Радемахера, получим, что с некоторым $K > 0$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right)^*(t) \leq K \cdot \|(a_n)\|_2 \cdot \ln^{1/2}(e/t) \quad (0 < t \leq 1). \quad (10.2)$$

Начнем со следующей важной леммы о сравнении мультипликаторных норм характеристических функций.

Лемма 10.1. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$ с фундаментальной функцией φ_X , $X \supset G$. Тогда существует такая константа $c > 0$, что для всякого $n = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$) можно найти измеримые множества B_n и D_n одинаковой меры $n2^{-n}$, удовлетворяющие неравенству

$$c \cdot \frac{\|\chi_{B_n}\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)}}{\|\chi_{D_n}\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)}} \leq \frac{1}{n^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{\varphi_X(n2^{-n})} \int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t} dt \right) + \left(\frac{\varphi_X(2^{-n})}{\varphi_X(n2^{-n})} \right)^{1/2}. \quad (10.3)$$

Доказательство. Во-первых, по условию $\mathcal{R}(X) = \ell_2$, т.е. нормы $\|\sum a_n r_n\|_X$ и $\|(a_n)\|_2$ эквивалентны. Следовательно,

$$\|f\|_{\Lambda} \asymp \sup \left\{ \|fg\|_X : g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k \in X, \|(c_n)\|_2 \leq 1 \right\}. \quad (10.4)$$

Пусть J — пока произвольное подмножество множества $\{1, 2, \dots, 2^n\}$, состоящее из n элементов, а $A = \cup_{j \in J} \Delta_j$ — соответствующее объединение интервалов $\Delta^j := \Delta_n^j = ((j-1)2^{-n}, j2^{-n})$

ранга n ($1 \leq j \leq 2^n$). Заметим, что $m(A) = n2^{-n}$. Если χ_A — характеристическая функция последнего множества, то ввиду (10.4)

$$\begin{aligned} \|\chi_A\|_\Lambda &\leq C \sup \left\{ \left\| \chi_A \sum_{i=1}^{\infty} b_i r_i \right\|_X : \|(b_i)\|_2 \leq 1 \right\} \\ &\leq C \sup \left\{ \left\| \chi_A \sum_{i=1}^n b_i r_i \right\|_X : \|(b_i)\|_2 \leq 1 \right\} \\ &+ C \sup \left\{ \left\| \chi_A \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right\|_X : \|(b_i)\|_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Оценим сначала второе слагаемое. Так как для любого $\lambda > 0$

$$m(\{t : \chi_{[0, n2^{-n}]}(t) \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i(t) \right| > \lambda\}) = \frac{n}{2^n} m(\{t : \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i(t) \right| > \lambda\}),$$

то

$$\left(\chi_{[0, n2^{-n}]} \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right)^*(t) = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right)^*(2^n t/n), \quad 0 \leq t \leq n/2^n.$$

Заметим, что функции

$$\chi_A(t) \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i(t) \quad \text{и} \quad \chi_{[0, n2^{-n}]}(t) \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i(t)$$

равноизмеримы. Поэтому ввиду того, что $\|x\| \leq \|x\|_{\Lambda(\varphi_X)}$ [46, теорема 2.5.5], а также неравенства (10.2)

$$\begin{aligned} \left\| \chi_A \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right\|_X &= \left\| \chi_{[0, n2^{-n}]} \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right\|_X \\ &\leq \left\| \chi_{[0, n2^{-n}]} \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right\|_{\Lambda(\varphi_X)} \\ &= \int_0^{n/2^n} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right)^* \left(\frac{2^n t}{n} \right) \varphi_X'(t) dt \\ &\leq K \|(b_i)\|_2 \int_0^{n/2^n} \ln^{1/2} \left(\frac{ne}{2^n t} \right) \varphi_X'(t) dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем, что последний интеграл равен величине

$$\begin{aligned} \varphi_X \left(\frac{n}{2^n} \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \ln^{1/2} \left(\frac{ne}{2^n t} \right) \varphi_X(t) &+ \frac{1}{2} \int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t \ln^{1/2}(ne/2^n t)} dt \\ &\leq \varphi_X \left(\frac{n}{2^n} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

В итоге

$$\left\| \chi_A \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i r_i \right\|_X \leq K \|(b_i)\|_2 \left\{ \varphi_X \left(\frac{n}{2^n} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t} dt \right\}. \quad (10.6)$$

Перейдем теперь к рассмотрению первого слагаемого в (10.5). Пусть a_{ij} — значение функции r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на двоичном интервале Δ^j ($1 \leq j \leq 2^n$). Так как $n = 2^m$, то мы можем выбрать множество $J_1 \subset \{1, \dots, 2^n\}$, $\text{card } J_1 = n$, так, чтобы матрица $n^{-1/2}(a_{ij})_{j \in J_1}$ размера $n \times n$ была

ортогональна. Тогда для $B_n = \cup_{j \in J_1} \Delta_j$ получим

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \left\| \chi_{B_n} \sum_{i=1}^n b_i r_i \right\|_X : \|(b_i)_1^n\|_2 \leq 1 \right\} &= \sup \left\{ \left\| \sum_{j \in J_1} \left(\sum_{i=1}^n b_i r_i \right) \chi_{\Delta_j} \right\|_X : \|(b_i)_1^n\|_2 \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\| \sum_{j \in J_1} c_j \chi_{\Delta_j} \right\|_X : \|(c_j)_{j \in J_1}\|_2 \leq n^{1/2} \right\} \\ &= n^{1/2} \sup \left\{ \left\| \sum_{j \in J_1} c_j \chi_{\Delta_j} \right\|_X : \|(c_j)_{j \in J_1}\|_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду (10.5) и (10.6)

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_n}\|_\Lambda &\leq K \left\{ \varphi_X \left(\frac{n}{2^n} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t} dt \right\} \\ &+ n^{1/2} \sup \left\{ \left\| \sum_{j \in J_1} c_j \chi_{\Delta_j} \right\|_X : \|(c_j)_{j \in J_1}\|_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

С другой стороны, возьмем множество $J_2 \subset \{1, \dots, 2^n\}$, $\text{card } J_2 = n$, такое, что все элементы каждого столбца матрицы $(a_{ij})_{j \in J_2}$ размера $n \times n$, кроме одного, равны 1. Тогда для каждого $j \in J_2$ мы имеем: $\sum_{i=1}^n a_{ij} = n - 2$, и поэтому, если $D_n = \cup_{j \in J_2} \Delta_j$, то

$$\begin{aligned} \|\chi_{D_n}\|_\Lambda &\geq c_1 \left\| \sum_{j \in J_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{n^{1/2}} \right) \chi_{\Delta_j} \right\|_X \\ &= c_1 (n^{1/2} - 2n^{-1/2}) \cdot \varphi_X(n2^{-n}). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Из (10.7) и (10.8) вытекает, что с некоторым $c > 0$, не зависящим от n , выполнено:

$$\begin{aligned} c \cdot \frac{\|\chi_{B_n}\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)}}{\|\chi_{D_n}\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)}} &\leq \frac{1}{n^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{\varphi_X(n2^{-n})} \int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t} dt \right) \\ &+ \varphi_X(n2^{-n})^{-1} \sup \left\{ \left\| \sum_{j \in J_1} c_j \chi_{\Delta_j} \right\|_X : \|(c_j)_{j \in J_1}\|_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Оценим второе слагаемое из правой части последнего соотношения. Пусть X_n — n -мерное подпространство X , порожденное функциями χ_{Δ_j} ($j \in J_1$). Рассмотрим линейный оператор $T: \mathbb{R}^n \rightarrow X_n$, определенный соотношением $T(c_j) = \sum_{j \in J_1} c_j \chi_{\Delta_j}$. Легко видеть, что $\|T\|_{\ell_\infty^n \rightarrow X_n} = \varphi_X(n2^{-n})$ и $\|T\|_{\ell_1^n \rightarrow X_n} = \varphi_X(2^{-n})$. Так как сопряженный оператор $T^*: X_n^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается равенством $T^*x^* = (x^*(\chi_{\Delta_j}))$ и

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

то $\|T^*\|_{X_n^* \rightarrow \ell_2^n} \leq \|T^*\|_{X_n^* \rightarrow \ell_1^n}^{1/2} \cdot \|T^*\|_{X_n^* \rightarrow \ell_\infty^n}^{1/2}$. Поэтому $\|T\|_{\ell_2^n \rightarrow X_n} \leq \|T\|_{\ell_\infty^n \rightarrow X_n}^{1/2} \cdot \|T\|_{\ell_1^n \rightarrow X_n}^{1/2}$, и таким образом,

$$\begin{aligned} &\varphi_X(n2^{-n})^{-1} \cdot \sup \left\{ \left\| \sum_{j \in J_1} c_j \chi_{\Delta_j} \right\|_X : \|(c_j)_{j \in J_1}\|_2 \leq 1 \right\} \\ &= \|T\|_{\ell_\infty^n \rightarrow X_n}^{-1} \cdot \|T\|_{\ell_2^n \rightarrow X_n} \leq \|T\|_{\ell_\infty^n \rightarrow X_n}^{-1/2} \cdot \|T\|_{\ell_1^n \rightarrow X_n}^{1/2} = \left(\frac{\varphi_X(2^{-n})}{\varphi_X(n2^{-n})} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10.9) получаем утверждение леммы. $\square$

Теперь уже нетрудно показать, что для с.п. X , достаточно "далеких" от L_∞ , банахова решетка $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ не симметрична.

Теорема 10.1. *Если нижний показатель растяжения фундаментальной функции с.п. X положителен, т.е. $\gamma_{\varphi_X} > 0$, то $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ — не симметричное пространство. В частности, это выполнено, если нижний индекс Бойда $\alpha_X > 0$.*

Доказательство. Если $\gamma_{\varphi_X} > 0$, то для каждого $\alpha \in (0, \gamma_{\varphi_X})$ существует константа $C = C(\alpha) > 0$ такая, что для всех $0 < s, t \leq 1$

$$\frac{\varphi_X(st)}{\varphi_X(s)} \leq C t^\alpha. \quad (10.10)$$

Отсюда $\varphi_X(t) \leq C \varphi_X(1) t^\alpha$, и значит, $\Lambda(t^\alpha) \subset \Lambda(\varphi_X)$. Нетрудно проверить, что $L_p \subset \Lambda(t^\alpha)$, если $p > 1/\alpha$ (см. также [46, теорема 2.5.6]). Так как $L_{N_2} \subset L_p$ для всех $p < \infty$ и $\Lambda(\varphi_X) \subset X$, то $L_{N_2} \subset X$. Таким образом, выполнено условие предыдущей леммы, и поэтому для каждого $n = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$) существуют измеримые множества B_n и D_n меры $n2^{-n}$ такие, что справедливо неравенство (10.3).

Из (10.10) следует, что $\varphi_X(2^{-n})/\varphi_X(n2^{-n}) \leq C n^{-\alpha}$. Тем самым второе слагаемое из правой части (10.3) в этом случае стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Что касается первого слагаемого, то ввиду условия $\gamma_{\varphi_X} > 0$ мы можем применить [46, следствие 2, с. 80], и значит, для некоторого $C > 0$

$$\int_0^{n/2^n} \frac{\varphi_X(t)}{t} dt \leq C \varphi_X(n/2^n).$$

Следовательно, это слагаемое из правой части (10.3) ограничено величиной $C n^{-1/2}$. Таким образом, отношение $\|\chi_{B_n}\|_\Lambda \|\chi_{D_n}\|_\Lambda^{-1}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, и тем самым пространство $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ не симметрично.

Последнее утверждение теоремы сразу следует из неравенства $\gamma_{\varphi_X} \geq \alpha_X$. $\square$

Ввиду только что доказанной теоремы для "большинства" с.п. X (например, для L_p , $1 \leq p < \infty$) пространство мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ не симметрично. В связи с этим становится естественным интерес к проблеме описания самого большого с.п., вложенного в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$.

Далее будет использоваться следующее обозначение. Если $x(t)$ и $y(t)$ — две измеримые функции на $[0, 1]$, то мы пишем: $y \simeq x$, если модули этих функций равноизмеримы, т.е. для любого $\tau > 0$

$$m\{t \in [0, 1] : |x(t)| > \tau\} = m\{t \in [0, 1] : |y(t)| > \tau\}.$$

Определение 10.2. Пусть E — банахова функциональная решетка измеримых функций на $[0, 1]$. Симметричным ядром E будет называться множество

$$\text{Sym}(E) = \{x \in E : \text{если } y \simeq x, \text{ то } y \in E\}.$$

Для упрощения обозначений вместо $\text{Sym}(\Lambda(\mathcal{R}, X))$ мы будем писать просто $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$.

Предложение 10.2. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$. Симметричное ядро $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ пространства мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$, снабженное нормой

$$\|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} := \sup_{z: z \simeq x} \|z\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)}, \quad (10.11)$$

является наибольшим с.п., непрерывно вложенным в пространство $\Lambda(\mathcal{R}, X)$.

Доказательство. Предположим, что $x \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$. Для произвольного $z \simeq x$ рассмотрим оператор T_z , определенный соотношением: $T_z y(t) := z(t)y(t)$, где $y \in \mathcal{R}(X)$. Так как $z \in \Lambda(\mathcal{R}, X)$, то T_z ограниченно действует из $\mathcal{R}(X)$ в X . Для заданных $y \in \mathcal{R}(X)$ и $\varepsilon > 0$ существует сохраняющее меру преобразование $\omega: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такое, что $\| |y| - y^*(\omega) \|_\infty \leq \varepsilon$ [46, лемма 2.2.1, с. 84]. Если теперь $x \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ и $y \in \mathcal{R}(X)$, то $x^*(\omega)y \in X$, и кроме того,

$$\begin{aligned} \|T_z^* y^*\|_X &= \|z^*(\omega)y^*(\omega)\|_X \\ &\leq \|z^*(\omega)y\|_X + \|z^*(\omega)(|y| - y^*(\omega))\|_X \\ &\leq \|x^*(\omega)y\|_X + \varepsilon \|x\|_X. \end{aligned}$$

Тем самым ввиду неравенства [46, свойство 10°, с. 93]

$$(T_z y)^*(2t) \leq T_z^* y^*(t), \quad 0 < t < 1/2,$$

и ограниченности оператора растяжения мы получаем:

$$\sup_{z \simeq x} \|T_z y\|_X \leq 2 \|T_z^* y^*\|_X \leq 2 (\|x^*(\omega)y\|_X + \varepsilon \|x\|_X) < \infty.$$

В итоге семейство операторов $\{T_z : z \simeq x\}$ поточечно ограничено по норме, и поэтому по теореме Банаха-Штейнгауза оно равномерно ограничено. Это означает, что правая часть равенства (10.11) конечна для любого $x \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$. Проверим, что она удовлетворяет неравенству треугольника.

