

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

РЯДЫ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СВОЙСТВОМ КРУГЛОВА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Ввиду классического неравенства Хинчина, система Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n(t) = \text{sgn} \sin(2^n \pi t)$ ($0 \leq t \leq 1$), рассматриваемая в $L_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$), эквивалентна последовательности дизъюнктивных “сдвигов” $\{\bar{r}_n(\cdot) := r_n(\cdot - n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(0, \infty)$. Если рассматривать систему Радемахера как специальный случай последовательностей независимых функций с нулевым средним (т.е. $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$), то замечательное обобщение этого неравенства на симметричные пространства (с.п.) функций на $[0, 1]$ было доказано в 1989 году В. Джонсоном и Г. Шехтманом [1]. По данному с.п. X они определили с.п. Z_X^2 на $[0, \infty)$ (наше обозначение не совпадает с использованным в [1]) и показали, что произвольная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых функций с нулевым средним в X эквивалентна последовательности их дизъюнктивных “сдвигов” $\{\bar{f}_k(\cdot) := f_k(\cdot - k + 1)\}_{k=1}^{\infty}$ в Z_X^2 при условии, что X содержит $L_p[0, 1]$ при некотором $p < \infty$. Подчеркнем, что основная трудность заключается при этом в доказательстве неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \quad (1.1)$$

(см. правую часть неравенства (3) в [1, теорема 1]).

Основными средствами при доказательстве оценки (1.1) в [1] были один из вариантов хорошо известного неравенства Хоффмана–Йоргенсена [2], а также связанная с ним техника сведения задачи к L_p -случаю. Рассматривая аналогичный вопрос здесь, мы применяем совсем другие рассуждения, основывающиеся на теории безгранично делимых распределений и на изучении свойств положительного линейного оператора $\mathcal{K}$, введенного

нами недавно в [3] (см. также [4]). Техника безгранично делимых распределений, безусловно, хорошо известна в теории вероятностей. В то же время, при изучении геометрии с.п. она широко применялась, видимо, только М. Ш. Браверманом [5], использовавшим при этом некоторые идеи и вероятностные конструкции В. М. Круглова [6]. Наш подход, кроме того, тесно связан со стохастическим интегрированием относительно симметризованного пуассоновского процесса, примененным в [7] (см. также [8]) для изучения вопроса о том, когда данное с.п. на $[0, 1]$ изоморфно некоторому с.п. на полуоси. Мы детально рассматриваем эти связи в последней части работы. В §2 вводятся необходимые определения и сведения из теории с.п., а также некоторые вероятностные конструкции. В §3 мы доказываем главный результат, состоящий в том, что для широкого класса с.п. X выполнение неравенства (1.1) для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$ независимых функций со средним 0 эквивалентно ограниченности оператора K в этом пространстве (см. теоремы 3.1 и 3.6). Внешне это утверждение аналогично теореме 6.1 работы [3], где речь идет о произвольных последовательностях (неотрицательных) независимых функций (см. начало §3). Подчеркнем, тем не менее, что доказательства этих результатов совершенно различны. Это объясняется разницей свойств последовательностей неотрицательных функций и функций с нулевым средним (см. также различие в доказательствах неравенств (3) и (4) в теореме 1 статьи [1]). Важно отметить, что преимущество нашего подхода по сравнению с работой [1] состоит в том, что он позволяет получать неравенство (1.1) в целом ряде важных в приложениях с.п., не содержащих L_p -пространство ни при каком $p < \infty$. Соответствующий пример приведен в замечании 3.5, где наши результаты применяются к экспоненциальным пространствам Орлича $\text{Exp}L_p$, $0 < p < 1$ (напротив, условия теоремы 1 в [1] для них не выполняются). Из теоремы 3.6, а также результатов статьи [3] вытекает следствие 3.7, которое в определенном смысле обратно по отношению к утверждению первой части теоремы 1 в [1]. Одновременно оно показывает, что, в отличие от ситуации с неравенством Хинчина (см. [9]), не существует “минимального” с.п. E такого, что неравенство (1.1) выполнено для каждого с.п. $X \supseteq E$.

В последней части работы, в §4, мы применяем полученные

результаты к хорошо известной задаче о том, имеет ли данное с.п. X на $[0, 1]$ изоморфное представление как с.п. на полуоси (впервые поставленной в [10] и глубоко изученной в [7] и [8]). Во-первых, оказывается, что при условии ограниченности оператора $\mathcal{K}$ пространство X содержит подпространство, изоморфное с.п. Z_X^2 на полуоси. Ранее подобное утверждение было доказано лишь для гораздо более узкого класса с.п. с нетривиальным нижним индексом Бойда. Во-вторых, теорема 3.1 позволяет дать гораздо более простое доказательство хорошо известной теоремы (см. [7, §8] или [8, с. 203]) о том, что X изоморфно некоторому с.п. на полуоси, если индексы Бойда X нетривиальны. И наконец, мы показываем, что существует глубокая связь между оператором $\mathcal{K}$ и стохастическим интегрированием относительно симметризованного пуассоновского процесса, применяемого в [7].

Далее будут использоваться следующие сокращения:

с.п. – симметричное пространство;

с.в. – случайная величина (измеримая функция);

ф.р. – функция распределения случайной величины;

х.ф. – характеристическая функция случайной величины;

$f \stackrel{d}{=} g$ означает, что с.в. f и g имеют одинаковые ф.р..

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Раздел содержит основные определения и обозначения из теории с.п. (подробнее см. [11, 8]), а также некоторые понятия и конструкции вероятностного характера, взятые, в основном, из [5] и [3], которые будут использоваться в этой работе.

2.1. Симметричные пространства. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $J = [0, \alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$ (с отождествлением λ -почти всюду), называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если

- (i) X является порядковой решеткой, т.е. если $y \in X$ и x – любая измеримая функция на J такая, что $|x| \leq |y|$, то $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$;
- (ii) X перестановочно инвариантно в том смысле, что если $y \in X$ и x – любая измеримая функция на J такая, что $x^* = y^*$, то $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

Здесь и всюду далее λ – мера Лебега, а $x^*(t)$ – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* функции $|x(s)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf \{ \tau \geq 0 : \lambda(\{s \in [0, \alpha) : |x(s)| > \tau\}) \leq t \} \quad (t > 0),$$

где $n_{|x|}(\tau) := \lambda\{s \geq 0 : |x(s)| > \tau\}$ ($\tau > 0$).

Для любого с.п. $X = X[0, \infty)$ (соответственно $X = X[0, 1]$) имеют место непрерывные вложения

$$L_1 \cap L_\infty[0, \infty) \subseteq X \subseteq L_1 + L_\infty[0, \infty) \quad (L_\infty[0, 1] \subseteq X \subseteq L_1[0, 1])$$

(определения суммы и пересечения банаховых пространств, образующих банахову пару, см. далее в этом разделе).

