



Неравенство Либа–Тирринга для L_p -норм

С. В. Асташкин

В заметке получено неравенство Либа–Тирринга для L_p -норм. Доказательство использует лишь стандартный аппарат теории ортогональных рядов.

Библиография: 9 названий.

В 1976 г. Либ и Тирринг в работе [1] доказали следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Если $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ – произвольная ортонормированная система, $\max(1, d/2) < p \leq 1 + d/2$ и

$$\rho_\Phi := \sum_{j=1}^N \phi_j^2, \quad (1)$$

то

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\Phi^{p/(p-1)} dx \right)^{2(p-1)/d} \leq C_{p,d} \sum_{j=1}^N \|\nabla \phi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (2)$$

где, как обычно, $\nabla \phi = (\partial \phi / \partial x_1, \dots, \partial \phi / \partial x_d)$.

В дальнейшем неравенства типа (2) для конечных ортонормированных систем устанавливались различными авторами (интерес к ним был обусловлен, прежде всего, приложениями в теории дифференциальных уравнений с частными производными). При этом известные методы доказательства, основанные на нетривиальных результатах из спектральной теории, были достаточно сложны (см. подробнее [2] и [3]).

Совсем недавно в работе Кашина [4] был предложен подход к доказательству неравенств типа Либа–Тирринга, использующий лишь стандартный аппарат теории ортогональных рядов: L_p -неравенства для векторнозначных рядов Радемахера и классическую теорему Литтлвуда–Пэли. Напомним некоторые определения и обозначения из [4]. Пусть

$$\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1), \quad \text{причем} \quad \phi_j \perp 1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3)$$

Определим оператор $P_\Phi: l_2^N \rightarrow L^2(S^1)$ следующим образом:

$$P_\Phi(\{c_j\}_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96603).

Кроме того, пусть $\pi_m: L^2(S^1) \rightarrow T_{2^m}$ – ортопроектор на пространство T_{2^m} , $m = 0, 1, 2, \dots$, тригонометрических полиномов $t(z)$ вида

$$t(z) = \sum_{2^m \leq |k| < 2^{m+1}} a_k z^k$$

и, наконец,

$$\lambda_m(\Phi) = \|\pi_m \cdot P_\Phi\|_{l_2^N \rightarrow T_{2^m}}. \quad (4)$$

Заметим, что в частном случае, когда Φ – ортонормированная (или субортонормированная) система, то

$$\lambda_m(\Phi) \leq 1, \quad m = 0, 1, \dots. \quad (5)$$

Напомним, что система $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ называется *субортонормированной*, если она удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i,j=1}^N c_i c_j \int_{S^1} \phi_i \phi_j d\mu \leq \sum_{j=1}^N c_j^2$$

для любых вещественных $c_1, c_2, \dots, c_N$.

В работе [4] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА В. *Существует абсолютная константа $C > 0$ такая, что для произвольной системы Φ вида (3)*

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2 d\mu \leq C \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} |\widehat{\phi}_j(i)|^2, \quad (6)$$

где функция ρ_Φ определена в (1), а

$$\gamma_m(\Phi) := \sum_{k=0}^m 2^k \lambda_k^2(\Phi), \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

В частности, если Φ – ортонормированная (или субортонормированная) система, то ввиду (5) неравенство (6) можно переписать следующим образом:

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2 d\mu \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|\phi_j^{(1/2)}\|_{L^2(S^1)}^2, \quad (7)$$

где через $f^{(1/2)}$ обозначается “половинная” производная функции f . Напомним, что для произвольного $\alpha > 0$ и функции $f(z) = \sum_{j \neq 0} \widehat{f}(j) z^j \in L^2(S^1)$ производная порядка α определяется соотношением

$$f^{(\alpha)}(z) := \sum_{j \neq 0} |j|^\alpha \widehat{f}(j) z^j.$$

В этой заметке мы покажем, что, следуя подходу [4], неравенства (6) и (7) можно обобщить на случай L_p -норм. При доказательстве будет использоваться теорема Марцинкевича о мультипликаторах Фурье.

Начнем с формулировки результатов и некоторых замечаний.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $k = 2, 3, \dots$ существует константа $C = C(k)$ такая, что для произвольной системы Φ вида (3) выполнено*

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^k d\mu \leq C \sum_{m=0}^{\infty} \gamma'_m(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} |\widehat{\phi}_j(i)|^2, \quad (8)$$

где для $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\gamma'_m(\Phi) := \sum_{m_{k-1}=0}^m 2^{m_{k-1}} \lambda_{m_{k-1}}^2(\Phi) \sum_{m_{k-2}=0}^{m_{k-1}} 2^{m_{k-2}} \lambda_{m_{k-2}}^2(\Phi) \dots \sum_{m_1=0}^{m_2} 2^{m_1} \lambda_{m_1}^2(\Phi),$$

а числа $\lambda_m(\Phi)$ определяются соотношением (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $k = 1$ ввиду равенства Парсеваля

$$\int_{S^1} \rho_\Phi d\mu = \sum_{j=1}^N \int_{S^1} \phi_j^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} |\widehat{\phi}_j(i)|^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неравенство (8) обобщает соотношение (6). Если дополнительно Φ – ортонормированная (или субортонормированная) система, то ввиду (5)

$$\gamma'_m(\Phi) \leq \sum_{m_{k-1}=0}^m 2^{m_{k-1}} \sum_{m_{k-2}=0}^{m_{k-1}} 2^{m_{k-2}} \dots \sum_{m_1=0}^{m_2} 2^{m_1} \leq 2^{k(k-1)/2} 2^{(k-1)m},$$

и мы получаем неравенство

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^k d\mu \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|\phi_j^{((k-1)/2)}\|_{L^2(S^1)}^2. \quad (9)$$

Заметим, что в случае $k = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, неравенство (9) иным способом было получено в работе [5] (более простое доказательство см. в [6]).

Соотношение, более общее, чем (7) и (9), устанавливается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ и k делится на l . Тогда существует константа $C = C(k)$ такая, что для произвольной ортонормированной (или субортонормированной) системы Φ вида (3)*

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^k d\mu \leq C \left(\sum_{j=1}^N \|\phi_j^{((l-1)/2)}\|_{2^{k/l}}^2 \right)^{k/l}. \quad (10)$$

Перейдем теперь к доказательствам этих результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Следуя [4], представим функцию f в виде

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(f), \quad \text{где} \quad \delta_m(f) := \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} \widehat{f}(i) z^i.$$

Обозначим

$$\delta_m(t, z) := \delta_m \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \phi_j(z) \right) = \sum_{j=1}^N r_j(t) \delta_m(\phi_j)(z),$$

где $r_j(t)$ – функции Радемахера на $[0, 1]$. Тогда ввиду векторнозначного варианта неравенства Хинчина [7; с. 52], а также неравенства Литтлвуда–Пэли [8; с. 63, неравенства (9)], мы получим, что с константами, зависящими только от k ,

$$\begin{aligned} Q &:= \int_{S^1} \rho_{\Phi}^k d\mu = \int_{S^1} \left(\sum_{j=1}^N \phi_j^2(z) \right)^k d\mu \\ &\leq C_1 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \phi_j \right\|_{L^{2k}}^{2k} dt \leq C_2 \int_0^1 \int_{S^1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m^2(t, z) \right)^k d\mu dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{Q}{C_2} \leq \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_{S^1} \delta_{m_1}^2(t, z) \delta_{m_2}^2(t, z) \cdots \delta_{m_k}^2(t, z) d\mu dt. \quad (11)$$

При этом для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ имеем

$$\delta_{m_i}^2(t, z) = \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \delta_{m_i}(\phi_j)(z) \right)^2 = \sum_{j,q=1}^N r_j(t) r_q(t) \delta_{m_i}(\phi_j)(z) \delta_{m_i}(\phi_q)(z),$$

и поэтому для всех $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\int_{S^1} \delta_{m_1}^2(t, z) \delta_{m_2}^2(t, z) \cdots \delta_{m_k}^2(t, z) d\mu \\ &= \sum_{j_1=1}^N \sum_{q_1=1}^N \cdots \sum_{j_k=1}^N \sum_{q_k=1}^N r_{j_1}(t) r_{q_1}(t) r_{j_2}(t) r_{q_2}(t) \cdots r_{j_k}(t) r_{q_k}(t) \\ &\quad \times \int_{S^1} \delta_{m_1}(\phi_{j_1}) \delta_{m_1}(\phi_{q_1}) \cdots \delta_{m_k}(\phi_{j_k}) \delta_{m_k}(\phi_{q_k}) d\mu. \end{aligned}$$

Заметим, что интеграл

$$\int_0^1 r_{j_1}(t) r_{q_1}(t) r_{j_2}(t) r_{q_2}(t) \cdots r_{j_k}(t) r_{q_k}(t) dt$$

отличен от нуля (равен 1) тогда и только тогда, когда в наборе натуральных чисел $(j_1, q_1, \dots, j_k, q_k)$ каждое число встречается четное число раз. Поэтому интересующая нас величина

$$I_{m_1, m_2, \dots, m_k} := \int_0^1 \int_{S^1} \delta_{m_1}^2(t, z) \cdots \delta_{m_k}^2(t, z) d\mu dt = \int_{S^1} \int_0^1 \delta_{m_1}^2(t, z) \cdots \delta_{m_k}^2(t, z) dt d\mu$$

является суммой интегралов вида

$$\int_{S^1} \delta_{m_1}(\phi_{j_1}) \delta_{m_{\pi(1)}}(\phi_{j_1}) \delta_{m_2}(\phi_{j_2}) \delta_{m_{\pi(2)}}(\phi_{j_2}) \cdots \delta_{m_k}(\phi_{j_k}) \delta_{m_{\pi(k)}}(\phi_{j_k}) d\mu, \quad (12)$$

где π – некоторая перестановка множества $\{1, 2, \dots, k\}$. И наоборот, представляя каждую такую перестановку π в виде произведения циклов, нетрудно убедиться

в том, что соответствующий ей интеграл (12) является одним из слагаемых, образующих $I_{m_1, m_2, \dots, m_k}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} I_{m_1, m_2, \dots, m_k} &= \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \cdots \sum_{j_k=1}^N \sum_{\pi} \int_{S^1} \delta_{m_1}(\phi_{j_1}) \delta_{m_{\pi(1)}}(\phi_{j_1}) \delta_{m_2}(\phi_{j_2}) \\ &\quad \times \delta_{m_{\pi(2)}}(\phi_{j_2}) \cdots \delta_{m_k}(\phi_{j_k}) \delta_{m_{\pi(k)}}(\phi_{j_k}) d\mu \\ &= \sum_{\pi} \int_{S^1} \sum_{j_1=1}^N \delta_{m_1}(\phi_{j_1}) \delta_{m_{\pi(1)}}(\phi_{j_1}) \\ &\quad \times \sum_{j_2=1}^N \delta_{m_2}(\phi_{j_2}) \delta_{m_{\pi(2)}}(\phi_{j_2}) \cdots \sum_{j_k=1}^N \delta_{m_k}(\phi_{j_k}) \delta_{m_{\pi(k)}}(\phi_{j_k}) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда по неравенству Коши

$$\begin{aligned} I_{m_1, m_2, \dots, m_k} &\leq \sum_{\pi} \int_{S^1} \left(\sum_{j_1=1}^N \delta_{m_1}^2(\phi_{j_1}) \right)^{1/2} \left(\sum_{j_1=1}^N \delta_{m_{\pi(1)}}^2(\phi_{j_1}) \right)^{1/2} \cdots \left(\sum_{j_k=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_{j_k}) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{j_k=1}^N \delta_{m_{\pi(k)}}^2(\phi_{j_k}) \right)^{1/2} d\mu \\ &= \sum_{\pi} \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_1}^2(\phi_j) \cdots \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu \\ &= k! \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_1}^2(\phi_j) \cdots \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu. \end{aligned}$$

Итак,

$$I_{m_1, m_2, \dots, m_k} \leq k! J_{m_1, m_2, \dots, m_k},$$

где

$$J_{m_1, m_2, \dots, m_k} := \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_1}^2(\phi_j) \cdots \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu.$$

Так как для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$

$$J_{m_1, m_2, \dots, m_k} = J_{m_{\pi(1)}, m_{\pi(2)}, \dots, m_{\pi(k)}},$$

то ввиду (11)

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_2} &\leq k! \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} J_{m_1, m_2, \dots, m_k} = (k!)^2 \sum_{0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k} J_{m_1, m_2, \dots, m_k} \\ &\leq (k!)^2 \sum_{0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_k} \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{m_1}^2(\phi_j) \right\|_{L^\infty(S^1)} \cdots \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{m_{k-1}}^2(\phi_j) \right\|_{L^\infty(S^1)} \\ &\quad \times \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu. \end{aligned}$$

По лемме из [4]

$$\left\| \sum_{j=1}^N \delta_i^2(\phi_j) \right\|_{L^\infty(S^1)} \leq 2^{i+1} \lambda_i^2(\Phi) \quad (13)$$

для каждого $i = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_2} &\leq (k!)^2 \sum_{m_k=0}^{\infty} \sum_{m_{k-1}=0}^{m_k} 2^{m_{k-1}+1} \lambda_{m_{k-1}}^2(\Phi) \\ &\quad \times \sum_{m_{k-2}=0}^{m_{k-1}} 2^{m_{k-2}+1} \lambda_{m_{k-2}}^2(\Phi) \cdots \sum_{m_1=0}^{m_2} 2^{m_1+1} \lambda_{m_1}^2(\Phi) \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu \\ &= (k!)^2 2^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma'_m(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} |\hat{\phi}_j(i)|^2, \end{aligned}$$