Пусть x_1 и x_2 принадлежат множеству $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ и $z \simeq x_1 + x_2$. Опять ввиду [46, лемма 2.2.1, с. 84] для любого $\varepsilon > 0$ существует сохраняющее меру преобразование $\tau: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такое, что $\| |z| - |x_1(\tau) + x_2(\tau)| \|_\infty \leq \varepsilon$. Следовательно, для произвольного $y \in \mathcal{R}(X)$, $\|y\|_X \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|zy\|_X &\leq \|(|z| - |x_1(\tau) + x_2(\tau)|)y\|_X + \|(x_1(\tau) + x_2(\tau))y\|_X \\ &\leq \varepsilon + \|x_1(\tau)y\|_X + \|x_2(\tau)y\|_X \leq \varepsilon + \|x_1\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} + \|x_2\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)}. \end{aligned}$$

Тем самым $x_1 + x_2 \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ и

$$\|x_1 + x_2\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \leq \|x_1\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} + \|x_2\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то неравенство доказано. Остальные свойства нормы выполняются очевидным образом.

То, что $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ — наибольшее с.п., непрерывно вложенное в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$, непосредственно следует из определения симметричного ядра и его нормы. Тем самым осталось показать полноту

Если $\{x_n\} \subset \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ — фундаментальная последовательность в $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$, то она фундаментальна и в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$, и значит, $\|x_n - x\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)} \rightarrow 0$ для некоторого $x \in \Lambda(\mathcal{R}, X)$. Ясно, что для произвольного сохраняющего меру преобразования $\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ последовательность $\{x_n(\lambda)\} \subset \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ и также фундаментальна в этом пространстве. Следовательно, опять существует функция $x_\lambda \in \Lambda(\mathcal{R}, X)$, для которой $\|x_n(\lambda) - x_\lambda\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)} \rightarrow 0$. Так как из сходимости в любой банаховой решетке вытекает сходимость по мере, то $x_\lambda(t) = x(\lambda(t))$ для п.в. $t \in [0, 1]$. Еще раз используя фундаментальность $\{x_n\}$ в $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что для всех $m \geq n \geq N$ и любого сохраняющего меру отображения $\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ выполнено:

$$\|x_n(\lambda) - x_m(\lambda)\|_\Lambda \leq \varepsilon.$$

После перехода к пределу при $m \rightarrow \infty$ получим

$$\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\|_\Lambda \leq \varepsilon. \quad (10.12)$$

Пусть $z \simeq x_n - x$ для фиксированного $n \geq N$. Как и ранее, можно найти сохраняющее меру отображение $\lambda_0: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такое, что $\| |z| - |x_n(\lambda_0) - x(\lambda_0)| \|_\infty \leq \varepsilon$. Тогда, рассуждая точно так же, как при доказательстве неравенства треугольника, для произвольного $y \in \mathcal{R}(X)$, $\|y\|_X \leq 1$, ввиду (10.12) получим

$$\|zy\|_X \leq \varepsilon + \|(x_n(\lambda_0) - x(\lambda_0))y\|_X \leq 2\varepsilon,$$

или $\|x_n - x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \leq 2\varepsilon$. Отсюда следует, что $x \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ и $x_n \rightarrow x$ в $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$. $\square$

Из предложения 10.2 и того, что $(xy)^*(2t) \leq x^*(t)y^*(t)$ ($0 < t \leq 1/2$) [46, свойство 10°, с. 93] вытекает следующее описание симметричного ядра $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ пространства мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$.

Следствие 10.1. Для любого с.п. X пространство $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ состоит из всех $x = x(t)$, удовлетворяющих условию: если $\sum_{n=1}^\infty a_n r_n \in \mathcal{R}(X)$, то $x^*(\sum_{n=1}^\infty a_n r_n)^* \in X$. Кроме того,

$$\|f\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \asymp \sup_{\|\sum a_n r_n\|_X \leq 1} \left\| f^* \left(\sum_{n=1}^\infty a_n r_n \right)^* \right\|_X.$$

Следующее определение понадобится нам при описании симметричного ядра пространства мультипликаторов.

Определение 10.3. Если X — с.п. на $[0, 1]$ такое, что $L_{N_2} \subset X$, то множество $X_{\ln^{1/2}}$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, для которых

$$\|x\|_{\ln^{1/2}} := \|x^*(t) \ln^{1/2}(e/t)\|_X < \infty.$$

Так как ввиду леммы 3.2 условие $L_{N_2} \subset X$ эквивалентно тому, что $\ln^{1/2}(e/t) \in X$, множество $X_{\ln^{1/2}}$ всегда содержит пространство L_∞ .

Функционал $\|\cdot\|_{\ln^{1/2}}$ является лишь квазинормой (неравенство треугольника для него выполняется с некоторой константой). В то же время, если $X \in \mathcal{I}(L_1, L_\infty)$, то он эквивалентен норме, и поэтому $X_{\ln^{1/2}}$ становится с.п. Действительно, $(L_1, L_\infty) - \mathcal{K}$ -монотонная пара, и значит, по теореме Брудного-Кругляка (см. § 0.5 или подробнее [29, теорема 15.1]) $X = (L_1, L_\infty)_F^K$ для некоторого параметра $\mathcal{K}$ -метода F . Так как

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty) = \int_0^t x^*(s) ds$$

[26, теорема 5.2.1], а функция $\ln^{1/2}(e/t)$ убывает, то мы получаем, что

$$\|x\|_{\ln^{1/2}} \asymp \left\| \left(\int_0^{2^k} x^*(t) \ln^{1/2}(e/t) dt \right)_k \right\|_F.$$

Осталось заметить, что правая часть последнего соотношения субаддитивна относительно функции $x(t)$ [46, свойство 8°, с. 89].

Теорема 10.2. Пусть $X - \text{с.п. на } [0, 1], L_{N_2} \subset X$. Тогда

$$X_{\ln^{1/2}} \subset \text{Sym}(\mathcal{R}, X) \subset (X'')_{\ln^{1/2}}.$$

Доказательство. Так как $L_{N_2} \subset X$, то по теореме 3.2 $\mathcal{R}(X) = \ell_2$. Предположим сначала, что $x^*(t) \ln^{1/2}(e/t) \in X$. Если $(a_n) \in \ell_2$, то применяя (10.2), получаем, что для каждого $0 < t \leq 1$

$$x^*(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right)^*(t) \leq K \|(a_n)\|_2 x^*(t) \ln^{1/2}(e/t).$$

Тем самым $x^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right)^* \in X$. Отсюда по следствию 10.1 $x \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ и

$$\|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \leq C_1 \|x\|_{X_{\ln^{1/2}}}.$$

Пусть теперь $x \in \text{Sym}(\mathcal{R}, X)$. Обозначим $v_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n r_i$. Так как $\mathcal{R}(X) = \ell_2$, то $\sup_{n=1,2,\dots} \|v_n\|_X < \infty$, и значит, по следствию 10.1

$$\|x^* v_n^*\|_X \leq C_2 \|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)}. \quad (10.13)$$

Кроме того, как и при доказательстве теоремы 3.2, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^*(t) \geq c \ln^{1/2}(e/t) \quad (0 < t \leq 1).$$

Таким образом, для некоторой константы $C_3 > 0$

$$x^*(t) \ln^{1/2}(e/t) \leq C_3 x^*(t) \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^*(t) \quad (0 < t \leq 1).$$

Следовательно, так как X'' максимально, то ввиду (10.13) $x^*(t) \ln^{1/2}(e/t) \in X''$ и

$$\|x^*(t) \ln^{1/2}(e/t)\|_{X''} \leq C_3 \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^* v_n^*\|_X \leq C_2 C_3 \|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)}.$$

□

Замечание 10.1. То же самое доказательство показывает, что вложение

$$\text{Sym}(\mathcal{R}, X) \subset (X'')_{\ln^{1/2}}$$

верно и при более слабом условии: $G \subset X$, т.е., если $L_{N_2} \subset X$.

Замечание 10.2. Так как $\text{Sym}(\mathcal{R}, L_1) = (L_1)_{\ln^{1/2}} = L \log^{1/2} L$, то из теоремы 10.2 следует, что для каждого с.п. X

$$L_\infty \subset \text{Sym}(\mathcal{R}, X) \subset L \log^{1/2} L.$$

Если X максимально, то $X = X''$. Тем самым из теоремы 10.2 получаем

Следствие 10.2. Пусть $X - \text{максимальное с.п., такое, что } L_{N_2} \subset X$. Тогда

$$\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = X_{\ln^{1/2}} \quad (\text{нормы эквивалентны}).$$

Следствие 10.2 позволяет находить $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ для различных классов с.п.

Пример 10.1. Для $X = L_p$, $1 \leq p < \infty$, мы имеем

$$\|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \asymp \left(\int_0^1 (x^*(t) \ln^{1/2}(e/t))^p dt \right)^{1/p},$$

т.е. $\text{Sym}(\mathcal{R}, L_p)$ — пространство Зигмунда $L_p(\log L)^{1/2}$ [77, Def. 4.6.11].

Пример 10.2. Рассмотрим более общий класс пространств Лоренца-Зигмунда [77, Def. 4.6.13]. Пространство $X = L_{p,q}(\log L)^\alpha$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, таких, что

$$\|x\|_{p,q,\alpha} = \left(\int_0^1 (t^{1/p} \ln^\alpha(e/t) x^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty,$$

если либо $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, либо $p = q = 1$ и $\alpha \geq 0$, и

$$\|x\|_{p,\infty,\alpha} = \sup_{0 < t \leq 1} t^{1/p} \ln^\alpha(e/t) x^*(t) < \infty,$$

если $1 < p < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В первом случае

$$\|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \asymp \left(\int_0^1 (t^{1/p} \ln^{1/2+\alpha}(e/t) x^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

во втором

$$\|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} t^{1/p} \ln^{1/2+\alpha}(e/t) x^*(t).$$

Таким образом, в обоих случаях $\text{Sym}(\mathcal{R}, L_{p,q}(\log L)^\alpha)$ — пространство Лоренца-Зигмунда $L_{p,q}(\log L)^{1/2+\alpha}$. В частности, если $\alpha = 0$, мы получаем пространство Марцинкевича $L_{p,\infty}$, построенное по степенной функции $t^{1-1/p}$, и тогда $\text{Sym}(\mathcal{R}, L_{p,\infty}) = L_{p,\infty}(\log L)^{1/2}$.

Пример 10.3. Пусть теперь $X = \Lambda_p(\varphi)$ — пространство Лоренца (φ — возрастающая вогнутая функция, $\varphi(0) = 0$, $1 \leq p < \infty$). Вложение $L_{N_2} \subset \Lambda_p(\varphi)$ выполнено, если и только, если $\int_0^1 \ln^{p/2}(e/t) d\varphi(t) < \infty$. В этом случае

$$\|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \asymp \left(\int_0^1 (x^*(t))^p \ln^{p/2}(e/t) d\varphi(t) \right)^{1/p}.$$

Функция $\varphi'(t) \ln^{p/2}(e/t)$ неотрицательна, интегрируема и убывает. Следовательно, $\text{Sym}(\mathcal{R}, \Lambda_p(\varphi))$ является пространством Лоренца $\Lambda_p(\psi_p)$, где

$$\psi_p(s) = \int_0^s \varphi'(t) \ln^{p/2}(e/t) dt.$$

В частности, для $p = 1$ мы получаем: $\text{Sym}(\mathcal{R}, \Lambda(\varphi)) = \Lambda(\psi_1)$.

Пример 10.2 показывает, что для любого $1 < p < \infty$ существует такое с.п. X , что $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = L_p$. Действительно, в качестве X можно взять пространство Зигмунда $L_p(\log L)^{-1/2}$. Рассмотрим более общий вопрос об условиях, при которых с.п. может быть получено как симметричное ядро пространства мультипликаторов Радемахера некоторого с.п. Замечание 10.2 дает нам необходимое условие: $Z \subset L \log^{1/2} L$. Прежде, чем сформулировать утверждение противоположного характера, докажем следующую лемму.

Лемма 10.2. Пусть $\alpha > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда с некоторыми константами, зависящими от α и γ , но не зависящими от функции $x(t)$, измеримой на $[0, 1]$, выполнено:

$$\int_0^1 (x^*(\cdot) \ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt \asymp \int_0^1 x^*(t) \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\gamma < 0$. Так как $\alpha > 0$, то функция $\ln^\alpha(e/t)$ убывает. Поэтому

$$\int_0^1 x^*(t) \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt \leq \int_0^1 (x^*(\cdot) \ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt.$$

Докажем, что с некоторой константой выполнено и противоположное неравенство. Пусть сначала $x(t) = \chi_{(0,a]}(t)$, $0 < a < 1$. Так как для любого $\beta \in \mathbb{R}$ $\int_0^t \ln^\beta(e/s) ds \asymp t \ln^\beta(e/t)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^a (\ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt &= \int_0^a \ln^\gamma\left(\frac{e}{a-t}\right) \ln^\alpha(e/t) dt \\ &\leq \ln^\gamma(e/a) \int_0^a \ln^\alpha(e/t) dt \asymp \int_0^a \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt. \end{aligned}$$

Тем самым для характеристических функций нужное неравенство доказано.