Пусть X – с.п. на $[0, 1]$. Далее мы будем рассматривать также с.п. $X(\Omega, \mathcal{P})$ измеримых функций или случайных величин (с.в.) на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{P})$, определяемое следующим образом:

$$X(\Omega, \mathcal{P}) := \{f \in L_1(\Omega, \mathcal{P}) : f^* \in X\}, \quad \|f\|_{X(\Omega, \mathcal{P})} := \|f^*\|_X.$$

Здесь f^* – невозрастающая перестановка относительно меры $\mathcal{P}$ на Ω . Через $S(\Omega) (= S(\Omega, \mu))$ будет обозначаться линейное пространство всех измеримых конечных п.в. функций на пространстве с мерой (Ω, μ) , снабженное топологией сходимости по мере на подмножествах конечной меры в Ω .

Если X – с.п. на интервале $J = [0, \alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $X^\times$ состоит из всех измеримых функций y , для которых

$$\|y\|_{X^\times} := \sup \left\{ \int_J |x(t)y(t)| dt : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty$$

(основные свойства двойственного пространства можно найти в [11]). Если X^* – пространство, сопряженное с X , то $X^\times \subset X^*$, а $X^\times = X^*$, если и только если норма $\|\cdot\|_X$ порядково непрерывна, т.е. из $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X, x_n \downarrow 0$, следует, что $\|x_n\|_X \rightarrow 0$. Заметим, что норма $\|\cdot\|_X$ с.п. X на J порядково непрерывна тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Говорят, что с.п. X на J *максимально* (или *имеет свойство Фату*), если из того, что $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq X, f_n \rightarrow f$ п.в. на J и $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$, следует: $f \in X$ и $\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X$. Хорошо известно, что с.п. X *максимально* тогда и только тогда, когда естественное вложение X в

его второе двойственное $X^{\times\times}$ является изометрической сюръекцией. Гораздо более слабым является следующее условие. Норма $\|\cdot\|_X$ с.п. X называется *порядково полунепрерывной* (или *нормой Фату*), если единичный шар пространства X замкнут в X относительно сходимости почти всюду. Последнее эквивалентно тому, что естественное вложение X в его второе двойственное $X^{\times\times}$ — изометрия.

Напомним, что для $\tau > 0$ оператор растяжения σ_τ определяется следующим образом:

$$\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau), \quad \text{если } J = [0, \infty),$$

и

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(1, \tau) \\ 0, & \min(1, \tau) < t \leq 1, \end{cases}$$

если $J = [0, 1]$. Операторы σ_τ ограничены в любом с.п. X . Кроме того, существуют числа

$$\alpha_X := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_X}{\ln \tau}, \quad \beta_X := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_X}{\ln \tau},$$

называемые индексами Бойда пространства X . Всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$. Говорят, что индексы Бойда с.п. X нетривиальны, если $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$.

Важными примерами с.п. являются L_p -пространства ($1 \leq p \leq \infty$), а также их обобщение — пространства Орлича. Пусть Φ — непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. Пространство Орлича $L_\Phi = L_\Phi[0, \alpha)$ состоит из всех функций $f \in S[0, \alpha)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \rho > 0 : \int_0^\alpha \Phi \left(\frac{|f(t)|}{\rho} \right) dt \leq 1 \right\}.$$

Через $\chi_E(t)$ далее будет обозначаться характеристическая функция множества $E \subset [0, \infty)$, а через $\text{supp } f$ — носитель измеримой функции f .

2.2. Свойство Круглова и оператор $\mathcal{K}$ в с.п.. Пусть f — измеримая функция (или с.в.) на $[0, 1]$, а $\mathcal{F}_f$ — ее ф.р. Через $\pi(f)$

обозначим случайную величину, х.ф. которой определяется равенством

$$\varphi_{\pi(f)}(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathcal{F}_f(x) \right),$$

или, эквивалентно, это с.в. $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i – независимые копии f , а с.в. N имеет распределение Пуассона с параметром 1 и независима относительно последовательности $\{f_i\}$.

Определение 2.1. Говорят, что с.п. X на $[0, 1]$ имеет свойство Круглова (мы пишем: $X \in \mathbb{K}$), если

$$f \in X \iff \pi(f) \in X.$$

Это свойство изучалось и интенсивно использовалось М. Ш. Браверманом [5]. Заметим, что нетривиальна лишь импликация $f \in X \implies \pi(f) \in X$; обратное ввиду неравенства Прохорова [12] (см. также [5, с. 11]) справедливо всегда. Известно [5, теорема 2, с. 16], что с.п. X обладает свойством Круглова, если $X \supseteq L_p$ для некоторого $p < \infty$. В частности, последнее выполнено для с.п. с нетривиальным нижним индексом Бойда, т.е. если $\alpha_X > 0$. Кроме того, этим свойством обладают также некоторые экспоненциальные пространства Орлича, не содержащие L_p ни при каком $p < \infty$ (см. замечание 3.5).

Со свойством Круглова тесно связан оператор $\mathcal{K}$ [3] (см. также [4]). Сначала определим вспомогательный оператор $\mathcal{K}_1$ со значениями в пространстве $S(\Omega, \mathcal{P})$, где $(\Omega, \mathcal{P}) := \prod_{k=0}^{\infty} ([0, 1], \lambda_k)$ (λ_k – мера Лебега на $[0, 1]$, $k = 0, 1, \dots$). Пусть $\{E_n\}$ – последовательность попарно дизъюнктивных подмножеств отрезка $[0, 1]$, $\lambda(E_n) = \frac{1}{e \cdot n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Для произвольной функции f из $S([0, 1], \lambda)$ положим

$$\mathcal{K}_1 f(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \chi_{E_n}(\omega_0).$$

Хорошо известно, что существует сохраняющее меру отображение $\delta : (\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow ([0, 1], \lambda)$. Для каждой функции g из $S(\Omega, \mathcal{P})$ определим $R(g)(x) := g(\delta^{-1}x)$, $x \in [0, 1]$. Легко видеть, что

$$\lambda\{x \in [0, 1] : R(g)(x) < t\} = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : g(\omega) < t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $\mathcal{K} := R\mathcal{K}_1$ – положительный линейный оператор, действующий из $S([0, 1], \lambda)$ в $S([0, 1], \lambda)$, причем для любой измеримой на $[0, 1]$ функции f распределения функций $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}_1f$ одинаковы.

Так как мы рассматриваем с.п., то для нас важно лишь распределение функции $\mathcal{K}f$, в связи с чем на определение оператора $\mathcal{K}$ можно смотреть с несколько иной (и зачастую более удобной) точки зрения. Если $f \in S([0, 1], \lambda)$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) – последовательность наборов функций, измеримых на $[0, 1]$, такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

- (i) $f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}, \chi_{E_n}$ – последовательность независимых с.в.;
- (ii) $\mathcal{F}_{f_{n,k}} = \mathcal{F}_f, k = 1, 2, \dots, n,$

то определим:

$$\mathcal{K}'f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{n,k}(x) \chi_{E_n}(x), \quad x \in [0, 1].$$

Непосредственная проверка показывает, что ф.р. функций $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}'f$ одинаковы. Поэтому, как уже отмечалось, оператор $\mathcal{K}$ можно в определенном смысле отождествлять с $\mathcal{K}'$.

