

УДК 517.982.27

С. В. Асташкин

Независимые функции в симметричных пространствах и свойство Круглова

Пусть X – сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0, 1]$. Показано, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X$$

выполнено для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, тогда и только тогда, когда X обладает свойством Круглова. В качестве следствия доказано, что это же условие необходимо и достаточно для того, чтобы в X выполнялся вариант известного неравенства Морэ для векторнозначных рядов Радемахера с независимыми коэффициентами.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

Пусть $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$, $k = 1, 2, \dots$, – функции Радемахера, рассматриваемые на отрезке $[0, 1]$. Согласно классическому неравенству Хинчина (см. [1]) для любого $p > 0$ существует константа $C_p > 0$ такая, что для произвольных вещественных a_k , $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{L_p} \leq C_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Это соотношение породило огромное количество исследований и обобщений и нашло многочисленные применения в различных разделах анализа и теории функций (см., например, [2]–[4]). В частности, в 1975 г. В. А. Родин и Е. М. Семёнов доказали, что в случае симметричных пространств X на $[0, 1]$ неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

имеет место тогда и только тогда, когда X содержит пространство G , где G – замыкание L_{∞} в пространстве Орлича L_{N_2} , построенном по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$ (см. [5]). В настоящей работе будет дано решение аналогичной задачи в случае, когда вместо скалярных кратных функций Радемахера рассматриваются произвольные независимые функции, в среднем равные нулю. Точнее,

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 07-01-96603).

будет выяснено, для каких симметричных пространств X существует $C > 0$ такое, что для всех последовательностей независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \quad (2)$$

Заметим, что если класс последовательностей независимых функций, в среднем равных нулю, заменить на более обширный класс мартингалных разностей, то ответ на этот вопрос известен: необходимое и достаточное условие на X состоит в положительности нижнего индекса Бойда этого пространства, т.е. $\alpha_X > 0$ (см. [6]).

В ситуации, когда рассматривается не весь класс мартингалных разностей, а лишь независимые функции, в среднем равные нулю, центральная роль, как мы увидим, будет принадлежать другому свойству, введенному и интенсивно изучавшемуся М. Ш. Браверманом [7], который назвал его свойством Круглова, так как оно было инспирировано некоторыми вероятностными конструкциями последнего [8]. Свойство Круглова оказалось чрезвычайно полезным средством при изучении геометрических свойств симметричных пространств [7], в частности неравенства Розенталя [9] и его обобщений [10], [11]. Несколько упрощая, можно сказать, что свойством Круглова обладают те пространства, которые находятся достаточно “далеко” от L_∞ – самого узкого симметричного пространства на $[0, 1]$. Так, например, симметричное пространство X обладает свойством Круглова ($X \in \mathbb{K}$), если $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$ (и, в частности, если $\alpha_X > 0$). Но, что более интересно, то же верно и для некоторых пространств, гораздо “более близких” к L_∞ , в частности для экспоненциальных пространств Орлича L_{N_γ} , $N_\gamma(u) = e^{u^\gamma} - 1$, если $0 < \gamma \leq 1$.

Основной результат настоящей работы (теорема 1) показывает, что условие $X \in \mathbb{K}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы в сепарабельном или максимальном симметричном пространстве X имело место обобщенное неравенство Хинчина (2). Тем самым, в силу предыдущего замечания это неравенство распространяется и на некоторые пространства, не содержащие L_p ни при каком $p < \infty$. Менее ограниченное, нежели положительность нижнего индекса Бойда, условие $X \in \mathbb{K}$, с одной стороны, показывает разницу между свойствами независимых функций, в среднем равных нулю, и общих мартингалных разностей. С другой стороны, оно сильнее, чем условие $X \supset G$, обеспечивающее выполнение неравенства (1) (частного случая (2) для скалярных рядов Радемахера).

В заключение – несколько слов о структуре и содержании работы. В §2 вводятся определения и обозначения, используемые в дальнейшем. В §3 получены необходимые и достаточные условия, при которых в симметричном пространстве X выполнено неравенство (2) (и даже несколько более общее, где норма l_2 в правой части заменена на норму симметричного пространства последовательностей $E \neq l_1$). В §4 показано, что свойство Круглова оказывается полезным и при изучении векторнозначных рядов Радемахера с независимыми коэффициентами (теорема 2). Наконец, в §5 доказана теорема 3, которая, в частности, дает необходимые и достаточные условия для выполнения некоторого ослабленного неравенства типа (2). Эти условия используют понятие оператора Круглова, которое было введено и изучалось в работе [12] (см. также [13]).

§ 2. Определения и обозначения

2.1. Симметричные пространства. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0, \alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$, называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если из того, что $y \in X$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$ ($t \in [0, \alpha)$), следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Здесь и далее λ – мера Лебега, а $x^*(t)$ – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* $|x(s)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf \{ \tau \geq 0 : \lambda(\{s \in [0, \alpha) : |x(s)| > \tau\}) \leq t \}, \quad t > 0.$$

Если X – симметричное пространство (с.п.) на интервале $[0, \alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство X' состоит из всех измеримых функций y , для которых

$$\|y\|_{X'} := \sup \left\{ \int_0^\alpha |x(t)y(t)| dt : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если X^* – пространство, сопряженное к X , то $X' \subset X^*$ и $X' = X^*$, если и только если X сепарабельно. Естественное вложение X в его второе двойственное X'' является изометрической сюръекцией, если и только если X *максимально* (или обладает *свойством Фату*), т.е. из того, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$, $f \in S[0, \alpha)$, $f_n \rightarrow f$ п.в. на $[0, \alpha)$ и $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$, следует $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X$. В том случае, когда с.п. X сепарабельно или максимально, естественное вложение X в его второе двойственное – изометрия.