Если перестановка $x^*(t)$ конечнозначна, то ее можно представить следующим образом:

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^N b_k \chi_{(0,a_k]}(t) \quad (b_k > 0, a_1 > a_2 > \dots > a_N \geq 0). \quad (10.14)$$

Тогда ввиду свойств невозрастающей перестановки [46, свойство 14°, с. 95]

$$\int_0^1 (x^*(\cdot) \ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt = \sup_{\omega} \int_0^1 x^*(\omega(t)) \ln^\gamma(e/\omega(t)) \ln^\alpha(e/t) dt,$$

где точная верхняя грань берется по всем сохраняющим меру отображениям $\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Тем самым, используя уже разобранный случай, мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^*(\cdot) \ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt &\leq \sum_{k=1}^N b_k \sup_{\omega} \int_0^1 \chi_{(0,a_k]}(\omega(t)) \ln^\gamma(e/\omega(t)) \ln^\alpha(e/t) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^N b_k \int_0^{a_k} (\ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt \\ &\leq C \sum_{k=1}^N b_k \int_0^{a_k} \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt \\ &= C \int_0^1 x^*(t) \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt. \end{aligned}$$

Произвольная перестановка $x^*(t)$ является пределом возрастающей последовательности функций $x_n^*(t)$ вида (10.14). По-доказанному,

$$\int_0^1 (x_n^*(\cdot) \ln^\gamma(e/\cdot))^*(t) \ln^\alpha(e/t) dt \leq C \int_0^1 x_n^*(t) \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt \leq C \int_0^1 x^*(t) \ln^{\gamma+\alpha}(e/t) dt.$$

В итоге, применяя лемму 3.1, после перехода к пределу в левой части при $n \rightarrow \infty$ приходим к нужному неравенству. $\square$

Теорема 10.3. Пусть Z — такое максимальное с.п., что $Z \in \mathcal{I}(L \log^{1/2} L, L_\infty)$. Тогда существует максимальное с.п. X , для которого $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = Z$.

Доказательство. Для данного Z определим пространство $Z_{\ln^{-1/2}}$ как множество всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, таких, что

$$\|x\|_{\ln^{-1/2}} = \|x^*(t) \ln^{-1/2}(e/t)\|_Z < \infty.$$

Покажем, что функционал $\|\cdot\|_{\ln^{-1/2}}$ эквивалентен норме некоторого с.п. Вычислим сначала $\mathcal{K}$ -функционал для пары $(L \log^{1/2} L, L_\infty)$. Пространства L_∞ и $L \log^{1/2} L$ являются пространствами Лоренца. Действительно, $L_\infty = \Lambda(\varphi_0)$, где $\varphi_0(t) = 1$, и, как легко проверить, $L \log^{1/2} L = \Lambda(\varphi_1)$, где $\varphi_1(t) = t \ln^{1/2}(e/t)$. Так как функция φ_0/φ_1 убывает, то ввиду [46, теорема 2.5.9] для всех $t \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) &= \int_0^1 x^*(s) d(\min\{\varphi_1(s), t\varphi_0(s)\}) \\ &= \int_0^{s(t)} x^*(s) d(s \ln^{1/2}(e/s)), \end{aligned}$$

где $s = s(t)$ удовлетворяет равенству: $s \ln^{1/2}(e/s) = t$, откуда $s(t) \asymp t \ln^{-1/2}(e/t)$. Ввиду того, что производная $(s \ln^{1/2}(e/s))' \asymp \ln^{1/2}(e/s)$, в итоге получаем

$$\mathcal{K}(t, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) \asymp \int_0^{t \ln^{-1/2}(e/t)} x^*(s) \ln^{1/2}(e/s) ds \quad (0 < t \leq 1). \quad (10.15)$$

Так как $Z \in \mathcal{I}(L \log^{1/2} L, L_\infty)$, а эта пара $\mathcal{K}$ -монотонна (см. предложение 5.2), то опять ввиду теоремы Брудного-Кругляка существует банахова решетка E двусторонних последовательностей, такая, что $(\min(1, 2^k))_{k=-\infty}^\infty \in E$ и

$$\|x\|_Z \asymp \|(\mathcal{K}(2^k, x; L \log^{1/2} L, L_\infty))_{k=-\infty}^\infty\|_E. \quad (10.16)$$

Обозначим через $\{e_k\}_{k=-\infty}^\infty$ стандартный базис в пространстве последовательностей E . Так как $L_\infty \subset L \log^{1/2} L$ с константой 1, то $\mathcal{K}(t, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) = \|x\|_{L \log^{1/2} L}$, если $t \geq 1$. Кроме того, ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала по t [26, лемма 3.1.1]

$$\mathcal{K}(1, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) \leq 2 \mathcal{K}(2^{-1}, x; L \log^{1/2} L, L_\infty).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^\infty \mathcal{K}(2^k, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) e_k \right\|_E &= \mathcal{K}(1, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) \left\| \sum_{k=0}^\infty e_k \right\|_E \\ &\leq C \mathcal{K}(2^{-1}, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) \|e_{-1}\|_E \\ &\leq C \left\| \sum_{k=-1}^{-\infty} \mathcal{K}(2^k, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) e_k \right\|_E. \end{aligned}$$

Таким образом, из (10.16) получаем:

$$\|x\|_Z \asymp \left\| \sum_{k=-1}^{-\infty} \mathcal{K}(2^k, x; L \log^{1/2} L, L_\infty) e_k \right\|_E,$$

и значит, ввиду (10.15) и леммы 10.2

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ln^{-1/2}} &\asymp \left\| \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_0^{2^k \ln^{-1/2}(e 2^{-k})} (x^*(\cdot) \ln^{-1/2}(e/\cdot))^*(t) \ln^{1/2}(e/t) dt e_k \right\|_E \\ &\asymp \left\| \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_0^{2^k \ln^{-1/2}(e 2^{-k})} x^*(t) dt e_k \right\|_E. \end{aligned}$$

Последнее соотношение показывает, что функционал $\|\cdot\|_{\ln^{-1/2}}$ эквивалентен некоторой симметричной норме [46, свойство 8°, с. 89]. Более того, из него вытекает, что $Z_{\ln^{-1/2}} \in \mathcal{I}(L_1, L_\infty)$.

В заключение проверим, что пространство $X := Z_{\ln^{-1/2}}$ максимально. Действительно, если $0 \leq x_n(t) \uparrow x(t)$ п.в. и $\sup_n \|x_n\|_{\ln^{-1/2}} < \infty$, то по лемме 3.1

$$x_n^*(t) \ln^{-1/2}(e/t) \uparrow x^*(t) \ln^{-1/2}(e/t) \text{ п.в. и } \sup_{n=1,2,\dots} \|x_n^* \ln^{-1/2}(e/\cdot)\|_Z < \infty.$$

Так как Z максимально, то $x^* \ln^{-1/2}(e/\cdot) \in Z$, т.е. $x \in X$. Таким образом, по следствию 10.2 мы получаем

$$\begin{aligned} \|x\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} &\asymp \|x^* \ln^{1/2}(e/t)\|_X \\ &= \|(x^*(\cdot) \ln^{1/2}(e/\cdot))^*(t) \ln^{-1/2}(e/t)\|_Z = \|x\|_Z. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим теперь симметричное ядро $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ в случае, когда X — пространство Марцинкевича. Мы найдем условия, при которых $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$ является также пространством Марцинкевича. Полученные результаты будут использоваться далее при изучении пространства мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$.

Теорема 10.4. Пусть φ — квазивогнутая на $[0, 1]$ функция, такая, что соответствующее ей пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ содержит пространство L_{N_2} . Рассмотрим следующие условия:

(i) Существует константа $C > 0$ такая, что для каждого $0 \leq t \leq 1$

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} \ln^{-1}(e/s) ds \leq C \varphi(t);$$

(ii) $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi))$ — пространство Марцинкевича.

Тогда из (i) следует (ii). Если функция $\ln^{-1/2}(e/t)\varphi(t)/t$ убывает, то верно и обратное: из (ii) следует (i).

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено (i). Так как $L_{N_2} \subset M(\varphi)$, то по следствию 10.2 $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi)) = (M(\varphi))_{\ln^{1/2}}$. Кроме того, ввиду предложения 10.2 $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi))$ является с.п., фундаментальная функция которого определяется соотношением:

$$\varphi_{\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi))}(t) \asymp \varphi_{(M(\varphi))_{\ln^{1/2}}}(t) \asymp \Phi(t), \quad \text{где } \Phi(t) = \sup_{0 < s \leq t} \frac{s \ln^{1/2}(e/s)}{\varphi(s)}. \quad (10.17)$$

Ясно, что $\Phi(t)$ возрастает, а $\Phi(t)/t$ убывает, т.е. эта функция квазивогнута. Следовательно, можно рассматривать пространство Марцинкевича $M(t/\Phi)$. Ввиду (10.17) $(M(\varphi))_{\ln^{1/2}} \subset M(t/\Phi)$.

Для доказательства противоположного вложения возьмем $x \in M(t/\Phi)$ с нормой 1. Тогда $\int_0^t x^*(s) ds \leq t/\Phi(t)$ для $0 < t \leq 1$. Поэтому, применяя неравенство $t \ln^{1/2}(e/t)/\varphi(t) \leq \Phi(t)$ и условие (i), мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^t x^*(s) \ln^{1/2}(e/s) ds &= \int_0^t \ln^{1/2}(e/s) d\left(\int_0^s x^*(u) du\right) \\ &\leq \int_0^t \ln^{1/2}(e/s) d(s/\Phi(s)) \\ &= \ln^{1/2}(e/s) \frac{s}{\Phi(s)} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\ln^{-1/2}(e/s)}{\Phi(s)} ds \\ &\leq \varphi(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} \ln^{-1}(e/s) ds \\ &\leq (1 + C/2) \varphi(t), \end{aligned}$$

Отсюда $x \in (M(\varphi))_{\ln^{1/2}}$ и $\|x\|_{(M(\varphi))_{\ln^{1/2}}} \leq 1 + C/2$.

Пусть теперь выполнено (ii) и функция $\ln^{-1/2}(e/t)\varphi(t)/t$ убывает. Так как в этом случае $\Phi(t) = t \ln^{1/2}(e/t)/\varphi(t)$, то ввиду (10.17)

$$\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi)) = M(\varphi(\cdot) \ln^{-1/2}(e/\cdot)). \quad (10.18)$$

Обозначим через $\psi(t)$ наименьшую вогнутую мажоранту функции $\varphi(t) \log^{-1/2}(e/t)$. Тогда ввиду [46, теорема 2.1.1]

$$\varphi(t) \log^{-1/2}(e/t) \leq \psi(t) \leq 2\varphi(t) \log^{-1/2}(e/t), \quad 0 < t \leq 1. \quad (10.19)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$, и значит, функция ψ абсолютно непрерывна [46, лемма 2.1.1]. Интегрируя по частям и учитывая (10.19), получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi'(s) \ln^{1/2}(e/s) ds &\geq \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\psi(s)}{s} \ln^{-1/2}(e/s) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} \ln^{-1}(e/s) ds. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Так как, с одной стороны, ввиду (10.18) и (10.19) $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi)) = M(\psi)$, а с другой, по следствию 10.2 $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi)) = (M(\varphi))_{\ln^{1/2}}$, то $M(\psi) = (M(\varphi))_{\ln^{1/2}}$. Поэтому из того, что $\psi' \in M(\psi)$,

следует: $\psi' \in (M(\varphi))_{\ln^{1/2}}$. Последнее означает, что

$$\int_0^t \psi'(s) \ln^{1/2}(e/s) ds \leq C \varphi(t),$$

и соотношение (i) вытекает теперь из неравенства (10.20). $\square$

Замечание 10.3. Из соотношения (i) теоремы 10.4 вытекает, в частности, что функция φ' принадлежит пространству $L \log \log L$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'(s) \ln \ln(e/s) ds &= \int_0^1 \varphi'(t) \int_t^1 \frac{ds}{s \ln(e/s)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{s} \int_0^s \varphi'(t) dt \ln^{-1}(e/s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{\varphi(s)}{s} \ln^{-1}(e/s) ds \leq C \varphi(1). \end{aligned}$$

Замечание 10.4. Доказательство теоремы 10.4 показывает, что всегда

$$\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi)) \subset M(t/\Phi(\cdot)),$$

где функция $\Phi(t)$ определяется так же, как в соотношении (10.17).

Замечание 10.5. Пространство $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi))$ не обязательно является пространством Марцинкевича. Действительно, если $\varphi(t) = 1$, то $M(\varphi) = L_1$ и $\text{Sym}(\mathcal{R}, L_1)$ совпадает с пространством Лоренца $L \log^{1/2} L = \Lambda(t \ln^{1/2}(e/t))$. Аналогичный результат верен для каждой функции φ такой, что $\ln^{-1/2}(e/t)\varphi(t)/t$ убывает и $\varphi' \notin L \log \log L$. Примером может служить функция $\varphi(t) = (\ln \ln(e^e/t))^{-1}$.

Следствие 10.3. Пусть φ — квазивогнутая функция, нижний показатель растяжения которой $\gamma_\varphi > 0$. Тогда $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi))$ является пространством Марцинкевича.

Доказательство. Достаточно применить теорему 10.4, так как ввиду [46, следствие 3, с. 80]

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} \ln^{-1}(e/s) ds \leq \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds \leq C \varphi(t).$$

$\square$

Замечание 10.6. Условие следствия 10.3 не является необходимым. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \ln^{-1/p}(e/t)$, где $p > 0$. Она квазивогнута, и, как показывает непосредственное вычисление, $\gamma_\varphi = 0$. Тем не менее, легко проверить, что

$$\int_0^t \frac{\ln^{-1/p}(e/s)}{s} \ln^{-1}(e/s) ds \asymp \ln^{-1/p}(e/t).$$

Поэтому по теореме 10.4 $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi))$ — пространство Марцинкевича, и, более того, ввиду (10.17) $\text{Sym}(\mathcal{R}, M(\varphi)) = M(\psi)$, где $\psi(t) = (\ln(e/t))^{-1/2-1/p}$.

Вернемся к изучению пространства мультипликаторов $\Lambda(\mathcal{R}, X)$. Прежде всего, нас будет интересовать вопрос, когда оно является симметричным. Теорема 10.1 показывает, что это возможно лишь, если нижний показатель растяжения фундаментальной функции пространства X равен нулю, т.е. X достаточно "близко" к L_∞ . В частности, $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ может совпадать с L_∞ , наименьшим с.п. на $[0, 1]$. Мы найдем характеризацию таких с.п. X , одновременно показав, что те же самые условия необходимы и достаточны для того, чтобы $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = L_\infty$. Формулируемый ниже результат интересно сравнить с теоремой Родина-Семенова 3.2.