Напомним, что оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в с.п. X тогда и только тогда, когда X имеет свойство Круглова [3, лемма 3.3]. В [3], главным образом, изучалось действие оператора $\mathcal{K}$ в различных классах с.п. В этой работе нас, прежде всего, будет интересовать проблема сравнения в пространствах со свойством Круглова сумм независимых функций с нулевым средним, с одной стороны, и их дизъюнктивных копий, с другой.

§3. Оценки сумм независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова

Пусть X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$. Напомним следующий результат [3, теорема 6.1]: если (i) оператор $\mathcal{K} : X \mapsto Y$ ограничен или если (ii) норма пространства Y порядково полунепрерывна и оператор $\mathcal{K} : X \mapsto Y^{\times \times}$ ограничен, то существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности с.в. $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^1},$$

где

$$Z_X^p := \{f \in (L_1 + L_\infty)(0, \infty) : \|f\|_{Z_X^p} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_p[1,\infty)} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

а $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность дизъюнктивных функций на $[0, \infty)$, таких, что ф.р. для $\bar{f}_k$ и f_k ($k \in \mathbb{N}$) одинаковы. Здесь мы докажем аналогичное неравенство (с пространством Z_X^2 вместо Z_X^1) для последовательностей независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют нулевые средние, т.е. $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Как уже говорилось во Введении, этот результат усиливает теорему 1 из [1] в случае нормированных пространств (подробнее см. замечание 3.5).

Теорема 3.1. Пусть X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ и выполнено хотя бы одно из условий: (i) оператор $K : X \mapsto Y$ ограничен; (ii) норма пространства Y порядково полунепрерывна и оператор $K : X \mapsto Y^{\times \times}$ ограничен. Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n$ со средним 0 в X выполнено:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2}. \quad (3.1)$$

Наиболее важным компонентом доказательства теоремы 3.1 является следующее утверждение.

Предложение 3.2. Если X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ и оператор K действует из X в Y , то для любой последовательности симметрично распределенных с.в. $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ справедлива следующая импликация:

$$\begin{aligned} &\text{если } \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k \in Z_X^2, \text{ то } \sum_{k=1}^\infty f_k \\ &\text{сходится п.в. на } [0, 1] \text{ и } \sum_{k=1}^\infty f_k \in Y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Пусть F_k – ф.р. с.в. f_k , а $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность независимых с.в., определенных на $[0, 1]$, такая, что

ф.р. случайных величин g_k и $\pi(f_k)$ для каждого $k = 1, 2, 3, \dots$ совпадают. Предположим на время, что мы доказали сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ п.в. на $[0, 1]$ к некоторой с.в. $g \in Y$. Тогда доказательство предложения 3.2 может быть закончено следующим образом. Ввиду неравенства Прохорова (см. [12] или [5, с. 8])

$$\lambda \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{k=1}^n f_k(t) \right| \geq x \right\} \leq 8\lambda \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{k=1}^n g_k(t) \right| \geq \frac{x}{2} \right\} \quad (3.3)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x > 0$. Так как ряд из независимых с.в. сходится по мере тогда и только тогда, когда он сходится п.в. (см., например, [13, теорема 2.1.1, с. 29]), то из (3.3) следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ также сходится к некоторой с.в. f п.в. на $[0, 1]$. Кроме того, сходимость по мере гарантирует существование возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_m\}_{m \geq 1}$ такой, что для всех $\tau > 0$ и $m \geq 1$ мы имеем

$$\lambda \{ t : |f(t)| \geq \tau \} \leq \lambda \left\{ t : \left| \sum_{k=1}^{n_m} f_k(t) \right| \geq \tau - \frac{1}{m} \right\} + \frac{1}{m}$$

и

$$\lambda \left\{ t : \left| \sum_{k=1}^{n_m} g_k(t) \right| \geq \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m} \right\} \leq \lambda \left\{ t : |g(t)| \geq \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m} \right\} + \frac{1}{m}.$$

Отсюда и из (3.3) следует

$$\begin{aligned} \lambda \{ t : |f(t)| \geq \tau \} &\leq 8\lambda \left\{ t : \left| \sum_{k=1}^{n_m} g_k(t) \right| \geq \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m} \right\} + \frac{1}{m} \\ &\leq 8\lambda \left\{ t : |g(t)| \geq \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2m} \right\} + \frac{2}{m}, \end{aligned}$$

или после перехода к пределу при $m \rightarrow \infty$

$$\lambda \{ t : |f(t)| \geq \tau \} \leq 8\lambda \left\{ t : |g(t)| \geq \frac{\tau}{2} \right\}.$$

Так как $g \in Y$, то из последней оценки мы немедленно получаем: $f \in Y$, что и заканчивает доказательство импликации (3.2).

Для доказательства того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ сходится п.в. на $[0, 1]$ и что его сумма g принадлежит пространству Y , нам прежде всего нужна некоторая дополнительная информация о х.ф. суммы

$S_n := \sum_{k=1}^n g_k$, $n \geq 1$. Так как с.в. g_k (так же, как и с.в. f_k) симметрично распределена (см. [5, с. 11] или [3]), то ее х.ф. φ_k вещественнозначна и определяется соотношением:

$$\varphi_k(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) dF_k(x) \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Кроме того, распределение с.в. g_k , $k \geq 1$, является смесью дискретного распределения Пуассона с параметром 1 и семейства сверток F_k (см. [5] или [3]), которая является частным случаем так называемого обобщенного распределения Пуассона (см., например, [14, глава 12] или [15, глава 17, §1, с. 622]). Обобщенное распределение Пуассона безгранично делимо [15, глава 17, §1, с. 622], и поэтому ввиду одного из вариантов формулы Леви-Хинчина (см., например, [5, с. 72])

$$\varphi_k(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dH_k(x) \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

где $H_k(x)$ — ограниченная, неубывающая, непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$, которая называется спектральной функцией (Леви-Хинчина). Можно предположить, что $H_k(-\infty) = 0$. Сравнивая (3.4) и (3.5), получаем

$$H_k(x) = \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} dF_k(y), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Далее нам будет нужно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3. *Если выполнены условия предложения 3.2, то ряд*

$$H(x) := \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x) \quad (3.7)$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и $H(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\infty) < \infty$.

