

Вещественный метод интерполяции на парах пересечений

© 2006. С. В. Асташкин, П. Сунехаг

1. Введение. Одной из центральных в теории интерполяции операторов [1] остается проблема интерполяции подпространств, упомянутая еще в монографии Лионса и Мадженеса [2]. Ни в коей мере не претендуя на полноту, упомянем здесь работы [3]–[12], в которых изучались ее различные аспекты. Важным частным случаем этой проблемы является задача интерполяции пересечений, которую для вещественного метода интерполяции (определения см. ниже) можно сформулировать следующим образом. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, т.е. два банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в отделимое линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Если N — линейное подпространство пространства $\mathcal{T}$, то оно порождает нормированную (вообще говоря, не банахову) пару $(X_0 \cap N, X_1 \cap N)$, где норма в $X_i \cap N$ является сужением нормы пространства X_i ($i = 0, 1$). Спрашивается, при каких условиях на тройку (X_0, X_1, N) и параметры вещественного метода интерполяции $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$ выполнено следующее естественное равенство (по составу элементов с эквивалентностью норм):

$$(X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap N? \quad (1)$$

Мы будем рассматривать ситуацию, когда N — ядро линейного функционала $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$. В этом случае равенство (1) означает просто эквивалентность норм пространств $N_{\theta, q} = (X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta, q}$ и $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ на подпространстве N . В работах [13], [14] и независимо в [15] были введены четыре индекса, связанные с функционалом ψ как элементом суммы сопряженных пространств $X_0^* + X_1^*$. С их помощью удалось получить ответ при некотором дополнительном условии. В этой заметке мы анонсируем результаты, в которых это условие снято за счет введения еще двух аналогичных индексов. Тем самым здесь получено полное и окончательное решение рассматриваемой задачи.

Важный частный случай описанной задачи был рассмотрен в работе Кругляка, Малигранды и Перссона [16]. При некоторых дополнительных предположениях в ней были найдены условия на $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$ и весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$, при которых выполнено равенство

$$(L_p(w_0) \cap N, L_p(w_1) \cap N)_{\theta, p} = (L_p(w_0), L_p(w_1))_{\theta, p} \cap N, \quad (2)$$

где $L_p(w)$ — весовое L_p -пространство на $(0, \infty)$ с обычной нормой, а N — линейное пространство всех функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $\int_0^\infty f(x) dx = 0$. Там же была поставлена аналогичная задача для более общей пары $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))$. Используя теоремы 1 и 2 настоящей заметки, нетрудно получить решение этой задачи; в конце работы будет сформулирован один из результатов в этом направлении (подробнее см. [14]).

2. Определения и обозначения. Для нормированной пары (X_0, X_1) и $t > 0$ определим $\mathcal{H}$ -функционал Петре

$$\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) = \inf_{x=x_0+x_1, x_i \in X_i} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}), \quad x \in X_0 + X_1.$$

Если $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q < \infty$, то интерполяционное пространство $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ вещественного метода состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, таких, что

$$\|x\|_{X_{\theta,q}} = \left\{ \int_0^\infty (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x : X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty.$$

Можно дать и другое определение этого пространства (с эквивалентной нормой), используя $\mathcal{J}$ -функционал

$$\mathcal{J}(t, x; X_0, X_1) = \max(\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}), \quad x \in X_0 \cap X_1.$$

А именно, $X_{\theta,q}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, представимых в виде $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} x_k$ (сходимость в $X_0 + X_1$), с нормой

$$\inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{J}(2^k, x_k; X_0, X_1))^q \right\}^{1/q}, \quad (3)$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям элемента x указанного вида.

Если $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , а $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то можно рассмотреть банахову пару сопряженных пространств (X_0^*, X_1^*) и $\psi \in X_0^* + X_1^*$ [1, §3.7]. Важную роль в дальнейшем играет $\mathcal{K}$ -функционал $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$, а также функции

$$M(t) = \sup_{s>0} \frac{k(ts)}{k(s)}, \quad M_0(t) = \sup_{0<s \leq \min(1, 1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)}, \quad M_\infty(t) = \sup_{s \geq \max(1, 1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)}.$$

Они полумультимпликативны при $t > 0$; поэтому существуют числа

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \quad \alpha_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \quad \alpha_\infty = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

$$\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \quad \beta_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \quad \beta_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

называемые индексами растяжения функции $k(t)$. Легко видеть, что $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \beta \leq 1$ и $0 \leq \alpha \leq \alpha_\infty \leq \beta_\infty \leq \beta \leq 1$.