Для любого с.п. X на $[0, 1]$ справедливы непрерывные вложения

$$L_\infty \subseteq X \subseteq L_1.$$

Через X_0 далее будет обозначаться замыкание L_∞ в X . Если $X \neq L_\infty$, то X_0 сепарабельно. Кроме того, $(X'')_0 = X_0$.

Если X – с.п., то функция $\varphi_X(t) := \|\chi_A\|_X$, где $A \subset (0, \infty)$, $\lambda(A) = t$, а χ_A – характеристическая функция этого множества, называется *фундаментальной функцией* X . Другой важной характеристикой с.п. являются его индексы Бойда. Напомним их определение в случае пространств на $[0, 1]$. Если $\tau > 0$, то оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau)\chi_{(0, \min(1, \tau))}(t)$ ограничен в любом с.п. X (см. [14; теорема 2.4.4]). Числа

$$\alpha_X := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}, \quad \beta_X := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда* пространства X ; всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$.

Важными примерами с.п. являются L_p -пространства, $1 \leq p \leq \infty$, а также их обобщение – пространства Орлича. Пусть Φ – функция Орлича на $[0, \infty)$, т.е. Φ – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. *Пространство Орлича* $L_\Phi = L_\Phi[0, 1]$ состоит из всех функций f , измеримых на $[0, 1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \rho > 0 : \int_0^1 \Phi \left(\frac{|f(t)|}{\rho} \right) dt \leq 1 \right\}.$$

Другие примеры симметричных пространств – пространства Лоренца и Марцинкевича. Пусть ψ – возрастающая вогнутая функция, определенная на $[0, 1]$,

$\psi(0) = 0$. Пространство Марцинкевича $M(\psi) = M(\psi)[0, 1]$ (соответственно пространство Лоренца $\Lambda(\psi) = \Lambda(\psi)[0, 1]$) состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{\psi(s)}{s} \cdot \int_0^s x^*(t) dt \quad \left(\text{соответственно } \|x\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 x^*(t) d\psi(t) \right).$$

Легко проверить, что $\varphi_{\Lambda(\psi)}(t) = \varphi_{M(\psi)}(t) = \psi(t)$. Кроме того, пространство $\Lambda(\psi)$ самое узкое, а пространство $M(\psi)$ самое широкое из всех симметричных пространств с фундаментальной функцией $\psi(t)$ (см. [14; теоремы 2.5.5 и 2.5.7]).

Следуя работе [15; § 2f], для каждого с.п. X на $[0, 1]$ положим

$$Z_X^2 := \{f \in (L_1 + L_\infty)(0, \infty) : \|f\|_{Z_X^2} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)} < \infty\}.$$

Нетрудно показать, что квазинорма $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ эквивалентна норме и поэтому Z_X^2 является с.п. на $[0, \infty)$. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность функций, определенных на $[0, 1]$, то через $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty$ всюду далее будем обозначать последовательность дизъюнктивных одинаково распределенных с ними функций на $[0, \infty)$, например

$$\bar{f}_k(t) = f_k(t - k + 1) \chi_{[k-1,k)}(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Подробнее о с.п. см. [14]–[16].

2.2. Свойство Круглова и некоторые вероятностные определения.

Пусть f – измеримая функция (случайная величина) на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим случайную величину (с.в.) $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i – независимые копии f (т.е. независимые с.в., одинаково распределенные с f), а N – с.в., независимая относительно последовательности $\{f_i\}$ и имеющая распределение Пуассона с параметром 1, т.е.

$$P\{N = k\} = \frac{1}{e \cdot k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Другое (эквивалентное) определение с.в. $\pi(f)$ можно дать, выразив ее характеристическую функцию $\theta_{\pi(f)}$ через характеристическую функцию θ_f с.в. f :

$$\theta_{\pi(f)}(t) = \exp(\theta_f(t) - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следующее свойство имеет своим источником работу В. М. Круглова [8] и интенсивно изучалось и использовалось М. Ш. Браверманом (см. [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что с.п. X на $[0, 1]$ обладает *свойством Круглова* ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует $\pi(f) \in X$.

Как уже говорилось во введении, этим свойством обладают пространства, достаточно “удаленные” от пространства L_∞ . Прежде всего, это пространства, содержащие L_p для некоторого $p < \infty$. Однако последнее условие не является необходимым; так, экспоненциальное пространство Орлича L_{N_γ} принадлежит классу $\mathbb{K}$, если $0 < \gamma \leq 1$.

Напомним определение введенного в работе [12] (см. также [13]) оператора $\mathcal{H}$, тесно связанного со свойством Круглова (и поэтому названного там оператором Круглова). Пусть $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность измеримых попарно непересекающихся подмножеств $[0, 1]$ и $\lambda(B_n) = 1/(e \cdot n!)$. Если $f \in L_1[0, 1]$, то

$$\mathcal{H}f(\omega_0, \omega_1, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \chi_{B_n}(\omega_0).$$