Доказательство леммы 3.3. Прежде всего, так как по условию $\bar{f}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k(t) \in Z_X^2$, то функция $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) = \lambda\{t >$

$0 : \bar{f}(t) < x$ конечна для всех $x < 0$. Далее, так как с.в. f_k симметрично распределена, то во всех точках непрерывности $x \in \mathbb{R}$ функции $F_k(x)$ имеем

$$F_k(-x) = 1 - F_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Следовательно, существует такое всюду плотное множество $E \subseteq (0, \infty)$, что для всех $x \in E$

$$n_{\bar{f}}(x) := \lambda\{t > 0 : |\bar{f}(t)| > x\} = 2F(-x).$$

Применяя последнее соотношение вместе с (3.6) и (3.8), мы получаем, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n H_k(\infty) &= -2 \int_0^\infty \frac{y^2}{1+y^2} d\left(\sum_{k=1}^n F_k(-y)\right) \\ &\leq -2 \int_0^\infty \frac{y^2}{1+y^2} dF(-y) = - \int_0^\infty \frac{y^2}{1+y^2} dn_{\bar{f}}(y). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda\{t > 0 : |\bar{f}(t)| = \tau\} = 0$ для каждого $\tau \geq 0$. Рассмотрим два взаимно исключающих случая:

- а) для некоторого $y_0 > 0$ выполнено: $n_{\bar{f}}(y_0) = 1$;
- б) при всех $y > 0$ имеем $n_{\bar{f}}(y) < 1$, т.е. $\lambda\{\text{supp } \bar{f}\} < 1$. В случае а), применяя (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n H_k(\infty) &= - \int_0^{y_0} \frac{y^2}{1+y^2} dn_{\bar{f}}(y) - \int_{y_0}^\infty \frac{y^2}{1+y^2} dn_{\bar{f}}(y) \\ &\leq - \int_0^{y_0} y^2 dn_{\bar{f}}(y) - \int_{y_0}^\infty dn_{\bar{f}}(y) \\ &= \|\bar{f}^* \mathbf{1}_{[1, \infty)}\|_{L_2}^2 + n_{\bar{f}}(y_0) \leq \|\bar{f}\|_{Z_X^2}^2 + 1 < \infty. \end{aligned}$$

В случае б) подобные (и чуть более простые) оценки показывают, что $\sum_{k=1}^n H_k(\infty) \leq 1$. Таким образом, $\sum_{k=1}^\infty H_k(\infty) < \infty$. Так как для каждого $k \geq 1$ функция $H_k(x)$ возрастает, то отсюда следует равномерная сходимость ряда (3.7) на $\mathbb{R}$. Кроме того, для

каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x > 0$ мы имеем: $H(x) \geq \sum_{k=1}^n H_k(x)$. Поэтому, переходя к пределу сначала при $x \rightarrow \infty$, а затем при $n \rightarrow \infty$, мы получаем:

$$H(\infty) \geq \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\infty).$$

Так как противоположное неравенство очевидно, то лемма 3.3 доказана. $\square$

Продолжим доказательство предложения 3.2. Пусть ψ_n — х.ф. с.в. S_n ($n = 1, 2, \dots$), где, как и ранее, $S_n = \sum_{k=1}^n g_k$. Так как с.в. g_k ($k = 1, 2, \dots$) независимы, то

$$\psi_n(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} d \left(\sum_{k=1}^n H_k(x) \right) \right).$$

Кроме того, так как функции $H_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) возрастают и $\cos(tx) - 1 \leq 0$, то последовательность $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}$, и, значит, по лемме 3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \psi(t) := \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) \right). \quad (3.10)$$

Покажем, что $\psi(t)$ является х.ф. некоторой с.в. Для этого достаточно проверить, что функция $\psi(t)$ непрерывна в нуле [16, глава 6, теорема 5.4, с. 144].

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зафиксируем $x_0 \geq 1$ такое, что $H(-x_0) + H(\infty) - H(x_0) < \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда найдется константа $c = c(x_0)$ такая, что для всех $|x| \leq x_0$ выполнено: $(1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} \leq c \cdot t^2$. Таким образом, если число $|t|$ достаточно мало, то

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) \right| \\ &= \int_{-x_0}^{x_0} (1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) + \int_{|x| \geq x_0} (1 - \cos(tx)) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x) \\ &\leq ct^2 (H(x_0) - H(-x_0)) + 4 \cdot (H(-x_0) + H(\infty) - H(x_0)) \\ &\leq c \cdot H(\infty) t^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, ψ — х.ф. некоторой с.в. g , ф.р. которой является слабым пределом функций распределения сумм S_n [15, глава 15, §3, теорема 2, с. 569]. Тем самым g имеет безгранично делимое распределение [15, глава 17, § 1, следствие к теореме 2, с. 624]. Кроме того, применяя теорему Ито–Нисию [13, теорема 2.1.1, с. 29–32], заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ сходится п.в. на $[0, 1]$ к с.в. g . Чтобы закончить доказательство предложения 3.2, осталось показать, что $g \in Y$.

Из (3.6) и (3.8) следует, что для всех x из некоторого всюду плотного подмножества полуоси $(0, \infty)$ выполнено

$$\begin{aligned} H_k(\infty) - H_k(x) &= \int_x^{\infty} \frac{y^2}{1+y^2} dF_k(y) = \int_x^{\infty} \frac{y^2}{1+y^2} d(1 - F_k(-y)) \\ &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{y^2}{1+y^2} dF_k(y) = H_k(-x), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда (опять принимая во внимание (3.6)) мы получаем

$$H(-x) + H(\infty) - H(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} H_k(-x) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_k(-x) = n_{\bar{f}}(x). \quad (3.11)$$

Так как функция $H(x)$ непрерывна слева, то существует измеримая на $(0, \infty)$ функция u такая, что

$$\lambda\{s > 0 : u(s) < x\} = H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

По предположению $\bar{f} \in Z_X^2$; следовательно, $u \in Z_X^2$ ввиду (3.11). Но тогда функция $v(s) := u(H(\infty) \cdot s)$ ($s > 0$) также принадлежит пространству Z_X^2 . Отсюда и из определения пространства Z_X^2 немедленно следует: $v^*(t)\chi_{[0,1]}(t) \in X$. Более того, так как

$$\lambda\{s > 0 : v(s) < x\} = \frac{H(x)}{H(\infty)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

то $v^*(t) = v^*(t)\chi_{[0,1]}(t) \in X$. Таким образом, существует с.в. $h \in X$, ф.р. которой $\mathcal{F}_h(x)$ определяется соотношением:

$$\mathcal{F}_h(x) := \frac{H(x)}{H(\infty)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что последнее, а также ограниченность оператора $\mathcal{K}$ из X в Y , которую мы имеем по условию, позволяют доказать, что $g \in Y$ (похожее рассуждение см. в доказательстве леммы 10 на с. 72 в работе [5]).

Введем обозначения:

$$U(t, x) := (\cos(tx) - 1) \frac{1 + x^2}{x^2}, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \nu_1(t) &:= \exp \left(\int_{|x| < 1} U(t, x) dH(x) \right), \quad t \in \mathbb{R} \\ \nu_2(t) &:= \exp \left(\int_{|x| \geq 1} U(t, x) dH(x) \right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ввиду (3.10) имеем $\psi(t) = \nu_1(t) \cdot \nu_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и, таким образом, $g \stackrel{d}{=} g_1 + g_2$, где g_1 и g_2 – независимые с.в. с х.ф. ν_1 и ν_2 соответственно. Для доказательства принадлежности g пространству Y достаточно проверить, что $g_1 \in Y$ и $g_2 \in Y$.

Из формулы Леви–Хинчина следует, что с.в. g_1 имеет безгранично делимое распределение и что соответствующая ей спектральная функция постоянна на каждом из интервалов $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Тем самым, ввиду теоремы 4 в [17], получаем

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln \lambda\{t \in [0, 1] : |g_1(t)| \geq x\}}{x \ln(1 + x)} = 1.$$

Из последнего соотношения, очевидно, вытекает оценка

$$\lambda\{t \in [0, 1] : |g_1(t)| \geq x\} \leq \exp \left(-\frac{1}{2} x \ln(1 + x) \right),$$

верная для достаточно больших $x > 0$. Поэтому g_1 принадлежит пространству Орлича L_{M_1} , $M_1(t) = e^{|t| \ln(e+|t|)} - 1$, $t \in \mathbb{R}$ (см. также [3, лемма 4.3]). Так как $X \supseteq L_\infty$ (см. §2) и $\mathcal{K} : X \mapsto Y$, то из теоремы 4.4 в [3] следует: $Y \supseteq L_{M_1}$ и, в частности, $g_1 \in Y$.

Покажем, наконец, что $g_2 \in Y$. Обозначим

$$\nu_2(t) := \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) dW(x) \right), \quad (3.14)$$

где

$$W(x) := \begin{cases} \int_{-\infty}^x \frac{1+y^2}{y^2} dH(y), & \text{если } -\infty < x \leq -1, \\ W(-1), & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ W(-1) + \int_1^x \frac{1+y^2}{y^2} dH(y), & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $W(x)$ – неотрицательная, ограниченная, неубывающая и непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$, $W(-\infty) = 0$.

Достаточно рассмотреть случай, когда $H(\infty) > 0$, а значит, и $W(\infty) > 0$. Пусть ф.р. $\mathcal{F}_W$ задана равенством: $\mathcal{F}_W(x) = \frac{W(x)}{W(\infty)}$. Ввиду предложения 12 на с. 74 в [5], $g_2 \in Y$ тогда и только тогда, когда $w \in Y$, где w – с.в. с х.ф.

$$\theta(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) - 1) d\mathcal{F}_W(x) \right). \quad (3.15)$$

Обозначим через w' с.в. с ф.р. $\mathcal{F}_W(x)$. Так как с.в. h (с ф.р. $\mathcal{F}_h(x) = \frac{H(x)}{H(\infty)}$) принадлежит X , то и $w' \in X$. Действительно, из элементарного неравенства $1 < (1+y^2)y^{-2} \leq 2$ ($y \geq 1$) следует, что для всех $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda\{t : |w'(t)| \geq x\} &= \\ &= \frac{1}{W(\infty)} \int_{|y| \geq x} \frac{1+y^2}{y^2} dH(y) \leq \frac{2H(\infty)}{W(\infty)} \lambda\{t : |h(t)| \geq x\}. \end{aligned}$$

Ввиду (3.15), $w = \pi(w')$. В итоге, так как по условию оператор $\mathcal{K}$ действует из X в Y , то, применяя теорему 3.5 работы [3], мы получаем, что $w \in Y$, а значит, и $g_2 \in Y$. Тем самым доказательство предложения 3.2 закончено. $\square$

Следующая лемма вместе с предложением 3.2 приводят к доказательству теоремы 3.1 в важном частном случае симметрично распределенных с.в.

Лемма 3.4. *Предположим, что X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ и что импликация (3.2) верна для произвольной последовательности*

независимых симметрично распределенных с.в. $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$. Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что для любой такой последовательности мы имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Рассмотрим следующее подпространство пространства Z_X^2 :

$$Z_{X,s}^2 := \{f \in Z_X^2 : \text{с.в. } f^{(k)}(x) := f(x+k-1) \ (0 \leq x \leq 1)\}$$

симметрично распределена для всех $k \geq 1$.

Покажем, прежде всего, что $Z_{X,s}^2$ замкнуто в Z_X^2 . Пусть $\{f_n\} \subset Z_{X,s}^2$, $f_n \rightarrow f \in Z_X^2$ относительно $\|\cdot\|_{Z_X^2}$. Тогда $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ по мере для каждого $k = 1, 2, \dots$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и обозначим через E множество всех точек $x \in (0, \infty)$, в которых каждая из ф.р. $F_n(x)$ с.в. $f_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, \dots$), а также ф.р. $F(x)$ с.в. $f^{(k)}$ непрерывны. Очевидно, E всюду плотно в $(0, \infty)$. Так как из сходимости по мере следует слабая сходимость распределений [15, глава 8, §2, лемма 2, с. 293], то $F_n(x) \rightarrow F(x)$ для всех $x \in E$. Используя симметричность распределений $F_n(\cdot)$ ($n = 1, 2, \dots$), мы получаем: $F(x) = 1 - F(-x)$, $x \in E$. Так как E всюду плотно в $(0, \infty)$, то последнее равенство выполняется во всех точках $x > 0$ непрерывности функции $F(x)$. Другими словами, $f^{(k)}$ имеет симметричное распределение для любого $k \in \mathbb{N}$, и, таким образом, подпространство $Z_{X,s}^2$ замкнуто.

Определим последовательность $\{L_n\}_{n \geq 1}$ линейных операторов, действующих из $Z_{X,s}^2$ в $Y(\Omega, \mathcal{P})$:

$$(L_n f)(w_1, w_2, \dots) := \sum_{k=1}^n f^{(k)}(w_k), \quad f \in Z_{X,s}^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f^{(k)}(x) = f(x+k-1)$ ($x \in [0, 1]$) и $(\Omega, \mathcal{P}) = \prod_{k=1}^\infty ([0, 1], \lambda_k)$ (λ_k — мера Лебега на $[0, 1]$). Заметим, что ввиду условия $X \subseteq Y$ имеют место вложения $L_n(Z_{X,s}^2) \subseteq Y(\Omega, \mathcal{P})$ для каждого $n \geq 1$. Более того, существует такая константа $C_1 > 0$, что для всех $n = 1, 2, \dots$ и $f \in Z_{X,s}^2$ выполнено

$$\|L_n f\|_{Y(\Omega, \mathcal{P})} \leq n \max_{k=1, \dots, n} \|f^{(k)}\|_Y \leq C_1 n \|f^* \mathbf{1}_{[0,1]}\|_X \leq C_1 n \|f\|_{Z_X^2}.$$

Таким образом, операторы L_n ($n \geq 1$) ограничены. По условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(w_k)$ сходится $\mathcal{P}$ -п.в. на Ω , и его сумма принадлежит пространству Y . Следовательно, ввиду предложения 11 на с. 6 в [5] найдется константа $C(Y) > 0$ такая, что для всех $f \in Z_{X,s}^2$

$$\sup_{n=1,2,\dots} \|L_n f\|_{Y(\Omega, \mathcal{P})} \leq C(Y) \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(w_k) \right\|_Y.$$

Тем самым последовательность операторов $\{L_n\}_{n \geq 1}$, определенных на банаховом пространстве $Z_{X,s}^2$, поточечно ограничена, и, значит, ввиду принципа равномерной ограниченности, $\sup_{n \geq 1} \|L_n\|_{Z_X^2 \rightarrow Y} < \infty$. Иначе говоря, существует такая постоянная $C_2 > 0$, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n f^{(k)}(w_k) \right\|_{Y(\Omega, \mathcal{P})} \leq C_2 \|f\|_{Z_X^2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f \in Z_{X,s}^2$. Применяя еще раз предложение 11 на с. 6 в [5], заключаем, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(w_k) \right\|_{Y(\Omega, \mathcal{P})} \leq C_2 C(Y) \|f\|_{Z_X^2}.$$

Так как последнее неравенство эквивалентно соотношению (3.16), то лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Действуя стандартным образом, мы применим симметризацию. Пусть $\{f'_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых копий с.в. f_k , т.е. $f'_k \stackrel{d}{=} f_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), и, кроме того, $h_k := f_k - f'_k$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда $\{h_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых симметрично распределенных с.в., и ввиду предложения 11 на с. 6 в [5]

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C(Y) \left\| \sum_{k=1}^n h_k \right\|_Y.$$

Так как

$$\lambda \left\{ t > 0 : \sum_{k=1}^n |\bar{h}_k(t)| > x \right\} \leq 2\lambda \left\{ t > 0 : \sum_{k=1}^n |\bar{f}_k(t)| > x \right\}$$

для всех $x \geq 0$, то в случае (i) неравенство (3.1) является непосредственным следствием предложения 3.2 и леммы 3.4.

Если выполнено (ii), то то же рассуждение показывает, что существует константа $C > 0$ такая, что для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых с.в. с нулевым средним верно неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{Y \times X} \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что ввиду порядковой полунепрерывности нормы в Y последнее соотношение эквивалентно неравенству (3.1). $\square$

Замечание 3.5. Как уже говорилось во Введении, теорема 3.1 усиливает соответствующую часть теоремы 1 в [1] в случае нормированных пространств. В частности, рассмотрим пространства Орлича $\text{Exp} L_p := L_{N_p}$, где

$$N_p(t) := e^{t^p} - \sum_{k=0}^{[1/p]} \frac{t^{kp}}{k!} \quad (t \geq 0).$$

Заметим, что $\text{Exp} L_p \in \mathbb{K}$, если $0 < p \leq 1$ (см. [6, 5] или [3]), и, следовательно, теорема 3.1 применима к таким пространствам. Напротив, так как для любых $q \in (0, \infty)$ и $p \in (0, \infty)$ $L_q \not\subseteq \text{Exp} L_p$, то теорема 1 в [1] в этом случае не “работает”.

Важно указать, что в случае, когда норма в Y порядково полунепрерывна, справедливо также и обратное утверждение. Точнее, применение теоремы 3.1, а также аккуратный анализ доказательства теоремы 3.5 в [3] приводят к следующему результату.

Теорема 3.6. Пусть X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ и норма в Y порядково полунепрерывна. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) оператор K ограниченно действует из X в Y ;
- (ii) существует такая константа $C > 0$, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_X \quad (3.17)$$

верно для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ независимых, симметрично и одинаково распределенных функций, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\{f_k \neq 0\}) \leq 1. \quad (3.18)$$

Как показано в работе [9] (см. также [8, с. 134–136]), неравенство Хинчина выполнено в с.п. X тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича $\exp L_2 = L_{N_2}$, $N_2(t) := \exp t^2 - 1$. В общей ситуации, когда рассматривается класс всех последовательностей независимых функций со средним 0, подобного “минимального” с.п. уже нет. Точнее, справедливо следующее утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению первой части теоремы 1 в [1].

Следствие 3.7. *Предположим, что с.п. E обладает следующим свойством: для любого максимального с.п. $X \supseteq E$ существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство (3.17) верно в случае $Y = X$ для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ независимых, симметрично и одинаково распределенных функций, удовлетворяющих условию (3.18). Тогда E содержит L_p для некоторого $p \in [1, \infty)$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.6 вместе со следствиями 5.4 и 5.6 из [3]. $\square$

§4. ИЗОМОРФИЗМЫ МЕЖДУ СИММЕТРИЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ НА $[0, 1]$ И $[0, \infty)$

В последней части работы мы применим теорему 3.1 к изучению вопроса о том, содержит ли данное с.п. на конечном интервале подпространство, изоморфное некоторому с.п. на полуоси. Общая проблема изоморфизма между с.п. на $[0, 1]$ и на $[0, \infty)$ (иными, нежели L_p -пространства) впервые была поставлена в [10]. Этот и другие близкие вопросы интенсивно изучались в [7] (см. также [8]) на основе подхода, использующего конструкцию стохастического интеграла относительно симметризованного пуассоновского процесса. Наш подход технически проще; заметим, что аналогичные рассуждения применялись ранее в работе [18] в специальном случае пространств Лоренца $L_{p,q}$. Первая часть

следующей теоремы усиливает ранее имевшиеся результаты об изоморфном вложении некоторого с.п. на полуоси в данное с.п. X на $[0, 1]$, заменяя условие нетривиальности нижнего индекса Бойда X на более слабое условие ограниченности оператора $\mathcal{K}$. Вторая часть теоремы хорошо известна (см. [7, §8] или [8, с. 203]), но наше доказательство ее (основанное на теореме 3.1) намного проще.

Теорема 4.1. Пусть X – с.п. на $[0, 1]$.

- (i) Если оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в X , то X содержит подпространство, изоморфное с.п. Z_X^2 ;
- (ii) Если индексы Бойда X нетривиальны, т. е. $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, то пространства X и Z_X^2 изоморфны.

Доказательство. Определим на пространстве Z_X^2 линейный оператор

$$Qf(t, \omega_1, \omega_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega_k) r_k(t), \quad \text{где } f_k(\omega_k) = f(k-1 + \omega_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

По теореме 3.1, оператор Q ограниченно действует из Z_X^2 в пространство $X(\Omega \times [0, 1])$, где $\Omega = [0, 1]^\infty$ с мерой $\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ (как и ранее, λ_k – мера Лебега). Кроме того, ввиду “легкой” части теоремы 1 в [1] (левая часть неравенства (3) в той теореме верна для любого с.п. X), существует константа $c > 0$ такая, что $\|Qf\|_{X(\Omega \times [0, 1])} \geq c \|f\|_{Z_X^2}$. Тем самым, образ $\mathfrak{Z}(Q)$ оператора Q изоморфен пространству Z_X^2 . Так как пространства X и $X(\Omega \times [0, 1])$ изоморфны, то часть (i) доказана.