Теорема 10.5. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$;
- (ii) $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = L_\infty$;
- (iii) $\ln^{1/2}(e/t) \notin X^\circ$.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 10.3. Пусть X — такое с.п. на $[0, 1]$, что $\ln^{1/2}(e/t) \notin X^\circ$. Тогда существует константа $c > 0$, зависящая лишь от X , такая, что для каждого $\eta \in (0, 1]$ найдется такое $\delta_0 \in (0, \eta)$, что

$$\frac{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, \eta]}\|_X}{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X} \geq c, \quad \text{для всех } \delta \in (0, \delta_0).$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\gamma := \inf_{0 < \eta \leq 1} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, \eta]}\|_X > 0. \quad (10.21)$$

Действительно, если предположить, что $\gamma = 0$, то можно построить убывающую к нулю последовательность $\{\eta_n\}$, для которой выполнено:

$$\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\eta_{n+1}, \eta_n]}\|_X \leq 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как X — банахово пространство, то отсюда $\ln^{1/2}(e/t) \in X$, и кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[0, \eta_n]}\|_X = 0.$$

Следовательно, $\ln^{1/2}(e/t) \in X^\circ$, что противоречит условию. Тем самым (10.21) доказано.

Положим $\alpha := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X$. Если $\alpha < \infty$, то для данного $\eta \in (0, 1]$ ввиду (10.21) мы имеем $\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, \eta]}\|_X \geq \gamma/2$, при условии, что $\delta > 0$ достаточно мало. Значит, для таких δ

$$\frac{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, \eta]}\|_X}{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X} \geq \frac{\gamma}{2\alpha}.$$

Если же $\alpha = \infty$, то для $0 < \delta < \eta \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, \eta]}\|_X}{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X} &\geq \frac{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X - \|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\eta, 1]}\|_X}{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X} \\ &= 1 - \frac{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\eta, 1]}\|_X}{\|\ln^{1/2}(e/t)\chi_{[\delta, 1]}\|_X} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где $\eta \in (0, 1]$ фиксировано, а $\delta > 0$ достаточно мало. Тем самым нужное нам неравенство верно в обоих случаях, и лемма доказана. $\square$

В следующей лемме нам в очередной раз понадобится $\mathcal{K}$ -функционал

$$\kappa_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \quad (t > 0),$$

построенный по банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) последовательностей. Напомним также формулу Хольмстедта из предложения 2.2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\} &\leq \kappa_a(t) \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где $(a_i^*)_{i=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^\infty$.

Лемма 10.4. Пусть $b^n = 1/n \sum_{k=1}^n e_k$ ($n \in \mathbb{N}$), где e_k — стандартные орты в пространстве числовых последовательностей. С константами, не зависящими от $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$\kappa_{b^n}(t) \asymp \min\left(1, \frac{t}{\sqrt{n}}\right). \quad (10.23)$$

Доказательство. Пусть сначала $t \in \mathbb{N}$. Тогда, если $t^2 \geq n$, то (10.23) — непосредственное следствие соотношения (10.22). Пусть теперь $t^2 < n$. Тогда ввиду (10.22)

$$\alpha^{-1}(v^2 + v(1 - v^2)^{1/2}) \leq \kappa_{b^n}(t) \leq v^2 + v(1 - v^2)^{1/2},$$

где $v = t/\sqrt{n} < 1$. В случае $v \leq 1/\sqrt{2}$ отсюда следует:

$$\frac{v}{\alpha\sqrt{2}} \leq \kappa_{b^n}(t) \leq v^2 + v \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)v.$$

Если же $1/\sqrt{2} < v < 1$, то опять

$$\frac{v}{\alpha\sqrt{2}} \leq \frac{v^2}{\alpha} \leq \kappa_{b^n}(t) \leq 2v.$$

Тем самым (10.23) доказано для натуральных, а, значит, ввиду квазивогнутости $\mathcal{K}$ -функционала по t и для всех $t \geq 1$. Осталось заметить, что при $0 < t \leq 1$ по определению $\mathcal{K}$ -функционала $\kappa_{b^n}(t) = t\|b^n\|_2 = v$. $\square$

Доказательство теоремы 10.5. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) является непосредственным следствием вложений:

$$L_\infty \subset \text{Sym}(\mathcal{R}, X) \subset \Lambda(\mathcal{R}, X),$$

справедливых для любого с.п. X .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что $\ln^{1/2}(e/t) \in X^\circ$. Ввиду (10.1) тогда $L_{N_2} \subset X^\circ$, и значит, по теореме Родина-Семенова 3.2 $\mathcal{R}(X) = \ell_2$. Тем самым по следствию 10.1 мы получаем, что с константами, не зависящими от $0 < a \leq 1$,

$$\|\chi_{[0,a]}\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \asymp \sup_{\|(a_n)\|_2 \leq 1} \left\| \chi_{[0,a]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right)^* \right\|_X. \quad (10.24)$$

Если $\|(a_n)\|_2 \leq 1$, то из (10.2) следует

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right)^*(t) \leq C \ln^{1/2}(e/t) \quad (0 < t \leq 1),$$

откуда

$$\chi_{[0,a]}(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right)^*(t) \leq C \chi_{[0,a]}(t) \ln^{1/2}(e/t) \quad 0 < t, a \leq 1.$$

Но тогда ввиду (10.24)

$$\|\chi_{[0,a]}\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} \leq C \|\chi_{[0,a]} \ln^{1/2}(e/t)\|_X. \quad (10.25)$$

Так как X° сепарабельно, то норма любой функции из этого пространства абсолютна непрерывна. В частности, так как $\ln^{1/2}(e/t) \in X^\circ$, то

$$\|\chi_{[0,a]} \ln^{1/2}(e/t)\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при } a \rightarrow 0.$$

Таким образом, из (10.25) следует, что $\lim_{a \rightarrow 0} \|\chi_{[0,a]}\|_{\text{Sym}(\mathcal{R}, X)} = 0$. В итоге $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) \neq L_\infty$, и импликация доказана.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Докажем сначала существование константы $c_1 > 0$, зависящей только от X и обладающей следующим свойством: для каждого целого $m \geq 0$ найдется такое $n_0 \geq 1$, что для всех $n \geq n_0$ и произвольного двоичного интервала Δ ранга m выполнено неравенство

$$\frac{\|\chi_\Delta \sum_{m+1}^{m+n} r_i\|_X}{\|\sum_{m+1}^{m+n} r_i\|_X} \geq c_1. \quad (10.26)$$

Заметим, что ввиду равноизмеримости функций

$$\chi_\Delta(t) \sum_{i=m+1}^{m+n} r_i(t) \quad \text{и} \quad \chi_{[0, 2^{-m}]}(t) \sum_{i=m+1}^{m+n} r_i(t)$$

соотношение (10.26) достаточно проверить в случае $\Delta = [0, 2^{-m}]$.

Для любых $m \geq 0$ и $n \geq 1$ положим

$$x_{m,n}(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m+n} r_i(t) \quad \text{и} \quad y_{m,n}(t) := x_{m,n}(t) \cdot \chi_{[0, 2^{-m}]}(t).$$

Тогда по определению функций Радемахера

$$y_{m,n}^*(t) = x_{m,n}^*(2^m t) \cdot \chi_{[0, 2^{-m}]}(t), \quad 0 < t \leq 1. \quad (10.27)$$

Кроме того, ввиду следствия 2.2 существуют универсальные константы $\beta \in (0, 1]$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для произвольной суммы Радемахера $f_b := \sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k$ выполнены следующие неравенства:

$$f_b^*(t) \leq C_1 \kappa_b(\ln^{1/2}(e/t))$$

и

$$f_b^*(\beta t) \geq C_2^{-1} \kappa_b(\ln^{1/2}(e/t)).$$

Таким образом, если $t \in (0, 1]$, то

$$x_{m,n}^*(t) \leq C_1 \kappa_{b_m^n}(\ln^{1/2}(e/t)) \quad (10.28)$$

и

$$x_{m,n}^*(\beta t) \geq C_2^{-1} \kappa_{b_m^n}(\ln^{1/2}(e/t)), \quad (10.29)$$

где $b_m^n = 1/n \sum_{k=1}^{m+n} e_k$ ($\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — стандартный базис в пространстве последовательностей). Так как $\kappa_{b_m^n}(t) = \kappa_{b^n}(t)$ ($t > 0$), то по лемме 10.4

$$\kappa_{b_m^n}(t) \asymp \min\left(1, \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

с константами, не зависящими от $t > 0$ и $n \geq 1$. Следовательно, из соотношений (10.27) — (10.29) мы получаем, что

$$x_{m,n}^*(t) \leq C_3 G_n(t), \quad (10.30)$$

где

$$G_n(t) := \min\left\{1, \frac{\ln^{1/2}(e/t)}{\sqrt{n}}\right\}, \quad 0 < t \leq 1,$$

и

$$y_{m,n}^*(t) \geq C_4^{-1} F_{m,n}(t), \quad (10.31)$$

где

$$F_{m,n}(t) := \min\left\{1, \frac{\ln^{1/2}(2^{1-m}\beta/t)}{\sqrt{n}}\right\}, \quad 0 < t \leq 2^{-m}\beta.$$

Докажем теперь, что существует такое $c_2 > 0$, что для каждого $m \geq 0$ неравенство

$$\|F_{m,n}\|_X \geq c_2 \|G_n\|_X \quad (10.32)$$

выполнено для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Для этого, прежде всего, покажем, что для каждого $m \geq 0$

$$F_{m,n}(t) \geq \frac{1}{2} G_n(t), \quad \text{если } n \geq \frac{4m}{3} + \frac{4}{3} \log_2(1/\beta) \text{ и } 0 < t < 2^{-4m/3} \beta^{4/3}. \quad (10.33)$$

В случае $0 < t \leq 2^{1-m} e^{-n} \beta$ последнее неравенство очевидно, так как $F_{m,n}(t) = G_n(t) = 1$. Если $2^{1-m} e^{-n} \beta < t \leq e^{1-n}$, то неравенство (10.33) переходит в соотношение

$$\ln^{1/2}(2^{1-m}\beta/t) \geq \frac{1}{2} \sqrt{n},$$

верное, когда $n \geq \frac{4m}{3} + \frac{4}{3} \log_2(1/\beta)$. И наконец, в случае $t > e^{1-n}$ (10.33) эквивалентно неравенству

$$\ln^{1/2}(2^{1-m}\beta/t) \geq \frac{1}{2} \ln^{1/2}(e/t),$$

которое выполнено, если $0 < t < 2^{-4m/3} \beta^{4/3}$. Таким образом, (10.33) доказано, и, значит, для $n \geq \frac{4m}{3} + \frac{4}{3} \log_2(1/\beta)$ мы получаем:

$$\|F_{m,n}\|_X \geq \frac{1}{2} \|G_n \chi_{[0, c_3 2^{-4m/3}]} \|_X, \quad (10.34)$$

где $c_3 = \beta^{4/3}$. Отсюда и из определения G_n следует, в частности, что для $n \geq \frac{4m}{3} + \frac{4}{3} \log_2(1/\beta)$

$$\|F_{m,n}\|_X \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \|\ln^{1/2}(e/t) \chi_{[e^{1-n}, c_3 2^{-4m/3}]}\|_X. \quad (10.35)$$

С другой стороны, ввиду леммы 10.3 существует такая константа $c > 0$, что для всех $n \geq n_1(m)$

$$\|\ln^{1/2}(e/t) \chi_{[e^{1-n}, c_3 2^{-4m/3}]}\|_X \geq c \|\ln^{1/2}(e/t) \chi_{[e^{1-n}, 1]}\|_X.$$

Из последнего неравенства и (10.35) следует, что для всех $n \geq n_2(m) := \max\{\frac{4m}{3} + \frac{4}{3} \log_2(1/\beta), n_1(m)\}$

$$\|F_{m,n}\|_X \geq \frac{c}{2} \|G_n \chi_{[e^{1-n}, 1]}\|_X.$$

Тем самым, учитывая (10.34), мы можем заключить, что (10.32) выполнено для $c_2 = c/2$ и $n \geq n_2(m)$.

В итоге для каждого $m \geq 0$ и всех $n \geq n_2(m)$ ввиду соотношений (10.30) — (10.32)

$$\frac{\|\chi_{[0, 2^{-m}]} \sum_{m+1}^{m+n} r_i\|_X}{\|\sum_{m+1}^{m+n} r_i\|_X} = \frac{\|y_{m,n}\|_X}{\|x_{m,n}\|_X} \geq \frac{\|F_{m,n}\|_X}{C_3 C_4 \|G_n\|_X} \geq c_2 C_3^{-1} C_4^{-1},$$

и (10.26) доказано с константой $c_1 = c_2 C_3^{-1} C_4^{-1}$.

Поставим перед собой цель доказать аналогичное соотношение для произвольного множества $D \subset [0, 1]$ положительной меры.