Тогда $\mathcal{K}$ – положительный линейный оператор, $\mathcal{K}: L_1[0, 1] \rightarrow L_1(\Omega, P)$, где $(\Omega, P) = \prod_{n=0}^{\infty}([0, 1], \lambda_n)$, λ_n – мера Лебега на $[0, 1]$. Так как распределения случайных величин $\mathcal{K}f$ и $\pi(f)$ одинаковы (см. [12]), то $\mathcal{K}f$ можно рассматривать как явное представление $\pi(f)$. Поэтому, в частности, с.п. X принадлежит $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ ограниченно действует из X в $X(\Omega, P)$ (см. [12; лемма 3.3]). Иногда предпочтительнее несколько иное (эквивалентное) описание оператора $\mathcal{K}$ (см. [12]). Если $f \in L_1[0, 1]$, $\{B_n\}$ – та же самая последовательность подмножеств $[0, 1]$ и $f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}$, χ_{B_n} – набор независимых функций для каждого $n \in \mathbb{N}$ такой, что $f_{n,k}^* = f^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1, 2, \dots, n$, то $\mathcal{K}f(t)$ определяется как некоторая перестановка функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{n,k}(t) \chi_{B_n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Заметим также, что ограниченность $\mathcal{K}$ из с.п. X в с.п. Y является достаточным (и при весьма широких предположениях необходимым) условием для эквивалентности сумм положительных независимых в Y и одинаково с ними распределенных дизъюнктивных функций в X (см. [12; теорема 3.5]).

Далее нам понадобится также определение слабой сходимости с.в. Говорят, что последовательность с.в. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к с.в. f , если для каждой непрерывной ограниченной функции g на $\mathbb{R}$ справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} E g(f_n) = E g(f)$, где всюду далее $E h = \int_0^1 h(t) dt$. Хорошо известно (см. [17; гл. 6, § 4, теорема 3]), что слабая сходимость $\{f_k\}$ к f эквивалентна поточечной сходимости их характеристических функций, т.е. тому, что $\theta_{f_n}(t) \rightarrow \theta_f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. И наконец, как обычно, далее $\text{supp } f = \{t : f(t) \neq 0\}$.

§ 3. Обобщенное неравенство Хинчина в симметричных пространствах

Начнем с формулировки главного результата работы, который дает необходимые и достаточные условия на с.п. X , при которых неравенство (2) выполнено для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Фактически мы рассмотрим даже несколько более общую ситуацию, когда норма l_2 в правой части (2) заменена на норму произвольного с.п. последовательностей $E \neq l_1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – произвольное сепарабельное или максимальное с.п. на $[0, 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $X \in \mathbb{K}$;
- (б) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2}; \quad (3)$$

(с) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X; \quad (4)$$

(d) существуют с.п. последовательностей $E \neq l_1$ и константа $C > 0$ такие, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \| (f_k) \|_E; \quad (5)$$

(е) существуют с.п. последовательностей $E \neq l_1$ и константа $C > 0$ такие, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda(\text{supp } f_k) \leq 1, \quad (6)$$

выполнено (5);

(f) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (6), выполнено соотношение (3), или, эквивалентно,

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k \right\|_X. \quad (7)$$

Для доказательства нам понадобятся две леммы, первую из которых мы докажем в чуть более общем виде, чтобы ее можно было применить еще раз в последней части работы.

ЛЕММА 1. Пусть X и Y – с.п. на $[0, 1]$, а E – с.п. последовательностей, $E \neq l_1$. Предположим, что существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности симметрично распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (6), выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_Y \leq C \| (f_k) \|_E. \quad (8)$$

Тогда аналогичное неравенство (возможно, с иной константой) выполнено и для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющей условию (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $Y \neq L_\infty$. Действительно, пусть a_k и b_k – непересекающиеся подмножества на $[0, 1]$, $\lambda(a_k) = \lambda(b_k) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим последовательность независимых трехзначных функций

$$f_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in a_k, \\ -1, & \text{если } t \in b_k, \\ 0, & \text{если } t \in [0, 1] \setminus (a_k \cup b_k), \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

С одной стороны, для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\|\sum_{k=1}^n f_k\|_{L_\infty} = n$. С другой стороны, если e_k – стандартные орты в пространстве последовательностей, а

$$\varphi(n) = \left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_E, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

то для любого с.п. X

$$\|\|(f_k)_{k=1}^n\|_E\|_X \leq \|\|(f_k)_{k=1}^n\|_E\|_{L_\infty} = \varphi(n).$$

Так как E симметрично и $E \neq l_1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0, \quad (10)$$

и, значит, в случае $Y = L_\infty$ для выбранной последовательности $\{f_k\}$ соотношение (8) не выполнено.

Итак, $Y \neq L_\infty$ и, значит, $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_Y(t) = 0$, где φ_Y – фундаментальная функция пространства Y . Тем самым, существует такое $a \in (0, 1/2]$, что

$$\frac{\|\chi_{[0,a]}\|_Y}{\|\chi_{[0,1]}\|_Y} \leq \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Предположим сначала, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda(\text{supp } f_n) \leq a. \quad (12)$$

Пусть f'_n имеет то же распределение, что и f_n , $n = 1, 2, \dots$, и, кроме того, семейство функций $\{f_n, f'_m\}_{n,m=1}^\infty$ независимо в совокупности. Тогда функции $h_n := f_n - f'_n$ независимы, симметрично распределены и так как $a \leq 1/2$, то в силу (12)

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda(\text{supp } h_n) \leq 2 \sum_{n=1}^\infty \lambda(\text{supp } f_n) \leq 2a \leq 1,$$

т.е. для последовательности $\{h_n\}$ выполнено (6). Поэтому по условию

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty h_n \right\|_Y \leq C \|\|(h_n)\|_E\|_X. \quad (13)$$

Далее, используя [7; предложение 1.11], равенство $h_n = f_n - \mathbb{E}f_n - (f'_n - \mathbb{E}f_n)$ и соотношение (12), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^\infty h_n \right\|_Y &\geq c \left\| \sum_{n=1}^\infty f_n - \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) \right\|_Y \geq c \left\| \sum_{n=1}^\infty f_n - \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right) \chi_{[0,a]} \right\|_Y \\ &\geq c \left(\left\| \sum_{n=1}^\infty f_n \right\|_Y - \mathbb{E} \left| \sum_{n=1}^\infty f_n \right| \cdot \|\chi_{[0,a]}\|_Y \right). \end{aligned}$$

