



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СВОЙСТВОМ КРУГЛОВА

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

1. Введение. Ввиду классического неравенства Хинчина система Радемахера

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для любого $p \in [1, \infty)$ эквивалентна в $L_p[0, 1]$ последовательности дизъюнктивных “сдвигов” $\{\bar{r}_n(\cdot) := r_n(\cdot - n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(0, \infty)$. Замечательное обобщение этого неравенства на класс симметричных пространств X функций на $[0, 1]$ было доказано Джонсоном и Шехтманом [1]. Они определили симметричное пространство Z_X^2 на $[0, \infty)$, связанное с данным X , и показали, что произвольная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых и в среднем равных нулю функций (т.е. $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$) эквивалентна в X последовательности их дизъюнктивных “сдвигов” $\{\bar{f}_k(\cdot) := f_k(\cdot - k + 1)\}_{k=1}^{\infty}$ в Z_X^2 при условии, что X содержит $L_p[0, 1]$ при некотором $p < \infty$. Отметим, что основная проблема заключалась при этом в доказательстве неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \quad (1)$$

(см. правую часть неравенства (3) в [1; теорема 1]).

Наш подход к получению оценок типа (1) основывается на изучении некоторого линейного оператора $\mathcal{K}$ (названного *оператором Круглова*) на $L_1[0, 1]$, введенного нами недавно в [2] (см. также [3]), и он близок к подходу, развитому несколько ранее Браверманом [4] и использующему некоторые идеи и вероятностные конструкции Круглова [5]. Кроме того, он тесно связан со стохастическим интегрированием относительно симметризованного пуассоновского процесса, примененного в [6] (см. также [7]) для изучения вопроса о том, когда данное симметричное пространство X на $[0, 1]$ изоморфно некоторому симметричному пространству на полуоси. После введения в п. 2 и п. 3 необходимых определений в п. 4 мы формулируем главный результат, состоящий в том, что для широкого класса симметричных пространств X выполнение неравенства (1) для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ независимых и в среднем равных нулю функций эквивалентно ограниченности оператора Круглова $\mathcal{K}$ (см. теоремы 1 и 2). Преимущество нашего подхода по сравнению с [1] состоит в том, что он позволяет получить неравенство (1), в том числе, и в некоторых симметричных пространствах X , не содержащих $L_p[0, 1]$ ни при каком $p < \infty$. Соответствующие примеры экспоненциальных пространств Орлича приведены в замечании 1 (отметим, что для этого класса пространств теорема 1 из [1] неприменима).

Работа была поддержана Австралийским научным советом.

© С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, 2006

В п. 5 и п. 6 содержатся приложения полученных результатов. В первом из них речь идет об описании симметричных пространств X на $[0, 1]$, в которых произвольная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ независимых одинаково распределенных функций натягивает гильбертово подпространство. В частности, используя одно из его следствий, мы отрицательно отвечаем на вопрос Каротерса и Дилворса [8] о том, всякая ли такая последовательность натягивает гильбертово подпространство в пространстве Лоренца $L_{2,q}$, $0 < q < 2$. Заметим, что аналогичный ответ на этот вопрос был ранее анонсирован в работе [9], однако доказательство, приведенное там, неполно.

Результаты п. 6 относятся к известной проблеме о том, когда данное симметричное пространство X на $[0, 1]$ имеет изоморфное представление как симметричное пространство на полуоси (впервые поставленной в [10] и глубоко изученной в [6] и [7]). Во-первых, оказывается, что при условии ограниченности оператора $\mathcal{H}$ пространство X содержит подпространство, изоморфное некоторому симметричному пространству на полуоси. Ранее подобное утверждение было доказано лишь для гораздо более узкого класса симметричных пространств с нетривиальным нижним индексом Бойда. Во-вторых, теорема 1 позволяет дать гораздо более простое доказательство хорошо известной теоремы (см. [6; раздел 8] или [7; с. 203] о том, что X изоморфно некоторому симметричному пространству на полуоси, если индексы Бойда X нетривиальны.