Прежде всего, по теореме Лебега о точках плотности измеримого множества [51, теорема 9.6.1] для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$ найдется такой двоичный интервал $\Delta := \Delta_m^{k_0} = [(k_0 - 1)2^{-m}, k_0 2^{-m}]$, что

$$2^{-m} = m(\Delta) \geq m(\Delta \cap D) > 2^{-m-1}.$$

Рассмотрим множество $E = \cup_{k=1}^{2^m} E_m^k$, где E_m^k получается за счет переноса множества $\Delta \cap D$ на интервал Δ_m^k ($k = 1, 2, \dots, 2^m$) (в частности, $E_m^{k_0} = \Delta \cap D$). Обозначим $f_i = r_i \cdot \chi_E$, $i \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $|f_i(t)| \leq 1$, $t \in [0, 1]$, $\|f_i\|_{L_2} \geq 1/\sqrt{2}$ и $f_i \rightarrow 0$ слабо в $L_2([0, 1])$, если $i \rightarrow \infty$. Следовательно, по теореме 9.1 последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ содержит подпоследовательность $\{f_{i_j}\}$, которая эквивалентна по распределению системе Радемахера. Иначе говоря, существует такое $C > 0$, что

$$\begin{aligned} C^{-1} m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{j=1}^l a_j r_j(t) \right| > Cz \right\} &\leq m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{j=1}^l a_j f_{i_j}(t) \right| > z \right\} \\ &\leq C m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{j=1}^l a_j r_j(t) \right| > C^{-1} z \right\} \end{aligned}$$

для всех $l \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, l$) и $z > 0$. Поэтому по определению r_j и f_j , для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C^{-1} m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_j(t) \chi_{[0, 2^{-m}]}(t) \right| > Cz \right\} \\ \leq m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{j=m+1}^{m+n} f_{i_j}(t) \chi_\Delta(t) \right| > z \right\} \\ \leq C m \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_j(t) \chi_{[0, 2^{-m}]}(t) \right| > C^{-1} z \right\}, \end{aligned}$$

откуда, в частности,

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_{i_j} \chi_{\Delta \cap D} \right\|_X \geq c_4 \left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_j \chi_{[0, 2^{-m}]} \right\|_X,$$

где $c_4 > 0$ зависит только от константы C и от пространства X . Следовательно, применяя соотношение (10.26) к двоичному интервалу $[0, 2^{-m}]$, мы получаем, что для достаточно больших n

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_{ij} \chi_{\Delta \cap D} \right\|_X \geq c_1 c_4 \left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_j \right\|_X = c_1 c_4 \left\| \sum_{j=m+1}^{m+n} r_{ij} \right\|_X.$$

Отсюда

$$\|\chi_D\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)} \geq \|\chi_{D \cap D}\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)} \geq c_1 c_4.$$

Так как $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ — банахова решетка, то из последнего неравенства следует, что $\Lambda(\mathcal{R}, X) \subset L_\infty$. Ввиду того, что противоположное вложение верно всегда, теорема доказана. $\square$

Следствие 10.4. Если X — сепарабельное с.п. на $[0, 1]$, то следующие условия эквивалентны:

- (i) $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$;
- (ii) $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = L_\infty$;
- (iii) $\ln^{1/2}(e/t) \notin X$.

Следствие 10.5. Если X и Y — с.п., такие, что $X \subset Y$, то $\Lambda(\mathcal{R}, X) \subset \Lambda(\mathcal{R}, Y)$ и $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) \subset \text{Sym}(\mathcal{R}, Y)$.

Доказательство. Если $\ln^{1/2}(e/t) \notin X^\circ$, то по теореме 10.5 $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$ и следовательно, $\Lambda(\mathcal{R}, X) \subset \Lambda(\mathcal{R}, Y)$. Предположим, что $\ln^{1/2}(e/t) \in X^\circ$. Тогда $\ln^{1/2}(e/t) \in X \subset Y$, и поэтому ввиду леммы 3.2 и теоремы 3.2 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y) = \ell^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Lambda(\mathcal{R}, Y)} &\asymp \sup \left\{ \left\| x \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_Y : \|(a_n)\|_2 \leq 1 \right\} \\ &\leq C \cdot \sup \left\{ \left\| x \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_X : \|(a_n)\|_2 \leq 1 \right\} \\ &\asymp \|x\|_{\Lambda(\mathcal{R}, X)}, \end{aligned}$$

и первое вложение доказано. Что касается второго, то оно — непосредственное следствие первого вложения и определения пространства $\text{Sym}(\mathcal{R}, X)$. $\square$

В последнем следствии приведем некоторые конкретные примеры таких с.п. X , что $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$.

Следствие 10.6. Пусть $\alpha \geq 2$ и X — это либо пространство Лоренца $\Lambda(\varphi_\alpha)$, где $\varphi_\alpha(s) = \ln^{-1/\alpha}(e/s)$, либо экспоненциальное пространство Орлича L_{N_α} , где $N_\alpha(t) = e^{t^\alpha} - 1$. Тогда $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$.

Доказательство. Ввиду теоремы 10.5 достаточно проверить, что в обоих случаях $\ln^{1/2}(e/t) \notin X^\circ$. $\square$

В связи с теоремой 10.5 может возникнуть гипотеза, что L_{N_2} — наибольшее среди с.п. X , обладающих свойством: $\Lambda(\mathcal{R}, X) = \text{Sym}(\mathcal{R}, X) = L_\infty$. Приведем пример, показывающий, что это не так.

Пример 10.4. Пусть функция ψ кусочно линейна, с узлами в точках $(t_k, \ln^{-1/2}(e/t_k))$, где $t_k \in [0, 1]$, $t_0 = 1 > t_1 > t_2 > \dots$, $t_k \downarrow 0$. Тогда ψ — квазивогнутая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) 0 \leq \psi(t) \leq \ln^{-1/2}(e/t) ; \quad 2) \psi(t_k) = \ln^{-1/2}(e/t_k) \quad (k \geq 0).$$

Кроме того, мы можем выбрать точки $\{t_k\}$ так, что будет выполнено соотношение

$$3) \inf_{0 < t \leq 1} \psi(t) \ln^{1/2}(e/t) = 0.$$

Рассмотрим теперь пространство Марцинкевича $M(t/\psi)$. Из 1) и 3) мы получаем: $L_{N_2} \not\subset M(t/\psi)$. Кроме того, ввиду условия 2)

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \psi(t) \ln^{1/2}(e/t) \neq 0.$$

Так как $tx^*(t) \leq \int_0^t x^*(s) ds$, то отсюда следует, что $\ln^{1/2}(e/t) \notin (M(t/\psi))^\circ$ [46, лемма 2.5.4]. Таким образом, по теореме 10.5

$$\Lambda(\mathcal{R}, M(t/\psi)) = \text{Sym}(\mathcal{R}, M(t/\psi)) = L_\infty.$$

Замечание 10.7. Несложный анализ доказательства теоремы 10.5 показывает, что в случае, когда $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$, норма в $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ характеристической функции любого двоичного интервала из $[0, 1]$ достигается (с точностью до эквивалентности) на "хвосте" подходящей суммы Радемахера. Точнее, существует константа $M_1 > 0$, зависящая только от X , такая, что для всех $n \geq 1$

$$\sup \left\{ \left\| \chi_\Delta \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i \right\|_X : \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i \right\|_X \leq 1 \right\} \geq M_1, \quad (10.36)$$

где Δ — произвольный двоичный интервал ранга n . С другой стороны, если X интерполяционно относительно банаховой пары (L_∞, L_{N_2}) , то, как показывает доказательство теоремы 1 из работы [17], соотношение, аналогичное (10.36), верно также и для частичных сумм Радемахера, т.е. существует константа $M_2 > 0$, зависящая лишь от X , такая, что для всех $n \geq 1$ и любого двоичного интервала Δ ранга n

$$\sup \left\{ \left\| \chi_\Delta \cdot \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_X : \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_X \leq 1 \right\} \geq M_2. \quad (10.37)$$

Отметим, в то же время, что в отличие от (10.36) последнее соотношение выполнено не для всех пространств X , таких, что $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$. Приведем пример.

Пример 10.5. Напомним сначала некоторые построения из § 4. Для данного с.п. X на $[0, 1]$ рассмотрим пространство последовательностей $E = E_X$ с нормой

$$\|(a_k)\|_E := \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X.$$

Так как E интерполяционно относительно $\mathcal{K}$ -монотонной пары (ℓ_1, ℓ_2) (см. следствие 4.2), то по теореме Брудного-Кругляка (см. § 0. 5 или [29, теорема 15.1]) существует банахова решетка F двусторонних последовательностей, такая, что $(\min\{1, 2^k\})_{k=-\infty}^\infty \in F$ и

$$E = (\ell_1, \ell_2)_F^{\mathcal{K}} \text{ и } \|a\|_E \asymp \|(\kappa_a(2^k))_{k=-\infty}^\infty\|_F. \quad (10.38)$$

Тогда, если $Y := (L_\infty, L_{N_2})_F^K$, то по следствию 4.1

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_Y \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X, \text{ где } (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2. \quad (10.39)$$

Кроме того, так как $Y \in \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_2})$, то $Y \neq X$ при условии, если $X \notin \mathcal{I}(L_\infty, L_{N_2})$.

Возьмем в качестве X пространство Лоренца $\Lambda(\varphi_0)$, построенное по функции $\varphi_0(t) := \log_2^{-1/2}(2/t)$ ($0 < t \leq 1$) и найдем (с точностью до эквивалентности) фундаментальную функцию φ_Y соответствующего пространства Y .

Прежде всего, по определению,

$$\varphi_Y(t) = \|(\mathcal{K}(2^k, \chi_{[0,t]}; L_\infty, L_{N_2}))_{k=-\infty}^\infty\|_F.$$

Так как ввиду леммы 4.4 и замечания 4.4

$$K(t, x; L_\infty, L_{N_2}) \asymp t \sup_{0 < s < 2^{1-t^2}} x^*(s) \log_2^{-1/2}(2/s) \quad (t > 0),$$

то, действуя точно так же, как в доказательстве теоремы 4.3, нетрудно показать, что

$$\mathcal{K}(2^k, \chi_{[0,t]}; L_\infty, L_{N_2}) \asymp \begin{cases} 2^k \log_2^{-1/2}(2/t), & \text{если } k \leq \frac{1}{2} \log_2 \log_2(2/t) \\ 1, & \text{если } k > \frac{1}{2} \log_2 \log_2(2/t). \end{cases}$$

Для того, чтобы найти банахову решетку F из (10.38), соответствующую пространству $X = \Lambda(\varphi_0)$, применим еще раз следствие 2.2 и получим:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{\Lambda(\varphi_0)} &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right)^*(t) d\varphi_0(t) \\ &\asymp \int_0^1 \kappa_a(\log_2^{1/2}(2/t)) d(\log_2^{-1/2}(2/t)) \\ &\asymp \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_a(2^i) \cdot 2^{-i}, \end{aligned}$$

где $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$. Тем самым ввиду предыдущих соотношений для всех $0 < t \leq 1/2$

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &\asymp \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{K}(2^i, \chi_{[0,t]}; L_{\infty}, L_{N_2}) \cdot 2^{-i} \\ &\asymp \log_2^{-1/2}(2/t) \sum_{i \leq \frac{1}{2} \log_2 \log_2(2/t)} 1 + \sum_{i > \frac{1}{2} \log_2 \log_2(2/t)} 2^{-i} \\ &\asymp \log_2^{-1/2}(2/t) \log_2 \log_2(2/t). \end{aligned}$$

По следствию 10.6 $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_{\infty}$. В то же время, соотношение (10.37) в этом случае не выполнено. Действительно, ввиду (10.39) для произвольного $n \geq 2$ и любых вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \chi_{[0,2^{-n}]} \cdot \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_{\Lambda(\varphi_0)} &= \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \varphi_{\Lambda(\varphi_0)}(2^{-n}) \\ &= \frac{\varphi_0(2^{-n})}{\varphi_Y(2^{-n})} \left\| \chi_{[0,2^{-n}]} \cdot \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_Y \\ &\leq \frac{C}{\log_2 n} \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_Y \\ &= \frac{C}{\log_2 n} \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_{\Lambda(\varphi_0)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sup \left\{ \left\| \chi_{[0,2^{-n}]} \cdot \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_{\Lambda(\varphi_0)} : \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_{\Lambda(\varphi_0)} \leq 1 \right\} \leq \frac{C}{\log_2 n}.$$

В заключительной части параграфа мы покажем, что имеется достаточно широкий класс пространств Орлича, для которых пространство мультипликаторов является с.п., отличным от L_{∞} .

Пусть F — возрастающая функция на $(0, \infty)$ такая, что $F(0) = 0$. Через $\text{Exp } L^F$, как и ранее, будем обозначать пространство Орлича, построенное по функции $e^{F(t)} - 1$, которая предполагается выпуклой для достаточно больших $t > 0$. Напомним, что по лемме 3.2

$$\|x\|_{\text{Exp } L^F} \asymp \sup_{0 < s \leq 1} \frac{x^*(s)}{F^{-1}(\ln(e/s))}. \quad (10.40)$$

Покажем, что при некоторых условиях на функцию F пространство $\Lambda(\mathcal{R}, X)$ для $X = \text{Exp } L^F$ симметрично, хотя и не равно L_{∞} . Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 10.5. *Для каждого $1 \leq p < \infty$ и для произвольной функции $f \in L_p[0, 1]$ существует последовательность $(a_n) \in \ell_2$, $\|(a_n)\|_2 \leq 1$, такая, что*

$$\|f\|_p \leq 3p^{-1/2} \cdot \left\| f \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_p.$$

Доказательство. Найдем конечнозначную функцию g , множества постоянства которой — двоичные интервалы и для которой выполнено: $|g| \leq |f|$ и $\|f\|_p \leq 3/2\|g\|_p$. Пусть N — наибольший среди порядков интервалов постоянства функции g . Возьмем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m-1 \leq p < m$. Определим $a_n = 0$ для $n \leq N$, $a_n = m^{-1/2}$ для $N+1 \leq n \leq N+m$ и $a_n = 0$ для $n > N+m$. Тогда $\|(a_n)\|_2 = 1$. Так как из определения функций Радемахера на некотором множестве меры 2^{1-m} справедливо равенство $|\sum_{n=1}^{N+m} r_n(t)| = m$, то

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_p \geq m^{1/2} 2^{(1-m)/p} \geq 2^{-1} p^{1/2}.$$

Легко видеть, что функции g и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n = \sum_{n>N} a_n r_n$ независимы. Поэтому, применяя [41, теорема 2.2.4], получим

$$\int_0^1 \left| g(t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt = \int_0^1 |g(t)|^p dt \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leq \frac{3}{2} \|g\|_p \leq 3p^{-1/2} \|g\|_p \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_p \\ &= 3p^{-1/2} \left\| g \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_p \leq 3p^{-1/2} \left\| f \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_p. \end{aligned}$$

□

Теперь все готово для того, чтобы доказать заключительный результат этого параграфа.

Теорема 10.6. Пусть функция $F(t)$ либо выпукла, либо $F(t) = t^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Предположим, кроме того, что функция $F^{-1}(t)t^{-1/2}$ возрастает. Тогда $\Lambda(\mathcal{R}, \text{Exp } L^F) = \text{Exp } L^\Psi$, где функция Ψ определяется равенством $\Psi^{-1}(t) = F^{-1}(t)t^{-1/2}$.