и неравенство (8) выполнено с константой $C = C_2 2^{k-1} (k!)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сохраняя обозначения из доказательства теоремы 1, имеем

$$\frac{Q}{C_2} \leq k! \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} J_{m_1, m_2, \dots, m_k},$$

где по-прежнему

$$J_{m_1, m_2, \dots, m_k} := \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_1}^2(\phi_j) \cdots \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu.$$

Пусть $n = k/l$. Тогда опять ввиду (13) и (5) (см. также замечание 2)

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_2} &\leq k! (l!)^n \sum_{0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_l} \prod_{i=1}^{l-1} \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{m_i}^2(\phi_j) \right\|_{L^\infty(S^1)} \\ &\quad \times \sum_{0 \leq m_{l+1} \leq \dots \leq m_{2l}} \prod_{i=1}^{l-1} \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{m_{l+i}}^2(\phi_j) \right\|_{L^\infty(S^1)} \cdots \\ &\quad \times \sum_{0 \leq m_{(n-1)+1} \leq \dots \leq m_k} \prod_{i=1}^{l-1} \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{m_{(n-1)l+i}}^2(\phi_j) \right\|_{L^\infty(S^1)} \\ &\quad \times \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_l}^2(\phi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{m_{2l}}^2(\phi_j) \cdots \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu \\ &\leq k! (l!)^n 2^{(l-1)(n+k/2)} \sum_{m_l=0}^{\infty} 2^{(l-1)m_l} \sum_{m_{2l}=0}^{\infty} 2^{(l-1)m_{2l}} \cdots \sum_{m_k=0}^{\infty} 2^{(l-1)m_k} \\ &\quad \times \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{m_l}^2(\phi_j) \sum_{j=1}^N \delta_{m_{2l}}^2(\phi_j) \cdots \sum_{j=1}^N \delta_{m_k}^2(\phi_j) d\mu \\ &= k! (l!)^n 2^{(l-1)(n+k/2)} \int_{S^1} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} 2^{(l-1)m} \delta_m^2(\phi_j) \right)^n d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенства Минковского и Литтлвуда–Пэли, получим, что с константой $C_3 > 0$, зависящей лишь от k ,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_2} &\leq k!(l!)^n 2^{(l-1)(n+k/2)} \left(\sum_{j=1}^N \left(\int_{S^1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{(l-1)m} \delta_m^2(\phi_j) \right)^n \right)^{1/n} d\mu \right)^n \\ &\leq k!(l!)^n 2^{(l-1)(n+k/2)} C_3 \left(\sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_{2n}^2 \right)^n, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\psi_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(l-1)/2} \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} \hat{\phi}_j(i) z^i, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Определим последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$: $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_i = 2^{(l-1)m/2} |i|^{(1-l)/2}$, если $2^m \leq |i| < 2^{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Так как $|\alpha_i| \leq 1$, $i \in \mathbb{Z}$, и “вариация” этой последовательности на каждом двоичном отрезке, т.е. на отрезке вида $[2^m, 2^{m+1}]$ или $[-2^{m+1}, -2^m]$, $m = 0, 1, 2, \dots$, не превосходит числа $1 - 2^{(1-l)/2}$, то по теореме Марцинкевича (см. [8; с. 67–69] или [9; глава 4, теорема 6]) последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ определяет мультипликатор Фурье в пространстве $L_p(S^1)$ для каждого $p \in (1, \infty)$. Таким образом, с некоторой константой $C_4 > 0$, зависящей лишь от p , для всех $f \in L_p(S^1)$

$$\left(\int_{S^1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(l-1)/2} \sum_{2^m \leq |i| < 2^{m+1}} \hat{f}(i) z^i \right)^p d\mu \right)^{1/p} \leq C_4 \|f^{((l-1)/2)}\|_{L_p(S^1)}.$$

Отсюда и из неравенства (14) следует (10), и теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Lieb, W. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Studies in Mathematical Physics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976, 269–303.
- [2] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] А. А. Ильин, “Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 33–66.
- [4] Б. С. Кашин, “Об одном классе неравенств для ортонормированных систем”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 204–208.
- [5] J.-M. Ghidaglia, M. Marion, R. Temam, “Generalization of the Sobolev–Lieb–Thirring inequalities and applications to the dimension of attractors”, *Differential Integral Equations*, **1**:1 (1988), 1–21.
- [6] A. Eden, C. Foias, “A simple proof of the generalized Lieb–Thirring inequalities in one-space dimension”, *J. Math. Anal. Appl.*, **162**:1 (1991), 250–254.
- [7] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФП, М., 1999.
- [8] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [9] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

С. В. Асташкин

Самарский государственный университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило

31.05.2007

Исправленный вариант

28.08.2007