Так как для любого с.п. Z на $[0, 1]$

$$\|g\|_Z \geq \|\chi_{[0,1]}\|_Z \cdot \int_0^1 |g(t)| dt, \quad g \in Z \quad (14)$$

(см. [14; теорема 2.4.1]), то отсюда и из (11) следует

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} h_n \right\|_Y \geq c \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_Y \cdot \left(1 - \frac{\|X_{[0,a]}\|_Y}{\|X_{[0,1]}\|_Y} \right) \geq \frac{c}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_Y.$$

Таким образом, в силу (13)

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_Y \leq \frac{2}{c} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} h_n \right\|_Y \leq \frac{2C}{c} \| (h_n) \|_E \|_X \leq \frac{4C}{c} \| (f_n) \|_E \|_X,$$

и в случае (12) лемма доказана.

Пусть теперь $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ – произвольная последовательность независимых функций такая, что выполнено (6). Не ограничивая общности, можно предположить, что для любого $b \in \mathbb{R}$ справедливо $\lambda(\{t : f_n(t) = b\}) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда если $l = [1/a] + 1$, то найдутся числа $-\infty = b_0 < b_1 < \dots < b_l = \infty$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{t \in [0, 1] : b_{k-1} < f_i(t) < b_k\}) \leq a, \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Положим $f_{i,k}(t) := f_i(t) \chi_{\{b_{k-1} < f_i < b_k\}}(t)$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, l$. Ясно, что $f_i = \sum_{k=1}^l f_{i,k}$ и для каждого $k = 1, 2, \dots, l$ последовательность независимых функций $\{f_{i,k}\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ удовлетворяет условию (12). Тем самым, используя уже доказанный случай и то, что $|f_{i,k}| \leq |f_i|$, $k = 1, 2, \dots, l$, получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \right\|_Y &\leq \sum_{k=1}^l \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,k} \right\|_Y \leq \frac{4C}{c} \sum_{k=1}^l \| (f_{i,k})_{i=1}^{\infty} \|_E \|_X \\ &\leq \frac{4C}{c} \left(\left[\frac{1}{a} \right] + 1 \right) \| (f_i) \|_E \|_X, \end{aligned}$$

и лемма 1 доказана.

Следующую лемму можно получить, используя общие соображения, связанные с теорией интерполяции линейных операторов (см., например, [18; п. 12]), но ради полноты изложения мы дадим ее прямое доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть E – с.п. последовательностей, $E \neq l_1$. Существует положительная однородная функция первой степени $\psi(u, v)$, возрастающая по каждому аргументу, такая, что $\lim_{u \rightarrow 0+} \psi(u, v) = 0$ и для всех $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$

$$\|a\|_E \leq \psi(\|a\|_{l_{\infty}}, \|a\|_{l_1}). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(n)$ – фундаментальная функция пространства E , определенная соотношением (9). Рассмотрим кусочно линейную функцию на $[0, \infty)$, равную 0 при $t = 0$ и $\varphi(n)$ при $t = n$, обозначив ее также через $\varphi(t)$. Так как $\varphi(n)$ возрастает, а $\varphi(n)/n$ убывает, то аналогичные свойства имеет и $\varphi(t)$, т.е. она возрастает, а $\varphi(t)/t$ убывает при $t \geq 0$. Поэтому если $\tilde{\varphi}(t)$ – наименьшая вогнутая мажоранта функции $\varphi(t)$, то в силу [14; теорема 2.1.1]

$$\varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t) \leq 2\varphi(t), \quad t > 0. \quad (16)$$

И наконец, пусть $\psi(u, v) := u\tilde{\varphi}(u)$, $u, v > 0$. Легко проверить, что $\psi(u, v)$ – положительная однородная функция первой степени, возрастающая по каждому аргументу. Кроме того, в силу (16) и (10)

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \psi(u, v) = v \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0.$$

В заключение докажем соотношение (15). Пусть $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $a^n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$. Так как

$$a^n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k e_i, \quad a_{n+1} = 0,$$

то в силу вогнутости $\tilde{\varphi}(t)$, соотношения (16), а также определения и свойств функции ψ получаем

$$\begin{aligned} \|a^n\|_E &\leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \varphi(k) \leq a_1 \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{a_1} \tilde{\varphi}(k) \\ &\leq a_1 \tilde{\varphi}\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{a_1} k\right) = \psi\left(a_1, \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) k\right) \\ &\leq \psi(\|a\|_{l_\infty}, \|a\|_{l_1}). \end{aligned}$$

Из того, что $\|a^n - a\|_{l_1} \rightarrow 0$, следует $\|a^n - a\|_E \rightarrow 0$, поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем (15). Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (a) $\Rightarrow$ (b). Доказательство этой импликации см. в [19; теорема 1].

(b) $\Rightarrow$ (c). Напомним, что $\bar{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$, $t > 0$, а Z_X^2 — с.п. на $(0, \infty)$ с квазинормой

$$\|g\|_{Z_X^2} := \|g^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|g^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)}. \quad (17)$$

Если $\bar{f} = \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k$, то в силу [20; теорема 1] имеем

$$\|\bar{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left(\sum_{k=1}^\infty \bar{f}^*(k)^2\right)^{1/2} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2\right)^{1/2} \right\|_X. \quad (18)$$

Так как для любой измеримой на полуоси функции g

$$\|g^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)} \leq \left(\sum_{k=1}^\infty g^*(k)^2\right)^{1/2},$$

то из (17) и (18) получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2\right)^{1/2} \right\|_X.$$

Отсюда и из (3) сразу следует (4), и (c) доказано.