Доказательство. Если $F(t) = t^\alpha$, то функция Ψ^{-1} степенная. Если же $F(t)$ выпукла, то Ψ^{-1} квазивогнутая, так как она возрастает по условию, а $\Psi^{-1}(t)/t = (F^{-1}(t)/t) \cdot t^{-1/2}$ убывает ввиду того, что $F^{-1}(t)$ квазивогнута. Поэтому во втором случае Ψ эквивалентна некоторой выпуклой возрастающей функции. Сделанные замечания показывают, что в обоих случаях норма пространства $\text{Exp } L^\Psi$ имеет следующее экстраполяционное описание:

$$\|f\|_{\text{Exp } L^\Psi} \asymp \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{\|f\|_p}{\Psi^{-1}(p)}. \quad (10.41)$$

Действительно, в степенном случае достаточно разложить в ряд Тейлора функцию $e^{u^\beta} - 1$, где по условию $\beta = 2\alpha/(2-\alpha) > 0$, а в случае выпуклой $F(t)$ можно применить [18, следствие 1] (см. также [15, предложение 1]).

Покажем теперь, что $\Lambda(\mathcal{R}, \text{Exp } L^F) \subset \text{Exp } L^\Psi$. По лемме 10.5 для данных $1 \leq p < \infty$ и функции $f \in L_p$ существует сумма Радемахера $h_p = \sum a_k r_k$ такая, что $\|(a_k)\|_2 \leq 1$ и $\|f\|_p \leq 3p^{-1/2} \|f h_p\|_p$. Из условия теоремы следует, что $F(t) \leq C t^2$ ($t \geq 1$). Поэтому $L_{N_2} \subset \text{Exp } L^F$, и значит, по теореме

3.2 $\mathcal{R}(\text{Exp } L^F) = \ell_2$. Следовательно, используя (10.41) и равенство $F^{-1}(t) = \Psi^{-1}(t)t^{1/2}$, получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{Exp } L^\Psi} &\asymp \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{1}{\Psi^{-1}(p)} \|f\|_p \\ &\leq 3 \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{p^{-1/2}}{\Psi^{-1}(p)} \|fh_p\|_p \\ &\leq 3 \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{p^{-1/2}}{\Psi^{-1}(p)} \sup_{\|(a_k)\|_2 \leq 1} \|f \sum a_k r_k\|_p \\ &= 3 \sup_{\|(a_k)\|_2 \leq 1} \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{1}{F^{-1}(p)} \|f \sum a_k r_k\|_p \\ &\asymp \sup_{\|(a_k)\|_2 \leq 1} \|f \sum a_k r_k\|_{\text{Exp } L^F} \\ &\asymp \|f\|_{\Lambda(\mathcal{R}, \text{Exp } L^F)}. \end{aligned}$$

По лемме 3.2 (см. также соотношение (10.40)) пространство $\text{Exp } L^F$ является одновременно пространством Марцинкевича $M(\varphi)$ для $\varphi(t) = tF^{-1}(\ln^{1/2}(e/t))$. Кроме того, непосредственное вычисление показывает, что $\gamma_\varphi > 0$. Тем самым ввиду следствия 10.3 $\text{Sym}(\text{Exp } L^F)$ также является пространством Марцинкевича. Так как $t^{1/2}/F^{-1}(t)$ убывает, то применяя (10.40), найдем фундаментальную функцию последнего пространства:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Sym}(\text{Exp } L^F)}(t) &= \|\chi_{[0,t]} \ln^{1/2}(e/s)\|_{\text{Exp } L^F} \\ &\asymp \sup_{0 < s \leq t} \frac{\ln^{1/2}(e/s)}{F^{-1}(\ln(e/s))} = \frac{\ln^{1/2}(e/t)}{F^{-1}(\ln(e/t))} = \frac{1}{\Psi^{-1}(\ln(e/t))}, \end{aligned}$$

т.е. она эквивалентна фундаментальной функции пространства $\text{Exp } L^\Psi$. Так как опять по лемме 3.2 последнее — пространство Марцинкевича, то тем самым получаем: $\text{Sym}(\text{Exp } L^F) = \text{Exp } L^\Psi$. В итоге $\Lambda(\mathcal{R}, \text{Exp } L^F) = \text{Exp } L^\Psi$. $\square$

Пример 10.6. Рассмотрим пространство $\text{Exp } L_p = L_{N_{1/p}}$ (одновременно это пространство Марцинкевича, порожденное функцией $\varphi_p(t) = t \ln^{1/p}(e/t)$). Если $0 < p < 2$, то по теореме 10.6 $\Lambda(\mathcal{R}, \text{Exp } L_p) = \text{Exp } L_q$ для $q = 2p/(2-p)$.

Комментарии и литературные указания. Понятие пространства мультипликаторов, порожденных системой Радемахера, возникло в связи с теорией интегрирования относительно векторных мер. А именно, $\Lambda(\mathcal{R}, L_1)$ возникло как пространство функций, интегрируемых в смысле Бартла, Данфорда и Шварца относительно векторной меры

$$\nu(A) = \left(\int_A r_n(t) dt \right)_{n=1}^\infty \quad (A \subset [0, 1] \text{ измеримо по Лебегу})$$

со значениями в ℓ_2 [87]. Альтернативно это пространство можно охарактеризовать как множество всех таких функций f , что для каждого измеримого множества $A \subset [0, 1]$ последовательность коэффициентов Фурье-Радемахера функции $f\chi_A$ принадлежит ℓ_2 (описание коэффициентов Фурье-Радемахера для функций из общих с.п. см. в [14]). Определение пространства мультипликаторов, порожденного системой Радемахера, возникло в работе Г. П. Курберы [88], где и были получены первые результаты. Лемма 10.1 и теорема 10.1 доказаны в работе [70] (несколько более слабые варианты этих утверждений были получены ранее в [88]). Симметричное ядро пространства мультипликаторов было введено и подробно изучалось также в [70]. Одним из центральных результатов параграфа является теорема 10.5, характеризующая с.п. X , для которых $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$ и $\text{Sym}(\mathcal{R}, X) = L_\infty$. До того, как она была доказана автором и Г. П. Курберой в [70] (эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)) и в [71] (эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii)), решению этой задачи был посвящен ряд работ, в которых были найдены более ограничительные достаточные условия для выполнения первого из этих равенств. Так, в [47] и [89] в качестве такого условия фигурирует ограниченность

в X оператора

$$\mathcal{L}_2 f(t) = \left(\frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^1 (f^*(s))^2 d\varphi_1(s) \right)^{1/2}, \text{ где } \varphi_1(t) = \log_2^{-1}(2/t).$$

Чуть позднее в [17] был получен более сильный результат: $\Lambda(\mathcal{R}, X) = L_\infty$, если с.п. X интерполяционно относительно банаховой пары (L_∞, L_{N_2}) . Из последней работы взята также лемма 10.4. Теорема 10.6 представляет из себя несколько неожиданное применение к рассматриваемым вопросам экстраполяционного описания экспоненциальных пространств Орлича (10.41). Важная лемма 10.5 была доказана в работе [88].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов Д. С., Кисляков С. В. Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление// Алгебра и анализ. — 2004. — 16, № 5. — С. 1–24.
2. Асекритова И. У. О $\mathcal{K}$ -функционале пары $(\mathcal{K}_{\Phi_0}(\vec{X}), \mathcal{K}_{\Phi_1}(\vec{X}))$ // В сб. "Иссл. по теор. функц. мног. вещ. перем." Ярославский госуниверситет, Ярославль. — 1980. — С. 3–32.
3. Асташкин С. В. О билинейном мультипликативном функционале// В сб. "Иссл. по теор. функц. мног. вещ. перем." Ярославский госуниверситет, Ярославль. — 1982. — С. 3–15.
4. Асташкин С. В. Интерполяция операторов в квазинормированных группах измеримых функций// Сибирский мат. журнал. — 1994. — 35, № 6. — С. 1215–1222.
5. Асташкин С. В. О мультипликаторе симметричного пространства относительно тензорного произведения// Функц. анализ и его прилож. — 1996. — 30, № 4. — С. 58–60.
6. Асташкин С. В. Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера// ИЗВЕСТИЯ РАЕН, серия МММИУ. — 1997. — 1, № 1. — С. 18–35.
7. Асташкин С. В. Операторы слабого типа и устойчивость вещественного метода интерполяции в симметричных пространствах// ИЗВЕСТИЯ РАЕН, серия МММИУ. — 1997. — 1, № 4. — С. 3–25.
8. Асташкин С. В. О рядах по системе Радемахера в симметричных пространствах, "близких" к L_∞ // Функц. анализ и его прилож. — 1998. — 32, № 3. — С. 62–65.
9. Асташкин С. В. $\mathcal{K}$ -монотонные весовые пары, порожденные пространством, не инвариантным относительно сдвига// В тр. 2-ого Междун. семин. "Дифф. ур-ия и их прилож." Самара. — 1998 — С. 19–25.
10. Асташкин С. В. Кратные ряды Радемахера в симметричных пространствах// Функц. анализ и его прилож. — 1999. — 33, № 2. — С. 73–76.
11. Асташкин С. В. О выделении подсистем, "мажорируемых" системой Радемахера// Мат. заметки. — 1999. — 65, № 4. — С. 483–495.
12. Асташкин С. В. О выделении подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 3. — С. 473–477.
13. Асташкин С. В. Системы случайных величин, эквивалентные по распределению системе Радемахера, и $\mathcal{K}$ -замкнутая представимость банаховых пар// Мат. сборник. — 2000. — 191, № 6. — С. 3–30.
14. Асташкин С. В. Коэффициенты Фурье-Радемахера функций из симметричных пространств// Сибирский мат. журнал. — 2000. — 41, № 4. — С. 729–739.
15. Асташкин С. В. Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p -пространств// Функц. анализ и его прилож. — 2003. — 37, № 3. — С. 73–77.
16. Асташкин С. В. Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространств// Мат. сборник. — 2003. — 194, № 6. — С. 23–42.
17. Асташкин С. В. О пространстве мультипликаторов, порожденных системой Радемахера// Мат. заметки. — 2004. — 75, № 2. — С. 173–181.
18. Асташкин С. В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции// Сибирский мат. журнал. — 2005. — 46, № 2. — С. 243–289.
19. Асташкин С. В. Независимые функции в симметричных пространствах и свойство Круглова// Мат. сборник (принята в печать).
20. Асташкин С. В., Браверман М. Ш. О подпространстве симметричного пространства, порожденном системой Радемахера с векторными коэффициентами// В сб. "Операторные ур-ия в функц. пр-вах", Воронежский госуниверситет, Воронеж. — 1986. — С. 3–10.
21. Асташкин С. В., Малигранда Л., Семенов Е. М. О дополняемости подпространств, порожденных сжатиями и сдвигами функций// Докл. РАН. — 2002. — 66, № 8. — С. 390–392.
22. Асташкин С. В., Семенов Е. М. Коэффициенты Фурье-Радемахера// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 1. — С. 7–9.

23. Асташкин С. В., Сукочев Ф. А. Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах// Мат. заметки. — 2004. — 76, № 4. — С. 173–181.
24. Асташкин С. В., Сукочев Ф. А. Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова// Зап. научн. семин. ПОМИ. Исслед. по лин. опер. и теор. ф-ий. Ч. 35. — 2006. — 345. — С. 25–50.
25. Белов А. С., Родин В. А. Нормы лакунарных полиномов в функциональных пространствах// Мат. заметки. — 1992. — 51, № 3. — С. 137–139.
26. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980. — 264 с.
27. Боровков А. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1976. — 352 с.
28. Браверман М. Ш. Дополняемость подпространств, порожденных независимыми функциями в симметричных пространствах// Функци. анал. и его прилож. — 1982. — 16, № 2. — С. 66–67.
29. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. Функторы вещественной интерполяции. — Ярославль, 1981. — 211 с. (Рукоп. деп. в ВИНТИ, № 2620 –81 Деп.).
30. Бухвалов А. В. О связи симметричных пространств на квадрате с пространствами со смешанной нормой// В тр. конф. Тартусс. госун-та. — 1980. — С. 100–102.
31. Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985. — 368 с.
32. Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции// Успехи мат. наук. — 1966. — 21, № 6. — С. 3–82.
33. Гапошкин В. Ф. Сходимость и предельные теоремы для подпоследовательностей случайных величин// Теор. вероятн. и ее применения. — 1972. — 17, № 3. — С. 401–423.
34. Голубов В. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. — М.: Наука, 1987. — 343 с.
35. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.1. — М.: Мир, 1965. — 615 с.
36. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.2. — М.: Мир, 1965. — 537 с.
37. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
38. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. — М.: Мир, 1973. — 302 с.
39. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. — М.: Физматгиз, 1958. — 507 с.
40. Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой// Труды МИАН. — 1980. — 145. — С. 111–116.
41. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ, 1999. — 550 с.
42. Кисляков С. В., Куанхуа Шу Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы// Алгебра и анализ. — 1996. — 8, № 4. — С. 75–109.
43. Колмогоров А. Н., Хинчин А. Я. Über Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden// Мат. сборник. — 1925. — 32, № 3. — С. 668–677.
44. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 499 с.
45. Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Физматгиз, 1958. — 271 с.
46. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
47. Курбера Г. П., Родин В. А. Мультипликаторы на множестве рядов Радемахера в симметричных пространствах// Функци. анал. и его прилож. — 2002. — 36, № 3. — С. 87–90.
48. Лунин А. А. Об операторных нормах подматриц// Мат. заметки. — 1989. — 45, № 3. — С. 94–100.
49. Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Поджорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. — М.: Наука, 1992. — 432 с.
50. Митягин Б. С. Интерполяционная теорема для модулярных пространств// Мат. сборник. — 1965. — 66, № 4. — С. 473–482.
51. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
52. Никишин Е. М. Об одном свойстве сумм независимых случайных величин// Мат. заметки. — 1974. — 16, № 5. — С. 703–706.
53. Орлов Е. В. О коэффициентах рядов Фурье по множествам Сидона// Anal. Math. — 1982. — 8, № 4. — Р. 277–285.
54. Пешкир Г., Ширяев А. Н. Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия// Успехи мат. наук. — 1995. — 50, № 5. — С. 3–62.
55. Родин В. А. Ряды Фурье в симметричном пространстве и интерполяция операторов// Дисс. к.ф.-м.н., Воронеж, 1973.

