

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 14, ВИНТИ, М., 1977, 5–58. [2] А. С. Андреев, Матем. сб., **197:2** (2006), 17–34.

Военно-морской институт радиоэлектроники
им. А. С. Попова

Поступило в редакцию
13 июня 2006 г.

УДК 517.982.27

Обобщенное неравенство Хинчина в симметричных пространствах

© 2008. С. В. АСТАШКИН

1. Введение. Пусть $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$ ($k = 1, 2, \dots$) — функции Радемахера, рассматриваемые на отрезке $[0, 1]$. Согласно классическому неравенству Хинчина [1], для любого $p > 0$ существует константа $C_p > 0$, такая, что для произвольных вещественных a_k ($k = 1, 2, \dots$) выполнено неравенство $\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\|_{L_p} \leq C_p (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2)^{1/2}$.

Это соотношение вызвало большое количество исследований и обобщений, нашло многочисленные применения в различных разделах анализа [2]. В частности, в 1975 г. Родин и Семенов [3] доказали, что в случае симметричных пространств (с.п.) X на $[0, 1]$ неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

имеет место тогда и только тогда, когда X содержит G , где G — сепарабельная часть пространства Орлича L_{N_2} , построенного по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$. В этой работе будет дано решение аналогичной задачи в случае, когда вместо скалярных кратных функций Радемахера рассматриваются произвольные независимые функции, в среднем равные нулю. Точнее, будет дан ответ на вопрос, для каких с.п. X существует $C > 0$, такое, что для всех последовательностей независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, удовлетворяющих условиям $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2)^{1/2} \in X$, выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \quad (2)$$

Заметим, что если класс последовательностей независимых функций, в среднем равных нулю, заменить на более обширный класс мартингаловых разностей, то ответ на этот вопрос известен: необходимое и достаточное условие на X состоит в положительности нижнего индекса Бойда этого пространства, т. е. $\alpha_X > 0$ [4].

В нашей ситуации центральная роль будет принадлежать так называемому свойству Круглова, введенному и интенсивно изучавшемуся Браверманом [5]. Основной результат этой заметки (теорема 1) в терминах этого свойства дает

характеризацию сепарабельных или максимальных с.п., в которых обобщенное неравенство Хинчина (2) выполнено для произвольных последовательностей независимых функций, в среднем равных нулю. Второй результат (теорема 2) показывает, что то же свойство оказывается полезным при изучении свойств подпространства с.п., порожденного системой Радемахера с независимыми векторными коэффициентами.

2. Определения и обозначения. Банахово пространство X вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0, \alpha)$ ($0 < \alpha \leq \infty$), называется *симметричным* (или *перестановочно инвариантным*) пространством (с.п.), если из того, что $y \in X$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$ ($t \in [0, \alpha)$), следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Здесь $x^*(t)$ — невозрастающая непрерывная справа *перестановка* функции $|x(s)|$, т.е. $x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : \lambda(\{s \in [0, \alpha) : |x(s)| > \tau\}) \leq t\}$, $t > 0$ (λ — мера Лебега).

Если X — с.п. на интервале $[0, \alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство X' состоит из всех измеримых функций y , для которых $\|y\|_{X'} := \sup\{\int_0^\alpha |x(t)y(t)| dt : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < \infty$. С.п. X называется *максимальным* (обладает свойством *Фату*), если естественное вложение этого пространства в его второе двойственное X'' — сюръективная изометрия. Это эквивалентно тому, что из условий $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_n \rightarrow x$ п.в. на $[0, \alpha)$ и $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ следует, что $x \in X$. Заметим, что все важные в приложениях с.п. (пространства Орлича, Марцинкевича, Лоренца и т.д.) либо максимальны, либо сепарабельны. Важной характеристикой с.п. являются его индексы Бойда α_X и β_X , связанные с оператором растяжения; всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$ [6, теорема 2.4.4]. Для любого с.п. X на $[0, 1]$ имеют место непрерывные вложения $L_\infty[0, 1] \subset X \subset L_1[0, 1]$ [6, теорема 2.4.1].

Если X — с.п. на $[0, 1]$, то пространство Z_X^2 , введенное в [7], состоит из всех $f \in (L_1 + L_\infty)(0, \infty)$, таких, что

$$\|f\|_{Z_X^2} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)} < \infty.$$

Нетрудно показать, что квазинорма $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ эквивалентна некоторой норме, и поэтому Z_X^2 является с.п. на $[0, \infty)$. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность функций, определенных на $[0, 1]$, то через $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^\infty$ далее будет обозначаться последовательность дизъюнктных одинаково распределенных с функциями f_k функций на $[0, \infty)$, например, $\tilde{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1,k)}(t)$. Подробнее о с.п. см. монографии [6], [8], [9].