Импликации (c) $\Rightarrow$ (d) и (d) $\Rightarrow$ (e) очевидны.

(e) $\Rightarrow$ (f). По лемме 1 неравенство (5) выполнено для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющей условию (6). Применяя это соотношение к функциям $|f_k|$, $k = 1, 2, \dots$, и учитывая (15), получим

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty |f_k| \right\|_X \leq C \| (f_k) \|_E \|_X \leq C \|\psi(\|(f_k)\|_{l_\infty}, \|(f_k)\|_{l_1})\|_X. \quad (19)$$

Так как в силу свойств функции ψ для произвольных $x, y \in X$ и $s, t > 0$

$$\psi(x, y) \leq \max\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{t}\right) \psi(s, t) \leq \left(\frac{x}{s} + \frac{y}{t}\right) \psi(s, t),$$

то, взяв s и t так, что $\|x\|/s = \|y\|/t$, получим

$$\|\psi(x, y)\| \leq \left(\frac{\|x\|}{s} + \frac{\|y\|}{t}\right) \psi(s, t) \leq 2 \max\left(\frac{\|x\|}{s}, \frac{\|y\|}{t}\right) \psi(s, t) = 2\psi(\|x\|, \|y\|).$$

Тем самым, из (19) следует

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_X &\leq 2C\psi(\|(f_k)\|_{l_\infty}\|_X, \|(f_k)\|_{l_1}\|_X) \\ &= 2C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_X \psi\left(\frac{\|(f_k)\|_{l_\infty}\|_X}{\|(f_k)\|_{l_1}\|_X}, 1\right), \end{aligned}$$

откуда

$$\psi\left(\frac{\|(f_k)\|_{l_\infty}\|_X}{\|(f_k)\|_{l_1}\|_X}, 1\right) \geq \frac{1}{2C}.$$

Так как по лемме 2 $\lim_{u \rightarrow 0+} \psi(u, v) = 0$, то из последнего неравенства следует, что для некоторого $C_1 > 0$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_X \leq C_1 \left\| \sup_{k=1,2,\dots} |f_k| \right\|_X.$$

Далее, хорошо известно (см., например, [21; предложение 1]), что при условии (6) для произвольного с.п. X

$$\left\| \sup_{k=1,2,\dots} |f_k| \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \right\|_X \leq 2 \left\| \sup_{k=1,2,\dots} |f_k| \right\|_X.$$

Поэтому из предыдущего неравенства следует

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_X \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \right\|_X,$$

и, следовательно, (f) доказано.

(f) $\Rightarrow$ (a). Прежде всего, в силу [12; теорема 3.5] оператор Круглова $\mathcal{K}$ ограниченно действует из X в его второе двойственное X'' . Покажем, что тогда

$$\mathcal{K} : X'' \rightarrow X'' \quad (20)$$

(иначе говоря, $X'' \in \mathbb{K}$). Для произвольной функции $f \in X''$ обозначим

$$f_n := f \cdot \chi_{\{|f| \leq n\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f_n \rightarrow f$ п.в. на $[0, 1]$ и $f_n \in L_\infty \subset X$. Так как $\mathcal{K} : X \rightarrow X''$, $|f_n| \leq |f|$ и по условию X изометрично вложено в X'' , то

$$\|\mathcal{K}f_n\|_{X''} \leq C\|f_n\|_X \leq C\|f\|_{X''}. \quad (21)$$

Из определения $\mathcal{K}$ следует, что $\mathcal{K}f_n \rightarrow \mathcal{K}f$ п.в. Значит, из (21) и свойств X'' следует, что $\mathcal{K}f \in X''$ и $\|\mathcal{K}f\|_{X''} \leq C\|f\|_{X''}$, т.е. (20) доказано.

Если теперь X максимально (т.е. $X = X''$), то утверждение доказано. Предположим, что X сепарабельно. В силу (20) и [12; теорема 7.2]

$$h_1(u) := \frac{\ln(e/u)}{\ln(\ln(\ln \alpha/u))} \in X'', \quad \text{где } \ln \ln \ln \alpha > e,$$

т.е. пространство Марцинкевича $M(\psi)$, порожденное функцией

$$\psi(t) = \frac{\ln(\ln(\ln \alpha/t))}{\ln(e/t)},$$

вложено в X'' . Так как X сепарабельно, то

$$(M(\psi))_0 \subset (X'')_0 = X_0 = X.$$

Очевидно, что функция

$$h_2(u) := \frac{\ln(e/u)}{(\ln(\ln \alpha/u))}$$

принадлежит пространству $(M(\psi))_0$, поэтому в силу предыдущего вложения $h_2 \in X$. Отсюда и из [12; теорема 4.4] следует, что

$$\mathcal{K} : L_\infty \rightarrow X. \quad (22)$$

Пусть $f \in X$. Так как X сепарабельно, то существует $\{g_n\} \subset L_\infty$ такая, что $\|g_n - f\|_X \rightarrow 0$. Тем самым, в силу (20) имеем $\|\mathcal{K}g_n - \mathcal{K}f\|_{X''} \rightarrow 0$. С другой стороны, из (22) следует, что $\{\mathcal{K}g_n\} \subset X$. А так как X изометрически вложено в X'' , получаем $\|\mathcal{K}g_n - \mathcal{K}f\|_X \rightarrow 0$ и $\mathcal{K}f \in X$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показывает доказательство теоремы 1, а также [12; теорема 3.5], условия (а)–(f) эквивалентны также каждому из следующих:

(g) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности симметрично распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (6), выполнено (4);

(h) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности равноизмеримых независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (6), выполнено (7).