56. *Родин В. А., Семенов Е. М.* О дополняемости подпространства, порожденного системой Радемахера, в симметричном пространстве// Функци. анализ и его прилож. — 1979. — 13, № 2. — С. 91–92.
57. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.
58. *Рутлицкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций// Успехи мат. наук. — 1965. — 20, № 4. — С. 205–208.
59. *Семенов Е. М.* RUC-базисные свойства системы Хаара// Докл. РАН. — 1996. — 348, № 5. — С. 590–591.
60. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье// Изв. АН СССР. — 1956. — 20. — С. 385–412.
61. *Токарев Е. В.* Дополняемые подпространства симметричных функциональных пространств// Мат. заметки. — 1982. — 32. — С. 493–497.
62. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении, т.2. — М.: Мир, 1985. — 400 с.
63. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. — М.: Мир, 1986. — 350 с.
64. *Arias-de-Reyna J.* Pointwise convergence of Fourier series. — Lecture Notes in Math. 1785. Springer-Verlag, 2002. — 175 p.
65. *Asmar N. H., Montgomery-Smith S.* On the distribution of Sidon series// Arkiv för mat. — 1993. — 31, № 1. — P. 13–26.
66. *Astashkin S. V.* Tensor product in symmetric function spaces// In Proceedings of Fourth International Conference on Function Spaces (Zielona Gora, 1995), — Collect. Math. — 1997. — 48, № 4–6. — P. 375–391.
67. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces// East J. Approx. — 1998. — 4, № 3. — P. 311–336.
68. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces, 2// East J. Approx. — 2000. — 6, № 1. — P. 71–86.
69. *Astashkin S. V.* About interpolation of subspaces of rearrangement invariant spaces generated by Rademacher system// Int. J. Math. Math. Sci. — 2001. — 25, № 7. — P. 451–465.
70. *Astashkin S. V., Curbera G. P.* Symmetric kernel of Rademacher multiplier spaces// J. Funct. Anal. — 2005. — 226. — P. 173–192.
71. *Astashkin S. V., Curbera G. P.* Rademacher multiplier spaces equal to L^∞ // Proc. Amer. Math. Soc. (принята в печать).
72. *Astashkin S. V., Maligranda L., Semenov E. M.* Multiplier space and complemented subspaces of rearrangement invariant space// J. Funct. Anal. — 2003. — 202. — P. 247–276.
73. *Astashkin S. V., Sukochev F. A.* Series of independent random variables in r. i. s.: an operator approach// Israel J. Math. — 2005. — 145. — P. 125–156.
74. *Banach S.* Sur les séries lacunaires// Bull. Acad. Polon. — 1933. — P. 149–154.
75. *Braverman M. Sh.* Independent random variables and rearrangement invariant spaces. — Cambridge University Press, 1994. — 116 p.
76. *Beckner W.* Inequalities in Fourier analysis// Ann. Math. — 1975. — 102. — P. 159–182.
77. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — London: Academic Press, 1988. — 469 p.
78. *Billard P., Kwapien S., Pelczynski A., Samuel Ch.* Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces// Lohorn Notes. Texas Func. Anal. Seminar. — 1985–1986. — P. 13–35.
79. *Blei R., Janson S.* Rademacher chaos: tail estimates versus limit theorems// Ark. Mat. — 2004. — 42. — P. 13–29.
80. *Blei R.* Analysis in integer and fractional dimensions. — Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
81. *Blozinski A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms// Trans. Amer. Soc. — 1981. — 263, № 1. — P. 149–167.
82. *Boccuto A., Bukhvalov A. V., Sambucini A. R.* Some inequalities in classical spaces with mixed norms// Positivity. — 2002. — 6. — P. 393–411.
83. *Borell C.* A note on the integrability of Walsh polynomials (unpublished).
84. *Bourgain J., Tzafriri L.* Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis// Israel J. Math. — 1987. — 57. — P. 137–224.
85. *Brudnyi Yu. A., Kruglyak N. Ya.* Interpolation Functors and Interpolation Spaces 1. — North-Holland, 1991.
86. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz// Studia Math. — 1966. — 26, № 3. — P. 273–299.
87. *Curbera G. P.* Banach space properties of L^1 of a vector measure// Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — 123. — P. 3797–3806.
88. *Curbera G. P.* A note on function spaces generated by Rademacher series// Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1997. — 40. — P. 119–126.
89. *Curbera G. P., Rodin V. A.* Multiplication operators on the space of Rademacher series in rearrangement invariant spaces// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2003. — 134. — P. 153–162.

90. *Cwikel M.* Monotonicity properties of interpolation spaces 2// *Arkiv för matem.* — 1981. — 19, № 1. — P. 123–136.
91. *Cwikel M., Nilsson P.* Interpolation of Marcinkiewicz spaces// *Math. Scand.* — 1985. — 56. — P. 29–42.
92. *De la Peña V. H., Montgomery-Smith S. J.* Bounds on the tail probability of U-statistics and quadratic forms// *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1994. — 31, № 2. — P. 223–227.
93. *De la Peña V. H., Montgomery-Smith S. J.* Decoupling inequalities for the tail probabilities of multivariate U-statistics// *Ann. Probab.* — 1995. — 23. — P. 806–816.
94. *De la Peña V. H., Montgomery-Smith S. J., Szulga J.* Contraction and decoupling inequalities for multilinear forms and U-statistics// *Ann. Probab.* — 1994. — 22. — P. 1745–1765.
95. *Dodds P. G., Semenov E. M., Sukochev F. A.* RUC-systems in rearrangement invariant spaces// *Stud. Math.* — 2002. — 151, № 2. — P. 161–173.
96. *Dodds P. G., Semenov E. M., Sukochev F. A.* The Banach-Saks property in rearrangement invariant spaces// *Stud. Math.* — 2004. — 162, № 1. — P. 263–294.
97. *Edwards R. E., Ross K. A.* p -Sidon sets// *J. Func. Anal.* — 1974. — 15. — P. 404–427.
98. *Fatou P.* Séries trigonométrique et séries de Taylor// *Acta Math.* — 1906. — 30. — P. 335–400.
99. *Figiel T., Hitchenko P., Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J.* Extremal properties of Rademacher functions with applications to the Khintchine and Rosenthal inequalities. — Preprint. Texas A and M University, 1994.
100. *Haagerup U.* The best constants in the Khintchine inequality// *Stud. Math.* — 1982. — 70. — P. 231–283.
101. *Hernandez F. L., Novikov S. Ja., Semenov E. M.* Strictly singular embeddings between rearrangement invariant spaces// *Positivity.* — 2003. — 7. — P. 119–124.
102. *Hitczenko P.* Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence// *Israel J. Math.* — 1993. — 84. — P. 161–178.
103. *Holmstedt T.* Interpolation of quasi-normed spaces// *Math. Scand.* — 1970. — 26, № 1. — P. 177–199.
104. *Jakubowski J., Kwapien S.* On multiplicative systems of functions// *Bull. Acad. pol. sci., Ser. sci. math.* — 1979. — 27, № 9. — P. 689–694.
105. *Janson S.* Interpolation of subcouples and quotient couples// *Arkiv Math.* — 1993. — 31. — P. 307–338.
106. *Johnson W. B., Schechtman G.* Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces// *Israel J. Math.* — 1988. — 64. — P. 267–275.
107. *Kaczmarz S., Steinhaus G.* Le système orthogonal de M.Rademacher// *Stud. Math.* — 1930. — 2. — P. 231–247.
108. *Kalton N.* Rademacher series and decoupling// *New York J. of Math.* — 2005. — 11. — P. 563–595.
109. *Khiintchine A.* Über dyadische Brüche// *Math. Zeit.* — 1923. — 18. — P. 109–116.
110. *Kwapien S.* Decoupling inequalities for polynomial chaos// *Ann. Probab.* — 1987. — 15. — P. 1062–1071.
111. *Kwapien S., Woyczyński W. A.* Random Series and Stochastic Integrals. Single and Multiple. — Birkhäuser, Boston. 1992. — 360 p.
112. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.
113. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces 1. Sequence Spaces. — Berlin: Springer-Verlag, 1977. — 185 p.
114. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces 2, Function spaces. — Berlin: Springer-Verlag, 1979. — 243 p.
115. *Littlewood J. E.* On bounded bilinear forms in an infinite number of variables// *Quart. J. Math. Oxford.* — 1930. — 1. — P. 164–174.
116. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces// *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1961. — 12. — P. 127–132.
117. *Maligranda L.* Orlicz Spaces and Interpolation. — Seminars in Math. 5, Univ. of Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989. — 206 p.
118. *Milman M.* Tensor products of function spaces// *Amer. Math. Soc.* — 1976. — 82, № 4. — P. 626–628.
119. *Milman M.* Embeddings of $L(p, q)$ spaces and Orlicz spaces with mixed norms// *Notas Mat.* — 1977. — 13. — P. 1–7.
120. *Milman M.* Some new function spaces and their tensor products// *Notas Mat.* — 1978. — 20. — P. 1–128.
121. *Milman M.* Embeddings of Lorentz-Marcinkiewicz spaces with mixed norms// *Anal. Math.* — 1978. — 4, № 3. — P. 215–223.
122. *Milman V. D., Wolfson H.* Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space// *Israel J. Math.* — 1978. — 29. — P. 113–131.
123. *Montgomery-Smith S. J.* The distribution of Rademacher sums// *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1990. — 109, № 2. — P. 517–522.
124. *O'Neil R.* Convolution operators and $L(p, q)$ spaces// *Duke Math. J.* — 1963. — 30. — P. 129–142.

125. *Peetre J.* A theory of interpolation of normed spaces. — Lecture notes, Brasilia, 1963 [Notas Math. — 1968. — 39. — P. 1–86].
126. *Peetre J.* Interpolation functors and Banach couples, in Actes Congrès Intern. Math. — 1970. — 2. — P. 373–378, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
127. *Pelczyński A.* Commensurate sequences of characters// Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — 104, № 2. — P. 525–531.
128. *Pisier G.* Les inégalités de Kahane-Khintchin d'après C.Borell. — Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, Exposé No. 7 (1977-1978), École Polytechnique, Palaiseau.
129. *Pisier G.* Interpolation between H^p spaces and non-commutative generalizations 1.// Pasific J. Math. — 1992. — 155. — P. 341–368.
130. *Plichko A. M., Popov M. M.* Symmetric function spaces on atomless probability spaces. Diss. Math. Warszawa, 1990.
131. *Rademacher H.* Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen// Math. Ann. — 1922. — 87. — P. 111–138.
132. *Raynaud Y.* Complemented hilbertian subspaces in rearrangement invariant function spaces// Illinois J. Math. — 1995. — 39, № 2. — P. 212–250.
133. *Rodin V. A., Semyonov E. M.* Rademacher series in symmetric spaces// Anal. Math. — 1975. — 1, № 3. — P. 207–222.
134. *Rudin W.* Trigonimetric series with gaps// J. Math. Mech. — 1960. — 9, № 3. — P. 203–227.
135. *Sidon S.* Verallgemeinerung eines Satzes über die Absolute Konvergenz von Fourier-Reihen mit Lücken// Math. Ann. — 1927. — 97. — P. 675–676.
136. *Sparr G.* Interpolation of weighted L_p -spaces// Stud. Math. — 1978. — 62. — P. 229–271.
137. *Sukochev F. A.* RUC-bases in Orlicz and Lorentz operator spaces// Positivity. — 1998. — 2. — P. 265–279.
138. *Szarek S. J.* On the best constants in the Khinchine inequality// Stud. Math. — 1976. — 58. — P. 197–208.
139. *Szarek S. J.* General Fourier Sums with vector coefficients and analogs of $\Lambda(p)$ -sets// Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983). Monogr. Textbooks. Pure Appl. Math., 98, Dekker, New-York, 1986. — P. 195–208.
140. *Wiener N.* The homogeneous chaos// Amer. J. Math. — 1941. — 60. — P. 897–936.
141. *Wiener N., Wintner A.* The discrete chaos// Amer. J. Math. — 1943. — 65. — P. 279–298.
142. *Zygmund A.* Sur les séries trigonométric lacunaires// Journ. Lond. Math. Soc. — 1930. — 5, № 2. — P. 138–145.
143. *Zygmund A.* On lacunary trigonometric series//Trans. Amer. Math. Soc. — 1932. — 34, № 3. — P. 435–446.