Перейдем к доказательству части (ii). Прежде всего, заметим, что из условия $\alpha_X > 0$ вытекает ограниченность оператора $\mathcal{K}$ в X [5, теорема 3, с. 16]. Покажем, что образ $\mathfrak{Z}(Q)$ оператора Q , состоящий из всех функций $g \in X(\Omega \times [0, 1])$, представимых в виде суммы ряда

$$g(t, \omega_1, \omega_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega_k) r_k(t),$$

который сходится п.в. на $\Omega \times [0, 1]$, при условии нетривиальности индексов Бойда дополняем в пространстве $X(\Omega \times [0, 1])$.

Определим на $L_1(\Omega \times [0, 1])$ последовательность условных математических ожиданий

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g|\omega_k)(\omega_k) &:= \\ &:= \int_0^1 \dots \int_0^1 g(t, \omega_1, \omega_2, \dots) dt d\omega_1 \dots d\omega_{k-1} d\omega_{k+1} \dots \quad (k \geq 1), \end{aligned}$$

а также проектор

$$Pg(t, \omega_1, \omega_2, \dots) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(gr_k|\omega_k)r_k(t).$$

Докажем, что проектор P ограничен в $L_p(\Omega \times [0, 1]) \approx L_p$ для всех $1 < p < \infty$. Рассмотрим σ -алгебру $\mathcal{F} := \{F \times [0, 1] : F \subset \Omega - \text{измеримо}\}$ подмножеств пространства $\Omega \times [0, 1]$. Заметим, что каждое условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\cdot|\omega_k)$ ($k \geq 1$) можно получить как произведение условных математических ожиданий $\mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{A}_k)\mathbb{E}(\cdot|\mathfrak{B}_k)$, где σ -алгебры $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ порождаются семействами множеств

$$\begin{aligned} A_k &:= \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} C_j : C_j - \text{произвольное измеримое подмножество} \right. \\ &\quad \left. \text{отрезка } [0, 1], \quad \text{если } j \leq k, \quad C_j = [0, 1], \quad \text{если } j > k \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} B_k &:= \left\{ \prod_{j=1}^{\infty} C_j : C_j - \text{произвольное измеримое подмножество} \right. \\ &\quad \left. \text{отрезка } [0, 1], \quad \text{если } j \geq k, \quad C_j = [0, 1], \quad \text{если } j < k \right\}, \end{aligned}$$

соответственно. Применяя теперь неравенство Хинчина, затем дважды теорему Стейна для условных математических ожиданий [19] и, наконец, еще раз неравенство Хинчина, получим

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{L_p(\Omega \times [0, 1])} &\asymp \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}(fr_k|\omega_k))^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \\ &\leq C_p \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}(fr_k|\mathcal{F}))^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p(\Omega)} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(fr_k|\mathcal{F})r_k \right\|_{L_p(\Omega \times [0, 1])}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(fr_k | \mathcal{F})(\omega_1, \omega_2, \dots) r_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f(u, \omega_1, \omega_2, \dots) r_k(u) du \cdot r_k(t),$$

то (см., например, [8, с. 137]) для каждого $p \in (1, \infty)$ существует постоянная $C'_p < \infty$ такая, что

$$\int_0^1 |Pf(t, \omega_1, \omega_2, \dots)|^p dt \leq C'_p \int_0^1 |f(t, \omega_1, \omega_2, \dots)|^p dt, \quad \forall f \in L_p(\Omega \times [0, 1]).$$

После интегрирования последнего неравенства по Ω мы получаем, что проектор P ограничен в $L_p(\Omega \times [0, 1])$ ($1 < p < \infty$). Из интерполяционной теоремы Бойда [8, теорема 2.b.11] следует тогда, что проектор P ограничен в $X(\Omega \times [0, 1])$. Кроме того, легко видеть, что $\mathfrak{Z}(P) = \mathfrak{Z}(Q)$. Следовательно, образ $\mathfrak{Z}(Q)$ оператора Q (который ввиду уже доказанной первой части теоремы изоморфен Z_X^2) дополняем в $X(\Omega \times [0, 1]) \approx X$. С другой стороны, очевидно, пространство X изоморфно дополняемому подпространству пространства Z_X^2 . Так как пространство $X \oplus X$ (соответственно, $Z_X^2 \oplus Z_X^2$) изоморфно X (соответственно Z_X^2), то в итоге, применяя метод декомпозиции Пелчинского [8, с. 172], получаем изоморфность пространств X и Z_X^2 . $\square$

В заключение установим тесную связь между стохастическим интегралом Пуассона, ключевым средством в конструкциях из [7, §8] и [8, §2.f], и оператором $\mathcal{K}$, играющим центральную роль в наших доказательствах.

Полное и детальное определение оператора T стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона можно найти в [8, с. 205–206]. Мы здесь ограничимся частным случаем, когда функция f определена на $[0, 1]$. Положим: $Tf = T'f - T''f$, где

$$T'f(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{F'_k}(u) \sum_{j=1}^k f(\varphi'_j(v)) \quad (u, v \in [0, 1]).$$

Здесь $\{F'_k\}_{k \geq 0}$ – разбиение отрезка $[0, 1]$ на попарно дизъюнктные подмножества, $\lambda(F'_k) = \frac{1}{e \cdot k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а $\{\varphi'_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых с.в., равномерно распределенных на $[0, 1]$.

Подобным образом определяется и функция $T''f$, при этом соответствующие последовательности $\{F_k''\}_{k \geq 0}$ и $\{\varphi_j''\}_{j=1}^\infty$ независимы относительно последовательностей $\{F_k'\}_{k \geq 0}$ и $\{\varphi_j'\}_{j=1}^\infty$, соответственно. Таким образом, функции $T'f$ и $T''f$ одинаково распределены и независимы.

В [7, §8] (см. также [8, §2.f]) доказано, что оператор T ограниченно действует из Z_X^2 в X , если $\alpha_X > 0$.

В следующей теореме тот же результат получен при более слабом предположении о пространстве X .