2. Определения и обозначения. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0, \alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$, называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если из того, что $y \in E$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$, $t \in [0, \alpha)$, следует: $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. Здесь и далее λ – мера Лебега, а $x^*(t)$ – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* $|x(s)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : \lambda(\{s \in [0, \alpha) : |x(s)| > \tau\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Если E – симметричное пространство (с. п.) на интервале $[0, \alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $E^\times$ состоит из всех измеримых функций y , для которых

$$\|y\|_{E^\times} := \sup\left\{\int_0^\alpha |x(t)y(t)| dt : x \in E, \|x\|_E \leq 1\right\} < \infty.$$

Если E^* – пространство, сопряженное к E , то $E^\times \subset E^*$ и $E^\times = E^*$, если и только если E сепарабельно. Естественное вложение E в его второе двойственное $E^{\times\times}$ является изометрической сюръекцией, если и только если E *максимально* (или имеет *свойство Фату*), т.е. из того, что

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq E, \quad f \in S[0, \alpha), \quad f_n \rightarrow f \quad \text{п.в. на } [0, \alpha), \quad \sup_n \|f_n\|_E < \infty,$$

следует

$$f \in E \quad \text{и} \quad \|f\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_E.$$

Норма $\|\cdot\|_E$ с.п. E называется *порядково полунепрерывной*, если единичный шар E замкнут в E относительно сходимости почти всюду. Последнее эквивалентно тому, что естественное вложение E в его второе двойственное – изометрия.

Для любого с.п. E на $[0, \alpha)$ справедливы непрерывные вложения

$$L_1[0, \alpha) \cap L_\infty[0, \alpha) \subseteq E \subseteq L_1[0, \alpha) + L_\infty[0, \alpha).$$

Если E – с.п., то функция $\varphi_E(t) := \|\chi_A\|_E$, где $\lambda(A) = t$, а χ_A – характеристическая функция этого множества, называется *фундаментальной функцией* E . Другой характеристикой симметричного пространства являются его индексы Бойда. Напомним их определение в случае пространств на $[0, 1]$. Если $0 < \tau < \infty$, то оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau)\chi_{(0, \min(1, \tau))}(t)$ ограничен в любом с.п. X . Числа

$$\alpha_X := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_X := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau},$$

называются *индексами Бойда* пространства X ; всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$.

Важными примерами с. п. являются L_p -пространства, $1 \leq p \leq \infty$, а также их обобщение – пространства Орлича. Пусть Φ – функция Орлича на $[0, \infty)$, т.е. Φ – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. Пространство Орлича $L_\Phi = L_\Phi[0, \alpha)$ состоит из всех функций f , измеримых на $[0, \alpha)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \rho > 0 : \int_0^\alpha \Phi \left(\frac{|f(t)|}{\rho} \right) dt \leq 1 \right\}.$$

Пространство Лоренца $L_{p,q}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, образовано всеми измеримыми $x(t)$, для которых конечно выражение

$$\|x\|_{p,q} = \left(\int_0^\alpha (x^*(t)t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad \text{если } q < \infty, \quad \text{и} \quad \|x\|_{p,\infty} = \sup_{0 < t < \alpha} (x^*(t)t^{1/p}).$$

Функционал $\|\cdot\|_{p,q}$ является нормой, если $1 \leq q \leq p$, и эквивалентен норме, если $q > p$. Если X – с. п. на $[0, 1]$, то

$$Z_X^2 := \{f \in (L_1 + L_\infty)(0, \infty) : \|f\|_{Z_X^2} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)} < \infty\}.$$

Нетрудно показать, что квазинорма $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ эквивалентна норме, и поэтому Z_X^2 является с. п. на $[0, \infty)$.

Как известно, теория с. п. имеет много точек соприкосновения с теорией интерполяции операторов. Напомним, что банахово пространство X называется *интерполяционным* относительно банаховой пары (X_0, X_1) , если любой линейный оператор T , ограниченный в пространствах X_0 и X_1 , ограничен также и в X . Подробнее о с. п. и об интерполяции операторов см. монографии [7], [11], [12].

3. Свойство Круглова и оператор $\mathcal{H}$. Пусть f – измеримая функция (случайная величина) на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим случайную величину $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i – независимые копии f , а N – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром 1, независимая относительно последовательности $\{f_i\}$. Другое (эквивалентное) определение $\pi(f)$ можно дать, используя ее характеристическую функцию

$$\theta_{\pi(f)}(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathcal{F}_f(x) \right),$$

где $\mathcal{F}_f$ – функция распределения f . Следующее свойство имеет своим источником работу Круглова [5] и интенсивно изучалось и использовалось Браверманом [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что с. п. X на $[0, 1]$ имеет *свойство Круглова* (обозначение: $X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует $\pi(f) \in X$.

В работе авторов [2] (см. также [3]) был определен линейный положительный оператор $\mathcal{H}$, тесно связанный со свойством Круглова (и поэтому названный там также оператором Круглова). Точнее, если X – с. п. на $[0, 1]$, то оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует в X тогда и только тогда, когда $X \in \mathbb{K}$ [2; лемма 3.3]. Одновременно ограниченность $\mathcal{H}$ является достаточным (и при весьма широких предположениях необходимым) условием для эквивалентности сумм положительных независимых и одинаково с ними распределенных дизъюнктивных функций [2; теорема 3.5]. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность функций, определенных на $[0, 1]$, то через $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^\infty$ всюду далее будет обозначаться последовательность дизъюнктивных одинаково распределенных с ними функций на $[0, \infty)$.

4. Сравнение сумм в среднем равных нулю независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах. Главный результат этого пункта можно рассматривать как обобщение неравенства Хинчина на класс с. п. со свойством Круглова и произвольные системы независимых и в среднем равных нулю функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ и выполнено хотя бы одно из условий:

- (i) оператор $\mathcal{H}: X \mapsto Y$ ограничен;
- (ii) норма Y порядково полунепрерывна и $\mathcal{H}: X \mapsto Y^{\times \times}$ ограничен.

Тогда существует $C > 0$ такое, что для каждой последовательности независимых и в среднем равных нулю функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как уже говорилось во введении, теорема 1 усиливает соответствующую часть теоремы 1 из работы [1] для нормированных пространств. В частности, рассмотрим пространства Орлича

$$\exp L_p := L_{N_p}, \quad \text{где} \quad N_p(t) := e^{t^p} - \sum_{k=0}^{[1/p]} \frac{t^{kp}}{k!}.$$

Заметим, что $\exp L_p \in \mathbb{K}$, если $0 < p < 1$ (см. [5] или [4]) и, следовательно, теорема 1 применима к ним. Напротив, так как $L_q \not\subseteq \exp L_p$ для любого $q \in (0, \infty)$ и $p \in (0, 1)$, то теорема 1 из [1] в этом случае “не работает”.

В случае, когда норма Y порядково полунепрерывна, справедливо также и обратное утверждение. Точнее, теорема 1 и анализ доказательства [2; теорема 3.5] приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X и Y – с.п. на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ и норма Y порядково полунепрерывна. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует из X в Y ;
- (ii) существует константа $C > 0$ такая, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_X \quad (3)$$

верно для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ независимых, симметрично и одинаково распределенных функций, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\{f_k \neq 0\}) \leq 1. \quad (4)$$

Как показано в работе [13] (см. также [7; с. 134–136]), неравенство Хинчина выполнено в с.п. X тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича $\exp L_2 = L_{N_2}$, $N_2(t) := \exp t^2 - 1$. В общей ситуации, когда рассматривается класс всех последовательностей независимых, равных в среднем нулю функций подобного “минимального” с.п. уже нет. Точнее, справедливо следующее утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению первой части теоремы 1 из [1].

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что с.п. E обладает следующим свойством: для любого максимального с.п. $X \supseteq E$ существует $C > 0$ такое, что (3) верно для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subseteq X$ независимых, симметрично и одинаково распределенных функций, удовлетворяющих условию (4). Тогда E содержит L_p для некоторого $p \in [1, \infty)$.

5. ℓ_2 -оценки для последовательностей независимых одинаково распределенных функций. Здесь мы рассмотрим вопрос о том, в каких с. п. X на $[0, 1]$ каждая последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ независимых и одинаково распределенных функций (сокращенно: i.i.d. последовательность) натягивает гильбертово подпространство или, иначе говоря, для каждой такой последовательности существует константа $C > 0$ такая, что

$$C^{-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}. \quad (5)$$

В действительности, интерес представляет лишь правое неравенство в (5), так как левое верно в любом с. п. [4; лемма 1, с. 52]. Кроме того, если выполнено (5), то легко видеть [4; с. 71], что пространство X удовлетворяет следующим условиям:

$$(a) \quad X^{\times \times} \supset \exp L_2; \quad (b) \quad f_1 \in L_2; \quad (c) \quad \int_0^1 f_1(t) dt = 0.$$