Предметный указатель

- банахова пара 11, 48–49, 55, 97, 99, 144
 - $\mathcal{K}$ -монотонная 12–13, 44, 48–49, 51, 59, 63–64, 68, 100, 133, 136, 144
 - (L_1, L_∞) 13, 71, 88, 108, 133
 - $\mathcal{U}$ -полная 46–48
- вложение пространств 5, 46, 52, 55, 73–74, 77–78, 85–86, 93, 128
- группа Кантора 24, 107
- индексы Бойда 6, 42, 90–91, 93–94, 97, 130–131
- квазинормы (нормы) эквивалентные 7, 11, 52, 61, 68, 133–136, 137
- конус $\mathcal{P}_0$ 45, 48
 - $\mathcal{P}_1$ 45–46, 48? 52
 - $\mathcal{P}_2$ 68
 - W_X 61–62
- $\mathcal{K}$ -подпара 43, 45, 59
- $\mathcal{K}$ -функционал Петре 11–13, 25, 43–46, 65–69, 97, 123, 136
 - $\mathcal{K}(\cdot, x; L_p, L_\infty)$ ($1 \leq p < \infty$) 12, 97–99, 133
 - $\mathcal{K}(\cdot, x; L_\infty, L_\alpha)$ 52–54, 56–57, 67–69, 144–145
 - $\mathcal{K}(\cdot, x; L_1, L_2)$ 25–27, 46–48, 61, 66
 - $\kappa_a(\cdot) = \mathcal{K}(\cdot, a; \ell_1, \ell_2)$ 12, 25, 27–33, 45, 48, 53, 58, 61, 66, 97–99, 101–102, 110–111, 116, 122–124, 139–141, 144–145
 - $\bar{\kappa}_a(\cdot)$ 99–100, 102
- мажоранта наименьшая вогнутая 5, 137
- мартингал, мартингальные разности 8, 9–10, 42
- матрица Уолша 82
- мера Хаара 105
 - Дирака 106
- метод декаплинга 73, 88
- неравенства Бореля 20–22, 25
 - Литтлвуда 88
 - Монтгомери-Смита 30–31, 33
 - Пэли-Зигмунда 29, 32–33, 100
 - для перестановок сумм Радемахера 32, 53, 97, 141
 - Хинчина 10, 16–20, 31, 33–34, 73–74, 79–80, 89, 91, 116, 124, 126
 - Хитченко 29–30, 33
 - Хольмстедта 25–27, 33, 98–99, 101, 139
 - экспоненциальные для распределений 17–18, 31, 92
 - Юнга 106
- норма Люксембурга 5
 - монотонная 3–4
 - порядково полунепрерывная 4, 90–91, 94
 - $\|\cdot\|_{Q(t)}$ 27, 30–31, 111
- нормально распределенная случайная величина 7, 17
- оператор ассоциированный 104
 - интегральный 103–104
 - максимальный 101
 - проектор 21, 38–41, 86–88, 93–96
 - расстановки знаков M_θ 8
 - растяжения 6, 23, 45, 53–54, 61–62, 64, 90–91, 101, 131
 - тензорного произведения 90–93, 96
 - усреднения 48, 71–72, 89
 - Харди-Литтлвуда 46–47, 64, 66
 - частных сумм Фурье-Уолша 71
 - $\mathcal{L}$ 61–62, 64, 69
 - $\mathcal{L}_2$ 60–61, 63, 148
 - M_θ 8
 - R 34, 43–45
 - T_θ 82–85
- отображение, не уменьшающее меру 50
 - сохраняющее меру 40–41, 49–50, 86–87, 95, 131–132, 135
- параметр $\mathcal{K}$ -метода 12–13, 52, 62, 68–69, 133, 136, 144
- пересечение пространств 11
- перестановка функции 4, 7, 23, 25–26, 32, 35, 47–48, 51, 62–65, 73, 75, 82–84, 89, 90–91, 98–99, 101, 128–137, 140–141
 - последовательности 7, 22–23, 27, 46, 57–58, 60, 72, 98, 101, 139
- подпространство дополняемое 38–40, 86–88, 93–95
 - $\text{Rad } X$ 89–96
 - $\mathcal{R}(X)$ 33–34, 38–40, 93, 127–128, 131–133, 143
 - $\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$ 82–86
 - $\mathcal{R}_{\text{dch}}(X)$ 88
 - $\mathcal{R}_{\text{ch}}^d(X)$ 88
 - $[r_n]_X$ 34–35
 - $[x_n]_X$ 8–9

показатели растяжения 6, 50–51, 130–131, 138, 147
 произведение Рисса 111–114, 123
 пространство банахово идеальное, решетка банахова 4, 12, 85, 128, 130–132, 143, 145
 ассоциированное (двойственное) 4–5, 36–40, 75, 77, 86–88, 92–94, 133
 весовое 12, 51, 58, 63
 Зигмунда 134
 идеальное 3
 интерполяционное 11–13, 42, 44, 50, 52? 55, 59, 60, 62, 68–69, 71, 85, 89, 108, 136–137, 144, 148
 точное 11–12
 Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$, $\Lambda(\varphi)$ 5–6, 39, 56–57, 59, 63–64, 65, 129, 131, 134–135, 138, 143–145
 $L_{p,q}$ 3, 6
 Λ_2 62–66
 Лоренца-Зигмунда 134
 максимальное (имеет свойство Фату) 4, 13, 133, 135–136
 Марцинкевича 5–7, 35–36, 38, 43, 50–55, 57–59, 79, 89, 101, 134, 136–138, 143–144, 147
 $M(\varphi_\varepsilon)$ 83–85
 мультипликаторов, порожденных системой Радемахера 127–148
 на квадрате 57–58, 73–82, 85, 89–96
 нормированное идеальное 4
 операторов $L(\vec{X}, \vec{Y})$ 11, 45, 48–49, 51, 63, Орлича L_M , L_F 5, 77–78, 148
 $\text{Exp } L^F$ 35–36, 145–147
 L_{N_α} 36, 41, 57, 59, 60, 85, 143
 L_{N_1} 60, 62, 67–69, 73–75, 84
 L_{N_2} 34–35, 37–38, 42–43, 52, 57, 60, 66, 77–78, 85, 93, 97, 99, 101–102, 128, 131–134, 137, 140, 143–144, 146, 148
 последовательностей 7, 12, 22–23, 27–28, E_X 33, 42, 44–45, 52–55, 62, 64, 144
 $\ell_1(\log)$ 57–58
 ℓ_p 7, 12, 18, 20, 22–23, 26–28, 31–33, 37–42, 42–44, 46, 48, 52–53, 56–57, 61–62, 64, 66–69, 70, 72–77, 79, 85, 97, 101, 110–112, 115–116, 126, 128–130, 133, 139–140, 143–145, 147
 $\ell_{r,p}$ 45
 $\ell_{\beta,\infty}$ 57
 $m(\varphi)$ 7, 57–58

$q(X)$ 60–69
 промежуточное 11
 симметричное 4, 7, 33, 41–42, 52, 60, 71, 77, 88, 91, 105, 128, 130–132, 134, 138, 146
 со смешанной нормой 77–78, 88
 типа u относительно банаховой пары 84
 $C(G)$, $C(S)$, $C(T)$ 105–106
 $\mathcal{K}$ -метода 12–13, 44–45, 52, 56–59, 62, 64, 68–69, 133, 136–137, 144
 L_p ($1 \leq p \leq \infty$) 5, 10–12, 14, 18–22, 25, 29–30, 38, 45, 46–48, 59, 70, 76–78, 79–83, 88, 89, 93, 98–100, 102–108, 110–118, 122–127, 128, 131–135, 138–140, 143–148
 $L\log\log L$ 138
 $S(T, \Sigma, \mu)$, $S(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $S[0, 1]$ 3–4, 11, 101
 $X(\ell_2)$ 90–96
 $X_{\ln^{1/2}}$ 132–134, 137–138
 $Z_{\ln^{-1/2}}$ 135–136
 ретракт частичный 48–49, 51, 63–64, 69
 свойство Круглова 42, 96
 сепарабельная часть симметричного пространства 6, 36–37, 40, 75, 139–140, 143
 пространства Марцинкевича 6, 51, 144
 G 34–35, 37–42, 42–44, 52, 66–67, 77–78, 85, 93, 97, 128
 H 73–75, 85
 H_d 85
 система базисная 8, 71–72
 безусловная 8, 72–73, 77–78, 82, 85, 88, 91
 биортогональная 9
 лакунарная 9, 108, 117, 126
 лакунарная порядка p (S_p -система) 10, 126
 лакунарная S_∞ -система 10–11, 108, 117, 124–126
 мажорируемая по распределению 96–97, 99, 101–103, 107, 109, 111, 127
 монотонная 22
 мультипликативная 9, 70, 103–105, 110, 121–122
 ортонормированная 13–14, 70, 72, 111, 116, 119–120, 123, 126
 полная 9
 Радемахера кратная 73–77, 79–81, 86–87

- Сидона 10, 79, 81, 88–89, 105–107, 108, 117–118, 124, 126
 - произвольного порядка 89
- Сидона-Зигмунда 10, 126–127, 126
 - в узком смысле 10, 19, 117, 126
- сильно мультипликативная 9, 13, 103–105
- симметричная 9, 22, 72
- случайной безусловной сходимости (RUC-система) 9, 78, 88
- тригонометрическая 10, 108, 124–126
- системы, эквивалентные по распределению 97, 102–103, 107–109, 116–119, 124, 142
- сумма пространств 11, 46, 51, 63
- теорема Бойда 93
 - Брудного-Кругляка 13, 44, 64, 68, 133, 136, 144
 - Гапошкина 127
 - Кальдерона-Митягина 12–13, 50
 - Кашина 126–127
 - Квапеня-Рыхлика 107
 - о распределении L_∞ -норм "случайных" полиномов 80–81
 - полиномиальная 16
 - Рисса-Торина 11, 104
 - Родина-Семенова 35, 41, 88, 138, 140
 - Рудина 40, 86, 95
 - Спарра 13, 44, 51, 63
 - Стечкина 126
 - центральная предельная 7, 37, 75, 88, 92
- тройка пространств 11
 - интерполяционная 11
 - точная 11
- условное математическое ожидание 8, 109–111
- формула Стирлинга 18, 34, 74
- функция дополнительная 5, 77
 - квазивогнутая 5, 45–46, 50–55, 137–138, 143, 146
 - распределения 4, 17–18, 22, 31, 35, 38, 74–75, 81, 91–92, 99–103, 107, 119, 124, 131, 142
 - растяжения 6, 50? 53
 - фундаментальная 6, 36, 54, 59, 69, 128–131, 137–138, 144–145, 148
- функции независимые 7, 10, 14, 17, 31, 42, 70, 88, 96, 105, 107, 146
 - равноизмеримые 4, 19, 25, 49–50, 75–77, 131, 140
- Радемахера 9, 13–14, 40–41, 80, 107–108, 117, 122, 124, 126–127, 141, 146
- Уолша 70–71, 82, 88
 - нумерация Пэли 71
- эквивалентные 7
- хаос Радемахера 19–20, 70–89
 - порядка d 69–70, 85, 88
- характер компактной группы 105–107
- элемент с абсолютно непрерывной нормой 4
- ядро симметричное банаховой решетки 128, 131
 - пространства мультипликаторов 128, 131–140, 143–144, 147

Указатель обозначений

$\text{card } E$	2	$X_0 \cap X_1$	11	$\mathcal{P}_2$	68
$[x]$	2	$X_0 + X_1$	11	H	72
$m(B)$	3	$L(\vec{X}, \vec{Y})$	11	$X(I \times I)$	73
$S(T, \Sigma, \mu)$	3	(X_0, X_1, X)	11	$X[Y]$	77
$S[0, 1]$	3	$\mathcal{I}(X_0, X_1)$	11	$w_n(\cdot)$	81
χ_B	3	$\mathcal{K}(\cdot, x; X_0, X_1)$	11	$\mathcal{R}_{\text{ch}}(X)$	82
E', E''	4	$(X_0, X_1)_F^{\mathcal{K}}$	12	T_θ	82
E^*	4	$(X_0, X_1)_{\theta, p}$	12	$M(\varphi_\varepsilon)$	83
$n_x(\cdot)$	4	Δ_n^k	13	H_d	85
$x^*(\cdot)$	4	$r_n(\cdot)$	13	$c_{i,j}(\cdot)$	86
$L_p(T, \Sigma, \mu), L_p$	5	B_{2m}	17	$\mathcal{R}_{\text{dch}}(X)$	88
$L_{p,q}$	5	$\kappa_a(\cdot)$	25	$\mathcal{R}_{\text{ch}}^d(X)$	88
$x^{**}(\cdot)$	5	$\mathcal{K}(\cdot, f; L_1, L_2)$	25	$\text{Rad } X$	89
L_M	5	$\ \cdot\ _{Q(t)}$	27	$X(\ell_2)$	90
$M^*(\cdot)$	5	$\mathcal{J}_{\infty, 2}(\cdot, \cdot)$	28	T_φ	90
$\bar{\varphi}(\cdot)$	5	ℓ_2^t	28	$< f, g >$	93
$\Lambda_p(\varphi)$	5	$\mathcal{R}(X)$	33	(x, y)	94
$\Lambda(\varphi)$	5	E_X	33	$w_u(\cdot, \cdot)$	95
$M(\varphi)$	5	$N_2(\cdot), L_{N_2}$	34	$\{f_i\} \prec^{\mathcal{T}} \{g_i\}$	96
$X \subset Y$	5	G	34	$\{f_i\} \sim^{\mathcal{T}} \{g_i\}$	97
X°	6	$\text{Exp } L^F$	35	$\bar{\kappa}_a(\cdot)$	99
$\varphi_X(\cdot)$	6	$N_\alpha(\cdot), L_{N_\alpha}$	36	$C(G)$	105
$\tilde{\varphi}(\cdot)$	6	$c_k(\cdot)$	39	$\hat{f}(\gamma)$	105
$\mathcal{M}_f(\cdot)$	6	$t \oplus u$	40	$f * \mu$	106
γ_f, δ_f	6	$w_u(\cdot)$	40	$R_N(\cdot)$	112
σ_τ	6	$\mathcal{K}(X_0 + X_1)$	45	I_N	112
α_X, β_X	6	$\mathcal{P}_0$	45	$\mathcal{A}_s$	119
$X(\Omega) = X(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$	6	$\mathcal{P}_1$	45	$\mathcal{E}_N^s$	119
ℓ_p	7	$\mathcal{H}$	46	$\mathcal{A}'_s$	121
$m(\varphi)$	7	$\tilde{\mathcal{H}}$	46	$\Lambda(\mathcal{R}, X)$	127
a_k^*	7	$\mathcal{K}(\cdot, x; L_\infty, L_{N_\alpha})$	52	$\text{Sym}(X)$	131
$f \asymp g$	7	$\ell_{\beta, \infty}$	57	$y \simeq x$	131
$\mathbb{E}[f \mathfrak{R}]$	8	$\ell_1(\log)$	58	$X_{\ln^{1/2}}, \ \cdot\ _{\ln^{1/2}}$	132
$\mathbb{E}[f g_1, \dots, g_n]$	8	$q(X)$	60	$L_p(\log L)^{1/2}$	134
$\mathbb{E}[f]$	8	$\mathcal{L}_2$	60	$L_{p,q}(\log L)^\alpha$	134
$[x_n]_X$	8	$\mathcal{L}$	61	$Z_{\ln^{-1/2}}, \ \cdot\ _{\ln^{-1/2}}$	135
M_θ	8	W_X	61	$L \log \log L$	138
$\vec{X} = (X_0, X_1)$	11	$\Lambda_2, \ \cdot\ _{\Lambda_2}$	62–63		

С.В.Асташкин

г. Самара, Самарский госуниверситет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru