



О нормируемости классов Марцинкевича

С. В. Асташкин

В работе получены простые необходимые и достаточные условия нормируемости классов Марцинкевича, играющих важную роль в различных вопросах анализа. Эти условия формулируются как в терминах показателей растяжения функции, порождающей класс, так и в терминах интерполяции операторов, ограниченных в паре (L_1, L_∞) .

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть функция $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ возрастает, $\varphi(t) > 0$, $t > 0$. Классом Марцинкевича M_φ назовем множество всех измеримых на $[0, \infty)$ функций $x = x(t)$, для которых конечен функционал

$$\|x\|_\varphi = \sup_{t>0} x^*(t)\varphi(t). \quad (1)$$

Здесь и всюду далее $x^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$. В частности, если $\varphi(t) = t^{1/p}$, $0 < p < \infty$, мы получаем классические пространства $L_{p,\infty}$, введенные в [1] (см. также [2; с. 197]). Нетрудно показать (например, так, как это сделано для близких классов интегрального типа в [3]), что функционал $\|\cdot\|_\varphi$ является квазинормой, т.е. для некоторого $C > 0$

$$\|x + y\|_\varphi \leq C(\|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi), \quad x, y \in M_\varphi,$$

тогда и только тогда, когда функция φ удовлетворяет Δ_2 -условию. Последнее означает, что существует константа $K > 0$ такая, что $\varphi(2t) \leq K\varphi(t)$, $t > 0$.

Хорошо известно [2; теорема 2.5.3, с. 156], что функционал (1) эквивалентен норме соответствующего симметричного пространства Марцинкевича (определения ниже) тогда и только тогда, когда верхний показатель растяжения функции φ нетривиален. Здесь мы рассмотрим более общий вопрос о нормируемости класса M_φ . Аналогичная задача изучалась в работе [4] для множеств $\Lambda^{p,\infty}(\omega)$, где $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\omega(s) > 0$, $s > 0$, состоящих из измеримых функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(\omega)} = \sup_{t>0} f^*(t) \left(\int_0^t \omega(s) ds \right)^{1/p} < \infty. \quad (2)$$

В [4] доказано, что нормируемость $\Lambda^{p,\infty}(\omega)$ эквивалентна каждому из следующих условий:

- (i) максимальный оператор Харди–Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup_{r>0} (2r)^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y)| dy,$$

где $Q(x, r)$ – куб с центром в точке x и ребрами длины $2r$, параллельными координатным осям, ограниченно действует в $\Lambda^{p,\infty}(\omega)$;

- (ii) существует константа $C > 0$ такая, что для функции $W_p(t) := (\int_0^t \omega(s) ds)^{1/p}$ выполнено неравенство

$$\int_0^t \frac{1}{W_p(s)} ds \leq C \frac{t}{W_p(t)}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Заметим, что условие (ii) явно свидетельствует о наличии некоторой “избыточности” в определении (2) (ответ зависит лишь от функции W_p). В связи с этим мы предпочитаем определять классы Марцинкевича (в [4] они названы *пространствами Лоренца слабого типа*) соотношением (1).

Основная цель этой работы состоит в нахождении более простых и эффективных условий нормируемости класса M_φ , нежели (i) и (ii). Мы покажем, что, с одной стороны, как и в случае уже упомянутой задачи совпадения M_φ с соответствующим пространством Марцинкевича, она эквивалентна нетривиальности верхнего показателя растяжения функции φ , а с другой – интерполяционности M_φ относительно пары пространств $L_1 = L_1(0, \infty)$ и $L_\infty = L_\infty(0, \infty)$. Мы ограничимся рассмотрением пространств функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$, однако все утверждения без какого-либо изменения формулировок и доказательств переносятся на случай $\mathbb{R}^n$. В конце работы мы покажем, что процитированные результаты из [4] являются непосредственными следствиями доказанных здесь. Заметим в заключение, что в более поздней работе [5] аналогичные вопросы подробно изучаются для дискретных классов Марцинкевича.

2. Определения и обозначения. Подробное изложение теории симметричных функциональных пространств и теории интерполяции операторов можно найти, например, в монографиях [2], [6].

Если функция $x = x(t)$ измерима на полуоси $[0, \infty)$, то по определению

$$n_{|x|}(\tau) = \mu\{t \in [0, \infty) : |x(t)| > \tau\}, \quad \tau > 0,$$

где μ – мера Лебега. Функции $x(t)$ и $y(t)$ называются *равноизмеримыми*, если $n_{|x|}(\tau) = n_{|y|}(\tau)$, $\tau > 0$. В частности, любая функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей перестановкой $x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : n_{|x|}(\tau) < t\}$.

Банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0, \infty)$, называется *симметричным*, если из того, что $y = y(t) \in X$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$, следует, что $x = x(t) \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$.

Фундаментальная функция симметричного пространства X определяется равенством: $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$, где, как обычно, $\chi_E(s) = 1$, если $s \in E$, и $\chi_E(s) = 0$, если $s \notin E$. Напомним, что функция $\varphi_X(t)$ *квазивогнута* на $(0, \infty)$ [2; с. 137], т.е. неотрицательна, возрастает, а функция $\varphi_X(t)/t$ убывает. Как известно [2; с. 70], каждая

квазивогнутая на полуоси функция $f(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\bar{f}(t)$, точнее, $f(t) \leq \bar{f}(t) \leq 2f(t)$, $t > 0$.

Наряду с обычными L_p -пространствами, $1 \leq p \leq \infty$, в последнее время интенсивно изучаются важные в приложениях классы симметричных пространств Орлича, Лоренца и Марцинкевича. Напомним определение пространств последнего из этих классов.

Пусть $\psi(t)$ – квазивогнутая функция на $[0, \infty)$. Пространство Марцинкевича $M(\psi)$ состоит из всех измеримых на $[0, \infty)$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\int_0^t x^*(s) ds}{\psi(t)} < \infty.$$

Это пространство является сопряженным к пространству Лоренца $\Lambda(\bar{\psi})$ [2; с. 152–154], норма которого задается так:

$$\|x\|_{\Lambda(\bar{\psi})} = \int_0^\infty x^*(s) d\bar{\psi}(s).$$

Фундаментальная функция пространства $M(\psi)$ равна $t/\psi(t)$.

Если $f(s)$ – неотрицательная функция, определенная на полуоси $[0, \infty)$, то ее функция растяжения

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup_{s>0} \frac{f(st)}{f(s)}, \quad t > 0.$$

Так как $\mathcal{M}_f(t)$ полумультипликативна, то существуют числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t} \quad \text{и} \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t},$$

называемые нижним и верхним показателями растяжения функции f . Если f квазивогнута, то $0 \leq \gamma_f \leq \delta_f \leq 1$.

Пусть (X_0, X_1) – банахова пара, т.е. пара банаховых пространств, линейно и непрерывно вложенных в некоторое отделимое линейное топологическое пространство. Множество X назовем интерполяционным относительно этой пары, если оно промежуточно относительно нее, т.е. $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, и для любого линейного оператора T , ограниченного в пространствах X_0 и X_1 , выполнено $T(X) \subset X$.

И наконец, две неотрицательные функции $f(t)$ и $g(t)$, определенные на $[0, \infty)$, будем называть эквивалентными, если для некоторых $c > 0$ и $C > 0$ выполнено $cf(t) \leq g(t) \leq Cf(t)$, $t \geq 0$.

3. Формулировка результатов и доказательства.

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $\delta_\varphi < 1$;
- (b) если измеримая на $(0, \infty)$ функция $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^t x^*(s) ds \leq \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)}, \quad t > 0,$$

то

$$x^*(t) \leq \frac{C}{\varphi(t)}, \quad t > 0,$$

где константа $C > 0$ не зависит от t ;

- (с) M_φ нормируемо;
 (d) M_φ интерполяционно между L_1 и L_∞ .

Начнем со вспомогательного утверждения, которое в случае функций, определенных на отрезке, фактически известно [7; лемма 2] (см. также [2; лемма 2.1.4, с. 80]). Для полноты изложения оно приведено с доказательством.

ЛЕММА 1. Если функция $\varphi(t)$ возрастает при $t > 0$, то неравенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{C}{\varphi(t)}, \quad t > 0, \quad (4)$$

выполнено с некоторым $C > 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_\varphi < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\delta_\varphi < 1$, то функция растяжения $\mathcal{M}_\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{M}_\varphi(t) \leq C_1 t^{1-\varepsilon}, \quad t \geq 1,$$

при некоторых $C_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$, не зависящих от t . Тогда

$$\frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi(ut)} du \leq \int_0^1 \mathcal{M}_\varphi(1/u) du \leq C_1 \int_0^1 u^{\varepsilon-1} du = \frac{C_1}{\varepsilon}$$

и, тем самым, неравенство (4) выполнено с $C := C_1/\varepsilon$.