Таким образом, можно предполагать, что $X \subseteq L_2$ и что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ состоит из функций, в среднем равных нулю. Следующее утверждение является главным результатом этого пункта.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что X – с. п. на $[0, 1]$, интерполяционное относительно пары (L_2, L_∞) . Если либо*

$$(i) \quad \mathcal{H}: X \mapsto X, \\ \text{либо}$$

$$(ii) \quad \text{норма } X \text{ порядково полунепрерывна и } \mathcal{H}: X \mapsto X^{\times \times},$$

то существует $C > 0$ такое, что для любой i.i.d. последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ функций, в среднем равных нулю, и любой $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k f_k \right\|_X \leq C \|f_1\|_X \|a\|_{\ell_2}.$$

Можно показать, что условие, состоящее в выполнении неравенства (5) для произвольной i.i.d. последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ функций, в среднем равных нулю, формально более слабое, чем утверждение теоремы 3, на самом деле, эквивалентно ему.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если с. п. $X \subsetneq L_2$ и $\varphi_X(u) = u^{1/2}$, то существует i.i.d. последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ функций, в среднем равных нулю, натягивающая в X подпространство, не изоморфное пространству ℓ_2 .*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В частности, если X – пространство Лоренца $L_{2,q}$, $1 \leq q < 2$, то ввиду последнего следствия существует i.i.d. последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_{2,q}$, которая натягивает в $L_{2,q}$ подпространство, не изоморфное ℓ_2 . Тем самым, мы получаем отрицательный ответ на вопрос из [8; с. 157]. Аналогичный ответ ранее был дан в работе [9]; однако, доказательство этого результата там было неполным.

Тот же самый пример, кроме того, показывает, что условия (a)–(c) на с. п. X , сформулированные в начале пункта, не гарантируют того, что (5) выполнено для произвольной i.i.d. последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ функций, в среднем равных нулю. Тем самым, дается отрицательный ответ на вопрос, поставленный в [4; с. 71].

6. Изоморфизмы между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и $[0, \infty)$.

Теорема 1 может быть применена к изучению вопроса о том, содержит ли данное с. п. на конечном интервале подпространство, изоморфное некоторому с. п. на полуоси. Общая проблема изоморфизма между с. п. на $[0, 1]$ и на $[0, \infty)$ (иными, нежели L_p -пространства)

впервые была поставлена Митягиным [10]. Этот и другие близкие вопросы интенсивно изучаются в работе [6] (см. также монографию [7]) на основе подхода, использующего стохастический интеграл относительно симметризованного пуассоновского процесса. Наш подход технически проще, аналогичные аргументы применялись ранее в работе [14] в специальном случае пространств Лоренца $L_{p,q}$. Первая часть следующей теоремы усиливает ранее имевшиеся результаты об изоморфном вложении некоторого с. п. на полуоси в данное с. п. X на $[0, 1]$, заменяя условие нетривиальности нижнего индекса Бойда X на более слабое условие ограниченности оператора Круглова $\mathcal{K}$. Вторая часть теоремы хорошо известна (см. [6; раздел 8] или [7; с. 203]), но наше доказательство ее (с помощью теоремы 1) намного проще.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – с. п. на $[0, 1]$. Тогда

- (i) если оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в X , то X содержит подпространство, изоморфное с. п. Z_X^2 ;
- (ii) если индексы Бойда X нетривиальны, т.е. $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, то пространства X и Z_X^2 изоморфны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. B. Johnson, G. Schechtman, *Ann. Probab.*, **17** (1989), 789–808. [2] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, *Israel J. Math.*, **145** (2005), 125–156. [3] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Матем. заметки*, **76:4** (2004), 483–489. [4] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. [5] В. М. Круглов, *Теория вероятн. и ее примен.*, **15:2** (1970), 331–336. [6] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric Structures in Banach Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **19**, 1979. [7] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979. [8] N. L. Carothers, S. J. Dilworth, *J. Funct. Anal.*, **84** (1989), 146–159. [9] С. Я. Новиков, *Изв. вузов. Матем.*, 1992, № 4, 36–38. [10] Б. С. Митягин, *УМН*, **25** (1970), 59–103. [11] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [12] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, 1988. [13] V. A. Rodin, E. M. Semenov, *Anal. Math.*, **1** (1975), 207–222. [14] N. L. Carothers, S. J. Dilworth, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **194** (1988), 221–226.

С. В. Асташкин

Самарский государственный университет

Поступило

10.04.2006

Ф. А. Сукочев

Flinders University, Bedford Park, SA, Australia