В то же время, простой пример $f_k(t) = 1$, $k = 1, 2, \dots$, показывает, что условие “существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности равноизмеримых независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнено (4)” не имеет места ни в каком с.п.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если рассмотреть вопрос, для каких с.п. функций X и последовательностей E выполняется соотношение (5), когда в качестве f_k , $k = 1, 2, \dots$, берутся лишь скалярные кратные функций Радемахера, то результат будет совсем иным. А именно, как доказано в [22], двусторонняя оценка

$$C^{-1} \|(a_k)\|_E \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \|(a_k)\|_E$$

имеет место для некоторого с.п. X на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда пространство последовательностей E интерполяционно относительно пары (l_1, l_2) .

§ 4. Векторнозначные ряды Радемахера с независимыми коэффициентами

Здесь мы применим теорему 1 к изучению рядов вида

$$F(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t), \quad s, t \in [0, 1],$$

где $\{f_k\}$ – произвольная последовательность независимых функций, а r_k – функции Радемахера. Если X – с.п. на $I = [0, 1]$, то $X(I \times I)$ – соответствующее с.п. на квадрате $I \times I$ с нормой $\|f\|_{X(I \times I)} = \|f^*\|_X$.

ТЕОРЕМА 2. *Если с.п. X сепарабельно или максимально, то следующие условия эквивалентны:*

(α) $X \in \mathbb{K}$;

(β) *существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ выполнено*

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X; \quad (23)$$

(γ) *существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ выполнено*

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) \right\|_X dt \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что левые неравенства в (23) и (24) выполнены в любом с.п. Проверим это, например, для (23). В силу безусловности последовательности $\{f_k(s) r_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ в $X(I \times I)$ с константой 1 (см. [7; предложение 1.14]), а также неравенства Хинчина для L_1 с оптимальной константой из [23] имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) \right\|_{X(I \times I)} &= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) r_k(u) \right\|_{X(I \times I)} du \\ &\geq \left\| \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) r_k(u) \right| du \right\|_{X(I \times I)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \end{aligned}$$

Доказательство левой части (24) совершенно аналогично.

Далее, так как функции $f_k(s) r_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, независимы и

$$\int_0^1 \int_0^1 f_k(s) r_k(t) ds dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то по теореме 1 правое неравенство в (23) – непосредственное следствие (α). Докажем правое неравенство в (24). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ – последовательность независимых функций. Тогда функции

$$g_k(s) = f_k(s) - \int_0^1 f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

также независимы и, кроме того,

$$\int_0^1 g_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому, применяя к последовательности $\{g_k(\cdot)r_k(t)\}_{k=1}^\infty$ для каждого $t \in [0, 1]$ теорему 1, а также соотношение (14), получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t) \right\|_X dt &= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty \left(g_k(s) + \int_0^1 f_k(s) ds \right) \cdot r_k(t) \right\|_X dt \\ &\leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty g_k(s)r_k(t) \right\|_X dt + \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty \int_0^1 f_k(s) ds \cdot r_k(t) \right\|_X dt \cdot \|\chi_{[0,1]}\|_X \\ &\leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty g_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X + \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^1 f_k(s) ds \right)^2 \right)^{1/2} \cdot \|\chi_{[0,1]}\|_X \\ &\leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X + (C+1)\|\chi_{[0,1]}\|_X \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^1 f_k(s) ds \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X + (C+1)\|\chi_{[0,1]}\|_X \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2(s) \right)^{1/2} ds \\ &\leq (2C+1) \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \end{aligned}$$

Пусть, наоборот, выполнено (β) или (γ) (точнее, правая часть (23) или (24)). Для доказательства (α) в силу теоремы 1 и замечания 1 достаточно доказать, что для пространства X выполнено условие (g) из замечания 1. Предположим, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ состоит из симметрично распределенных независимых функций, удовлетворяющих условию (6). Еще раз применяя предложение 1.14 из [7], заключаем, что $\{f_k\}$ безусловна с константой 1 в X . Поэтому если выполнена правая часть (24), то

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X = \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t) \right\|_X dt \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X,$$

и (g) доказано. Кроме того, распределение $f_k(s)$ на I совпадает с распределением $f_k(s)r_k(t)$ на $I \times I$, $k = 1, 2, \dots$. Действительно, так как f_k симметрично распределены, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_2(\{(s, t) \in I \times I : f_k(s)r_k(t) > \tau\}) \\ &= \frac{1}{2} [\lambda(\{s \in I : f_k(s) > \tau\}) + \lambda(\{s \in I : -f_k(s) > \tau\})] \\ &= \lambda(\{s \in I : f_k(s) > \tau\}). \end{aligned}$$

Значит, в силу независимости функций f_k , $k = 1, 2, \dots$, и $f_k(s)r_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t) \right\|_{X(I \times I)},$$

тем самым, (g) является следствием также и правой части (23). Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение теоремы 2 интересно сопоставить с двумя известными результатами.

Первый из них утверждает, что в любом сепарабельном или максимальном с.п. X следующие условия эквивалентны: (i) существует $C > 0$ такое, что для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнено (23); (ii) нижний индекс Бойда α_X положителен. (Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) доказана в [15; предложение 2.d.1], а (i) $\Rightarrow$ (ii) – в [24].)

Второй (неравенство Морэ) говорит о том, что если X – q -вогнутая банахова решетка (см. [15; определение 1.d.3]) при некотором $q < \infty$, то существует такое $C > 0$, что (24) выполнено для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ (см. [15; теорема 1.d.6(i)]).

Заметим, что, с одной стороны, в обоих упомянутых утверждениях коэффициенты ряда – произвольные функции, с другой – условия выполнения неравенств (23) и (24) в них гораздо более ограничительные, чем условие (α) .

§ 5. Ослабленное неравенство Хинчина и оператор Круглова

Пусть фундаментальная функция с.п. X на $[0, 1]$ равна $\varphi(t)$. Тогда, как уже говорилось ранее, имеют место непрерывные вложения

$$\Lambda(\varphi) \subset X \subset M(\varphi),$$

где $\Lambda(\varphi)$ и $M(\varphi)$ – пространства Лоренца и Марцинкевича соответственно (см. [14; теоремы 2.5.5 и 2.5.7]). Поэтому если в X для всех последовательностей независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено неравенство (2), то, тем более, для таких же последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \Lambda(\varphi)$ справедливо

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_{M(\varphi)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_{\Lambda(\varphi)}. \quad (25)$$

Далее мы покажем, что последнее соотношение так же, как и (2), допускает характеристику, только теперь вместо свойства Круглова нужно рассматривать оператор Круглова.

Для удобства напомним следующее определение из теории интерполяции операторов (см. [14; определение 2.6.1]). Пусть φ – возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$. Говорят, что линейный оператор T , определенный на конечнозначных измеримых функциях, имеет *ослабленный тип* φ , если он ограничен из $\Lambda(\varphi)$ в $M(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 3. Следующие условия эквивалентны:

- (i) оператор Круглова $\mathcal{K}$ имеет ослабленный тип φ ;
- (ii) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \Lambda(\varphi)$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, имеет место (25);
- (iii) существует $C > 0$ такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \Lambda(\varphi)$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условию (6), имеет место (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнено (i), то в силу [19; теорема 2.1] и [20; теорема 1] (см. также доказательство теоремы 1) для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda(\varphi)$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{M(\varphi)} \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \right\|_{Z_{\Lambda(\varphi)}^2} \leq C_2 \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_{\Lambda(\varphi)},$$

и (ii) доказано.

Так как импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна, то осталось доказать, что из (iii) следует (i).

Пусть $f = \chi_{[0,u]}$, $0 < u \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ – набор независимых функций, одинаково распределенных с функцией $\sigma_{1/n} f(t) = \chi_{[0,u/n]}(t)$. Если теперь $f_n := \sum_{k=1}^n f_{n,k}$, то, как легко видеть,

$$\lambda(\{t \in [0, 1] : f_n(t) = k\}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{u}{n}\right)^k \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$f_n^*(t) = \sum_{k=1}^n \chi_{[0,\tau_k^n]}, \quad \text{где } \tau_k^n = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{u}{n}\right)^k \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-k}. \quad (26)$$

Заметим также, что по условию (iii) и лемме 1 соотношение (25) выполнено для каждого из наборов $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$, т.е.

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_{n,k} \right\|_{M(\varphi)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^n f_{n,k}^2 \right)^{1/2} \right\|_{\Lambda(\varphi)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Из определения нормы в пространстве Марцинкевича (см. также [14; гл. 2, § 5, неравенство (5.15)]) следует, что

$$\|f_n\|_{M(\varphi)} = \left\| \sum_{k=1}^n f_{n,k} \right\|_{M(\varphi)} \geq \max_{k=1,2,\dots,n} (k\varphi(\tau_k^n)).$$

Кроме того,

$$\left(\sum_{k=1}^n f_{n,k}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n f_{n,k} \right)^{1/2} = f_n^{1/2}. \quad (28)$$

Следовательно, в силу (27) мы получаем

$$\max_{k=1,2,\dots,n} (k\varphi(\tau_k^n)) \leq C \|f_n^{1/2}\|_{\Lambda(\varphi)}. \quad (29)$$

Далее, легко видеть, что

$$(f_n^{1/2})^*(s) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \chi_{[0,\tau_k^n]}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \chi_{[0,\tau_k^n]}(s),$$

откуда по определению нормы в пространстве Лоренца (см. также [14; гл. 2, § 5, равенство (5.4)]) имеем

$$\|f_n^{1/2}\|_{\Lambda(\varphi)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n). \quad (30)$$

Следовательно, в силу (29)

$$\max_{k=1,2,\dots,n} (k\varphi(\tau_k^n)) \leq C \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n). \quad (31)$$

Обозначим

$$\alpha_n := \max_{k=1,2,\dots,n} (k\varphi(\tau_k^n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\varphi(\tau_k^n) \leq \alpha_n/k$, $k = 1, 2, \dots, n$, тем самым, для произвольных $n \geq N \geq 1$

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n) \leq \sum_{k=N}^n k^{-3/2} \cdot \alpha_n.$$

Поэтому если взять N таким, что $(C+1) \sum_{k=N}^{\infty} k^{-3/2} \leq 1$, то для всех $n \geq N$

$$(C+1) \sum_{k=N}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n) \leq \alpha_n.$$

Комбинируя последнее неравенство с (31), мы получим

$$(C+1) \sum_{k=N}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n) \leq C \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n).$$

Отсюда

$$\sum_{k=N}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n) \leq C \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n),$$

или

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n) \leq (C+1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{k}} \varphi(\tau_k^n) \leq C' \varphi(\tau_1^n) \leq C' \varphi(u),$$

где последнее неравенство вытекает из оценки $\tau_1^n = 1 - (1-u/n)^n \leq u$ (см. (26)).