Пусть, наоборот, выполнено (4). Так как $\varphi(t)$ возрастает, то

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{1}{\varphi(t)}$$

и, значит, $\varphi(t)$ эквивалентна вогнутой функции

$$\tilde{\Phi}(t) := \frac{t}{\Phi(t)}, \quad \text{где} \quad \Phi(t) = \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Поэтому в виду [2; теорема 2.1.1] для некоторого $K > 0$ и всех $0 < t < u < \infty$

$$\frac{t}{\varphi(t)} \leq K \frac{u}{\varphi(u)}. \quad (5)$$

Предположим, что $\delta_\varphi \geq 1$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $t_n > 0$ такое, что

$$\frac{\varphi(nt_n)}{\varphi(t_n)} \geq \frac{n}{2}.$$

Следовательно, в виду (5)

$$\frac{\varphi(nt_n)}{nt_n} \int_0^{nt_n} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{\varphi(t_n)}{2t_n} \int_{t_n}^{nt_n} \frac{s}{\varphi(s)} \frac{ds}{s} \geq \frac{\ln n}{2K}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$\sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty, \quad (6)$$

что противоречит (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

(a) $\Rightarrow$ (b). Если $\delta_\varphi < 1$, то по лемме 1 и условию

$$x^*(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{C}{\varphi(t)}, \quad t > 0.$$

(b) $\Rightarrow$ (c). Обозначим через $M(\Phi)$ симметричное пространство Марцинкевича, где

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Условие (b) означает, что $M(\Phi) \subset M_\varphi$ и $\|x\|_\varphi \leq C\|x\|_{M(\Phi)}$. С другой стороны, если $x \in M_\varphi$, то

$$\int_0^t x^*(s) ds \leq \|x\|_\varphi \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)},$$

т.е. $x \in M(\Phi)$ и $\|x\|_{M(\Phi)} \leq \|x\|_\varphi$. Следовательно, $M_\varphi = M(\Phi)$ (с эквивалентностью $\|\cdot\|_\varphi$ и $\|\cdot\|_{M(\Phi)}$). Тем самым, (c) доказано.

(c) $\Rightarrow$ (d). Пусть $\|\cdot\|$ – норма на M_φ , эквивалентная функционалу $\|\cdot\|_\varphi$. Тем самым, M_φ становится симметричным пространством, фундаментальная функция которого $\psi(t)$ эквивалентна функции $\varphi(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_\varphi$. Поэтому норма в пространстве Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$, $\tilde{\psi}(t) = t/\psi(t)$, эквивалентна величине

$$\sup_{t>0} \frac{\varphi(t) \int_0^t x^*(s) ds}{t}.$$

Таким образом, в виду неравенства $\int_0^t x^*(s) ds \geq tx^*(t)$ выполнено вложение $M(\tilde{\psi}) \subset M_\varphi$ и $\|x\|_\varphi \leq C_1\|x\|_{M(\tilde{\psi})}$. В то же время $M(\tilde{\psi})$ – наибольшее среди симметричных пространств с фундаментальной функцией ψ [2; с. 162]. Значит, $M_\varphi \subset M(\tilde{\psi})$ и $\|x\|_{M(\tilde{\psi})} \leq C_2\|x\|_\varphi$. В итоге $M_\varphi = M(\tilde{\psi})$ (с эквивалентностью норм), и поэтому M_φ интерполяционно между L_1 и L_∞ [2; с. 155].

(d) $\Rightarrow$ (a). Пусть M_φ интерполяционно между L_1 и L_∞ . Тогда, в частности, $M_\varphi \subset L_1 + L_\infty$, и значит, в виду [2; с. 108]

$$\left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\varphi(s)} \right)^* ds = \int_0^1 \frac{ds}{\varphi(s)} ds < \infty,$$

т.е. функция $1/\varphi$ локально суммируема на $(0, \infty)$.

Предположим, что $\delta_\varphi \geq 1$. Тогда по лемме 1 неравенство (4) не выполнено ни при каком $C > 0$, т.е. мы имеем (6). В этом случае справедливо хотя бы одно из равенств:

$$A := \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty \quad \text{или} \quad B := \sup_{t \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty.$$

Предположим, например, что $A = \infty$. Тогда найдется $\tau_1 > 0$ такое, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \frac{ds}{\varphi(s)} > 2.$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t} \int_0^{\tau_1} \frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \frac{ds}{\varphi(s)},$$

то при некотором $\varepsilon \in (0, \tau_1)$ будем иметь

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - t} \int_t^{\tau_1} \frac{ds}{\varphi(s)} > 1, \quad 0 < t < \varepsilon. \quad (7)$$

Далее, опять так как $A = \infty$, существует $\tau_2 \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2} \int_0^{\tau_2} \frac{ds}{\varphi(s)} > 3.$$

В частности, в виду (7)

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau_2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{ds}{\varphi(s)} > 1.$$

Продолжая начатый процесс, построим последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\tau_1 > \tau_2 > \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$, для которой

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi(\tau_n)}{\tau_n - \tau_{n+1}} \int_{\tau_{n+1}}^{\tau_n} \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty. \quad (8)$$

Заметим, что то же соотношение получается и в случае, когда $B = \infty$, только $\tau_1 < \tau_2 < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$.