Пусть f — измеримая функция (случайная величина) на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим случайную величину $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i — независимые копии функции f , а N — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром 1, независимая относительно последовательности $\{f_i\}$. Следующее свойство было введено и интенсивно изучалось Браверманом [5], использовавшим при этом некоторые вероятностные конструкции Круглова [10].

Определение 1. С.п. X на $[0, 1]$ обладает свойством Круглова (иными словами, $X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует, что $\pi(f) \in X$.

Грубо говоря, с.п. X принадлежат классу $\mathbb{K}$, если оно расположено достаточно «далеко» от L_∞ . В частности, это верно, если $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$ [5, теорема 1.2, с. 16]. Кроме того, если L_{N_γ} — экспоненциальное пространство

Орлича, построенное по функции $N_\gamma(u) = e^{u^\gamma} - 1$, то $L_{N_\gamma} \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $0 < \gamma \leq 1$ [5, с. 42].

3. Формулировка результатов.

Теорема 1. Пусть X — сепарабельное или максимальное с.п. на $[0, 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $X \in \mathbb{K}$;
- (б) существует $C > 0$, такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющих условиям $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k \in Z_X^2$, выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2}; \quad (3)$$

- (с) существует $C > 0$, такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющих условиям $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и $(\sum_{k=1}^\infty f_k^2)^{1/2} \in X$, выполнено неравенство (2).

Замечание 1. Неравенство, противоположное к (3), выполнено в любом с.п. X [7]. Кроме того, в [7] доказано, что (3) верно, если $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$. Последнее условие, как уже говорилось, более ограничительно, чем условие (а). В частности, теорема 1 показывает, что соотношения (2) и (3) имеют место в экспоненциальном пространстве Орлича L_{N_γ} , если $0 < \gamma \leq 1$.

Замечание 2. Более слабое, нежели положительность нижнего индекса Бойда, условие $X \in \mathbb{K}$, с одной стороны, показывает разницу между свойствами независимых функций, в среднем равных нулю, и общих мартингалных разностей [4]. С другой стороны, оно сильнее, чем условие $X \supset G$, обеспечивающее выполнение неравенства (1), частного случая неравенства (2) для скалярных кратных одной последовательности — системы Радемахера.

Пусть X — с.п. на $I = [0, 1]$, а $X(I \times I)$ — соответствующее с.п. на квадрате $I \times I$, т.е. $\|f\|_{X(I \times I)} = \|f^*\|_X$.

Теорема 2. Если с.п. X сепарабельно или максимально, то следующие условия эквивалентны:

- (а) $X \in \mathbb{K}$;
- (б) существует $C > 0$, такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s) r_k(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X; \quad (4)$$

- (γ) существует $C > 0$, такое, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s) r_k(t) \right\|_X dt \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \quad (5)$$

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 интересно сопоставить с двумя известными результатами. Первый из них утверждает, что в любом сепарабельном или максимальном с.п. X эквивалентны следующие условия: (i) существует $C > 0$, такое, что для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнено неравенство (4) и (ii) $\alpha_X > 0$ (импликация (ii) $\implies$ (i) доказана в [8, предложение 2.d.1], а (i) $\implies$ (ii) — в [11]). Второй (неравенство Морэ) говорит о том, что если X есть q -вогнутая банахова решетка [8, определение 1.d.3] при некотором $q < \infty$, то существует $C > 0$, такое, что (5) выполнено для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ [8, теорема 1.d.6(i)]. Заметим, что, с одной стороны, в обоих утверждениях коэффициенты ряда — произвольные функции, с другой — условия выполнения неравенств (4) и (5) в них гораздо более ограничительные, чем условие (α) .

Замечание 4. При доказательстве результатов заметки был использован операторный подход к изучению свойства Круглова, развитый в работах [12], [13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Khintchine, Math. Z., **18** (1923), 109–116. [2] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, УМН, **50:5** (1995), 3–62. [3] V. A. Rodin, E. M. Semenov, Anal. Math., **1:3** (1975), 207–222. [4] W. B. Johnson, G. Schechtman, Israel J. Math., **64:3** (1988), 267–275. [5] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994. [6] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [7] W. B. Johnson, G. Schechtman, Ann. Probab., **17:2** (1989), 789–808. [8] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II. Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979. [9] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, 1988. [10] В. М. Круглов, ТВП, **15:2** (1970), 331–336. [11] С. В. Асташкин, М. Ш. Браверман, в кн.: Операторные уравнения в функциональных пространствах, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986, 3–10. [12] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, Матем. заметки, **76:4** (2004), 483–489. [13] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, Israel J. Math., **145** (2005), 125–156.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
25 октября 2006 г.

УДК 514.76

Препятствия к эквивалентности пуассоновых структур вблизи симплектического листа полупростого и компактного типа

© 2008. Ю. М. ВОРОБЬЕВ

В настоящей заметке мы формулируем необходимые и достаточные условия для существования изоморфизма пуассоновых структур в окрестности симплектического листа полупростого и компактного типа. В частности, показано,