В итоге, учитывая (28) и (30), мы приходим к неравенству

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n f_{n,k}^2 \right)^{1/2} \right\|_{\Lambda(\varphi)} \leq C' \varphi(u).$$

Отсюда и из (27) получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_{n,k} \right\|_{M(\varphi)} \leq C'' \varphi(u), \quad n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Непосредственное вычисление показывает, что характеристическая функция каждой из величин $f_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, определяется равенством

$$\theta_{f_{n,k}}(t) = n^{-1} \theta_f(t) + (1 - n^{-1}), \quad t \in \mathbb{R},$$

где θ_f – характеристическая функция величины $f = \chi_{[0,u]}$. Поэтому характеристическая функция суммы $f_n = \sum_{k=1}^n f_{n,k}$ равна

$$\theta_{f_n}(t) = (n^{-1}(\theta_f(t) - 1) + 1)^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{f_n}(t) = \exp(\theta_f(t) - 1) = \theta_{\pi(f)}(t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, то f_n сходится слабо к $\mathcal{K}f$ (см. § 2). Тем самым, в силу соотношения (32), предложения 1.5 из [7], а также того, что $M(\varphi)'' = M(\varphi)$ (см. [14; гл. 2, § 5]), мы получаем

$$\|\mathcal{K}\chi_{[0,u]}\|_{M(\varphi)} \leq C''\varphi(u), \quad 0 < u \leq 1.$$

Отсюда в силу леммы 2.5.2 из [14] вытекает ограниченность оператора $\mathcal{K}$ из $\Lambda(\varphi)$ в $M(\varphi)$, и теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как показано в [12; замечание 5.2], оператор $\mathcal{K}$ имеет ослабленный тип φ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{u \in (0,1], k \in \mathbb{N}} \frac{k\varphi(u^k/k!)}{\varphi(u)} < \infty.$$

Нетрудно показать, что на самом деле

$$\max_{k=1,2,\dots,n} (k\varphi(\tau_k^n)) \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_{n,k} \right\|_{M(\varphi)} \leq C \max_{k=1,2,\dots,n} (k\varphi(\tau_k^n)),$$

и тогда этот результат можно получить также за счет перехода к пределу в неравенстве (32).

Список литературы

- [1] A. Khintchine, “Über dyadische Brüche”, *Math. Z.*, **18**:1 (1923), 109–116.
- [2] В. Ф. Гапошкин, “Лакунарные ряды и независимые функции”, *УМН*, **21**:6 (1966), 3–82; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “Lacunary series and independent functions”, *Russian Math. Surveys*, **21**:6 (1966), 1–82.
- [3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [4] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, “Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия”, *УМН*, **50**:5 (1995), 3–62; англ. пер.: G. Peshkir, A. N. Shiryaev, “The Khintchine inequalities and martingale expanding sphere of their action”, *Russian Math. Surveys*, **50**:5 (1995), 849–904.
- [5] V. A. Rodin, E. M. Semyonov, “Rademacher series in symmetric spaces”, *Anal. Math.*, **1**:3 (1975), 207–222.
- [6] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces”, *Israel J. Math.*, **64**:3 (1988), 267–275.
- [7] M. Sh. Braverman, *Independent random variables and rearrangement invariant spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [8] В. М. Круглов, “Замечание о бесконечно делимых распределениях”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **15**:2 (1970), 330–336; англ. пер.: V. M. Kruglov, “A note on infinitely divisible distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **15** (1970), 319–324.
- [9] H. P. Rosenthal, “On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables”, *Israel J. Math.*, **8**:3 (1970), 273–303.
- [10] N. L. Carothers, S. J. Dilworth, “Inequalities for sums of independent random variables”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:1 (1988), 221–226.

- [11] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces”, *Ann. Probab.*, **17**:2 (1989), 789–808.
- [12] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach”, *Israel J. Math.*, **145**:1 (2005), 125–156.
- [13] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 483–489; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Comparison of sums of independent and disjoint functions in symmetric spaces”, *Math. Notes*, **76**:3–4 (2004), 449–454.
- [14] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978; англ. пер.: S. G. Krejn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
- [15] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, 1979.
- [16] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [17] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, М., 1976; англ. пер.: A. A. Borovkov, *Probability theory*, Gordon and Breach, Amsterdam–Abingdon, 1998.
- [18] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, “Основы теории интерполяции линейных операторов”, *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Изд-во Ярослав. ун-та, Ярославль, 1977, 31–74.
- [19] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Суммы независимых функций в симметричных пространствах со свойством Круглова”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 630–635; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Sums of independent functions in symmetric spaces with the Kruglov property”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 593–598.
- [20] S. Montgomery-Smith, “Rearrangement invariant norms of symmetric sequence norms of independent sequences of random variables”, *Israel J. Math.*, **131**:1 (2002), 51–60.
- [21] P. Hitczenko, S. Montgomery-Smith, “Measuring the magnitude of sums of independent random variables”, *Ann. Probab.*, **29**:1 (2001), 447–466.
- [22] S. V. Astashkin, “About interpolation of subspaces of rearrangement invariant spaces generated by Rademacher system”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **25**:7 (2001), 451–465.
- [23] S. J. Szarek, “On the best constants in the Khinchin inequality”, *Studia Math.*, **58**:2 (1976), 197–208.
- [24] С. В. Асташкин, М. Ш. Браверман, “Подпространство симметричного пространства, порожденное системой Радемахера с векторными коэффициентами”, *Операторные уравнения в функциональных пространствах*, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986, 3–10.

С. В. Асташкин (S. V. Astashkin)
Самарский государственный университет
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию
08.06.2007 и 17.03.2008