Обозначим через Δ_n промежутки $(\tau_{n+1}, \tau_n]$, если $A = \infty$, и $(\tau_n, \tau_{n+1}]$, если $B = \infty$. Пусть, кроме того,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(\tau_n) - \Phi(\tau_{n+1})}{\tau_n - \tau_{n+1}} \chi_{\Delta_n}(t), \quad \text{где } \Phi(t) = \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)}, \quad t > 0.$$

Так как $\Phi(t)$ – вогнутая функция, то $u(t)$ убывает, и значит, $u^*(t) = u(t)$. Функция $U(t) := \int_0^t u(s) ds$ линейна на промежутках Δ_n , $n = 1, 2, \dots$, и $U(\tau_n) = \Phi(\tau_n)$. Поэтому в виду вогнутости $\Phi(t)$ получим

$$\int_0^t u^*(s) ds \leq \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Воспользуемся теперь тем, что по условию M_φ интерполяционно между L_1 и L_∞ , а $1/\varphi \in M_\varphi$. По теореме Кальдерона–Митягина (см. [8], [9] или [2; теорема 2.4.3, с. 130]) мы можем заключить, что $u \in M_\varphi$, т.е. $u(t) \leq C/\varphi(t)$ с некоторым $C > 0$, не зависящим от $t > 0$. Последнее, очевидно, противоречит соотношению (8). Таким образом, предположение $\delta_\varphi \geq 1$ неверно, и последняя импликация (с) $\Rightarrow$ (d) доказана.

С помощью только что доказанной теоремы нетрудно получить результаты статьи [4] о нормируемости пространства $\Lambda^{p,\infty}(\omega)$ (см. условия (i) и (ii), приведенные в начале работы). Действительно, хорошо известно [2; теорема 2.6.10, с. 193], что максимальный оператор Харди–Литтлвуда M ограничен в симметричном пространстве X тогда и только тогда, когда его верхний индекс Бойда $\beta_X < 1$. Из доказательства теоремы 1 видно, что нормируемость класса M_φ (и то же самое $\Lambda^{p,\infty}(\omega)$)

эквивалентна его совпадению с симметричным пространством Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$, $\tilde{\psi}(t) = t/\psi(t)$, где $\psi(t)$ эквивалентна функции $\varphi(t)$. Но, как известно [2; с. 138], для пространства Марцинкевича индексы Бойда совпадают с соответствующими показателями растяжения фундаментальной функции. Поэтому $\beta_{M(\tilde{\psi})} = \delta_{\psi}$. Так как эквивалентные функции имеют одинаковые показатели растяжения, то $\delta_{\psi} = \delta_{\varphi}$. В итоге оператор M ограничен в M_{φ} тогда и только тогда, когда $\delta_{\varphi} < 1$, а это по теореме 1, в свою очередь, эквивалентно нормируемости класса M_{φ} . Что же касается условия (ii), то в виду леммы 1 достаточно заметить, что соотношение (3) совпадает с (4) для функции $\varphi(t) = W_p(t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. G. Lorentz, "Some new functional spaces", *Ann. of Math.* (2), **51**:1 (1950), 37–55.
- [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Пегунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [3] M. J. Carro, J. Soria, "Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator", *J. Funct. Anal.*, **112**:2 (1993), 480–494.
- [4] J. Soria, "Lorentz spaces of weak type", *Quart. J. Math. Oxford* (2), **49** (1998), 93–103.
- [5] M. J. Carro, J. Raposo, J. Soria, *Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities*, [arXiv: math.CA/0010010](https://arxiv.org/abs/math.CA/0010010).
- [6] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, 1988.
- [7] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, "Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций", *Тр. ММО*, **5** (1956), 483–522.
- [8] A. P. Calderon, "Spaces between L_1 and L_{∞} and the theorem of Marcinkiewicz", *Studia Math.*, **26** (1966), 273–299.
- [9] Б. С. Митягин, "Интерполяционная теорема для модулярных пространств", *Матем. сб.*, **66** (108):4 (1965), 473–482.

С. В. Асташкин

Самарский государственный университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило

10.10.2005

Исправленный вариант

06.06.2006