Теорема 4.2. *Если X — с.п. на $[0, 1]$, которое сепарабельно или максимально, то оператор T ограничен из Z_X^2 в X тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{K}$ ограничен в X .*

Доказательство. Для любой с.в. f на $[0, 1]$, последовательность $\{f(\varphi_j')\}_{j=1}^\infty$ из определения оператора T состоит из независимых с.в., имеющих то же распределение, что и с.в. f . Следовательно (см. определение оператора $\mathcal{K}'$ в §2), $T'f \stackrel{d}{=} \mathcal{K}f$, и поэтому $\|T'f\|_X = \|\mathcal{K}f\|_X$. Более того, ввиду независимости с.в. $T'f$ и $T''f$,

$$\begin{aligned} \lambda\{(u, v) : |Tf(u, v)| > \tau\} &\geq \lambda\{(u, v) : |T'f(u, v)| > \tau \text{ и } u \in F_0''\} = \\ &= e^{-1} \lambda\{(u, v) : |T'f(u, v)| > \tau\}, \end{aligned}$$

и, таким образом, так как для любого с.п. справедлива оценка $\|\sigma_t\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, t)$ [11, глава 2, следствие 4.1, с. 133], то

$$\|\mathcal{K}f\|_X = \|T'f\|_X \leq \|\sigma_\epsilon\|_{X \rightarrow X} \|Tf\|_X \leq \epsilon \|Tf\|_X.$$

Итак, если оператор $T : Z_X^2 \rightarrow X$ ограничен, то ограничен и оператор $\mathcal{K} : X \rightarrow X$.

Наоборот, предположим, что оператор $\mathcal{K} : X \rightarrow X$ ограничен. Если с.в. f определена на $[0, 1]$, то по предыдущему

$$\|Tf\|_X = \|T'f - T''f\|_X \leq 2\|\mathcal{K}f\|_X. \quad (4.1)$$

Пусть теперь функция $f \in Z_X^2$ произвольна. Так как операторы T' и T'' положительны, то мы можем предположить, что с.в. f неотрицательна. Обозначим $f_n := f\chi_{(n-1, n)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Легко видеть, что существуют последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ такие, что $f_n = g_n + h_n$, $g_n h_n = 0$ и $\int_{n-1}^n g_n(t) dt = \int_{n-1}^n h_n(t) dt$ ($n =$

$1, 2, \dots$). Поэтому, если $f'_n := g_n - h_n$, то $|f'_n| = f_n$ и $\int_{n-1}^n f'_n(t) dt = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Далее, пусть $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых копий с.в. f'_n ($n = 1, 2, \dots, n$) на $[0, 1]$ (т.е. $b_n \stackrel{d}{=} f'_n$). По теореме 3.1 мы имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n b_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^n f'_k \right\|_{Z_X^2} = C \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{Z_X^2}. \quad (4.2)$$

Кроме того, из определения оператора T [8, с. 207] следует, что $\{Tf_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Tb_n\}_{n=1}^\infty$ — две последовательности независимых симметрично распределенных с.в., а также, что Tf_n и Tb_n одинаково распределены для любого $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, применяя теорему 5.4.4 на с. 243 в [20], мы получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^n Tb_k \right\|_X \asymp \left\| \sum_{k=1}^n Tf_k \right\|_X, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, ввиду формул (4.1) и (4.2), а также ограниченности оператора $\mathcal{K}$ в пространстве X , имеем

$$\begin{aligned} \left\| T \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) \right\|_X &= \left\| \sum_{k=1}^n Tf_k \right\|_X \asymp \left\| \sum_{k=1}^n Tb_k \right\|_X = \\ &= \left\| T \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \right\|_X \leq 2 \left\| \mathcal{K} \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \right\|_X \leq 2 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \left\| \sum_{k=1}^n b_k \right\|_X \leq \\ &\leq 2 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} C \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{Z_X^2} \leq 2 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} C \|f\|_{Z_X^2}. \end{aligned}$$

Так как пространство X сепарабельно или максимально, то, применяя стандартные рассуждения, заключаем отсюда, что оператор $T : Z_X^2 \rightarrow X$ ограничен. $\square$

Из теоремы 4.2 и теоремы 2.f.1(i) в [8] вытекает следующий результат.

Следствие 4.3. *Если с.п. X сепарабельно или максимально и $X \in \mathbb{K}$, то образ оператора стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона изоморфен пространству Z_X^2 .*

ЛИТЕРАТУРА

1. W. B. Johnson and G. Schechtman, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces*. — Ann. Probab. **17** (1989), 789–808.
2. J. Hoffman-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*. — Studia Math. **52** (1974), 258–286.
3. S. V. Astashkin and F. A. Sukochev, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach*. — Israel J. Math. **145** (2005), 125–156.
4. С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Сравнение сумм независимых и дисъюнктивных функций в симметричных пространствах*. — Матем. заметки. **76**, No. 4 (2004), 483–489.
5. M. Sh. Braverman, *Independent random variables and rearrangement invariant spaces*. — Cambridge University Press (1994).
6. В. М. Круглов, *Замечание о бесконечно делимых распределениях*. — Теор. вероятн. и ее примен. **15**, No. 2 (1970) 331–336.
7. W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces* — Mem. Amer. Math. Soc. **19**, No. 217 (1979).
8. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*. — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas] **97**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1979).
9. V. A. Rodin and E. M. Semenov, *Rademacher series in symmetric spaces*. — Anal. Math. **1** (1975), 207–222.
10. Б. С. Митгин, *Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства*. — Усп. матем. наук. **25** (1970), 59–103.
11. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*. Наука, М. (1978).
12. Ю. В. Прохоров, *Сильная устойчивость сумм и бесконечно делимых законов*. — Теория вероятн. и ее примен. **3**, No. 2 (1958), 153–165.
13. S. Kwapień and W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*. Birkhäuser (1992).
14. Е. Лукач, *Характеристические функции*. Наука, М. (1964).
15. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Т. 2, Мир, М. (1984).
16. А. А. Боровков, *Теория вероятностей*. Наука, М. (1976).
17. В. М. Круглов, С. Н. Антонов, *Еще раз об асимптотическом поведении бесконечно делимых распределений в банаховом пространстве*. — Теория вероятн. и ее примен. **27**, No. 4 (1982), 625–642.
18. N. L. Carothers and S. J. Dilworth, *Inequalities for sums of independent random variables*. — Proc. Amer. Math. Soc. **194** (1988), 221–226.
19. E. M. Stein, *Topics on harmonic analysis related to the Littlewood–Paley theory*. — Ann. Math. Studies, No. 63, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1970).
20. Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*. Наука, М. (1985).

Astashkin S. V., Sukochev F. A. Series of independent mean zero random variables in rearrangement invariant spaces with the Kruglov prop-

erty.

This paper compares sequences of independent mean zero random variables in a rearrangement invariant space X on $[0, 1]$ with sequences of disjoint copies of individual terms in the corresponding rearrangement invariant space Z_X^2 on $[0, \infty)$. Principal results of the paper show that these sequences are equivalent in X and Z_X^2 respectively if and only if X possesses the (so-called) Kruglov property. We also apply our technique to complement well-known results concerning isomorphism between rearrangement invariant spaces on $[0, 1]$ and $[0, \infty)$.

Самарский госуниверситет, г. Самара

Поступило 9 марта 2007 г.

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

School of Informatics and Engineering

Flinders University, Australia

E-mail: sukochev@infoeng.flinders.edu.au