3. Основные результаты. Предположим, что (X_0, X_1) — банахова пара, такая, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 . Пусть $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$, $N = \text{Ker } \psi$ и N_i — пространство N , рассматриваемое с нормой пространства X_i ($i = 0, 1$).

ТЕОРЕМА 1. Нормы интерполяционных пространств $N_{\theta,q} = (N_0, N_1)_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ эквивалентны на N тогда и только тогда, когда

$$\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1). \quad (4)$$

При этом, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1)$, то $N_{\theta,q} = (N_0, N_1)_{\theta,q}$ всюду плотно в $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$, а если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $N_{\theta,q}$ всюду плотно в некотором подпространстве коразмерности 1 пространства $X_{\theta,q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду неравенств $\alpha_0 \leq \beta_0$ и $\alpha_\infty \leq \beta_\infty$ непустым может быть, самое большее, лишь один из интервалов (β_0, α_∞) и (β_∞, α_0) .

Иную формулировку теоремы 1 можно дать, используя следующее определение из [15]. Сохраняя прежние обозначения и условия, определим $X_{\theta,q,\psi}$ как множество всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление вида

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} x_k, \quad x_k \in N \text{ (сходимость в } X_0 + X_1), \quad (5)$$

с нормой (3), где нижняя грань берется по представлениям вида (5).

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы пространство $X_{\theta,q,\psi}$ было замкнуто в пространстве $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$, необходимо и достаточно выполнение условия (4).*

При этом, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1)$, то $X_{\theta,q,\psi} = X_{\theta,q}$, а если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $X_{\theta,q,\psi} = X_{\theta,q} \cap \text{Ker } \tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ — непрерывное продолжение функционала ψ на пространство $X_{\theta,q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 является усилением предложения 5.6 из работы [15], где дополнительно предполагалось, что $\beta_\infty \leq \alpha_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так же, как и в [13]–[15], в доказательстве мы используем идею сведения задачи интерполяции пересечений к изучению оператора сдвига в некотором весовом l_q -пространстве последовательностей. Впервые она была применена Ивановым и Калтоном [10] для сравнения интерполяционных пространств $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ и $(N_0, X_1)_{\theta,q}$, где $\psi \in X_0^*$ и $N_0 = \text{Ker } \psi$. Этот случай является частным по отношению к рассматриваемому здесь, и поэтому интерполяционные результаты из [10] являются следствием теоремы 1 настоящей заметки (см. [14] и [15]).

4. Об интерполяции пересечений весовых L_p -пространств, порожденных интегральным функционалом. Пусть $w(x)$ — положительная измеримая на $(0, \infty)$ функция, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда, как обычно, $L_p(w)$ — пространство всех измеримых функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{w,p} = (\int_0^\infty |f(x)|^p w(x) dx)^{1/p}$ (с естественной модификацией при $p = \infty$). Рассмотрим линейный функционал $\varphi(f) = \int_0^\infty f(x) dx$ с областью определения, состоящей из всех измеримых функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ для произвольных $0 < a < b < \infty$ и существует $\lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$. Обозначим его ядро через N .

Предположим, что сужение функционала φ на пересечение $L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1)$ ограничено. Тогда, основываясь на теореме 1 и действуя так же, как в [14], мы можем найти необходимые и достаточные условия, при которых выполнен аналог равенства (2) для пары $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))$ (уже без всяких ограничений на индексы растяжения $\mathcal{K}$ -функционала Петре φ в паре $(L_{p_0}(w_0)^*, L_{p_1}(w_1)^*)$). Не вдаваясь в подробности, приведем здесь лишь один наиболее просто формулируемый результат в случае $p_0 = p_1 = 1$. Пусть $w(x) = w_0(x)/w_1(x)$, а $w^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $w(x)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $w_0(x)$ возрастает, $w_1(x)$ убывает и $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1/w(x) = 0$. Если $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0, \alpha_\infty$ и β_∞ — индексы растяжения функции $k(t) = 1/(w_0(w_1^{-1}(1/t)))$, то равенство*

$$(L_1(w_0) \cap N, L_1(w_1) \cap N)_{\theta,q} = (L_1(w_0), L_1(w_1))_{\theta,q} \cap N$$

верно тогда и только тогда, когда выполнено (4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. [2] Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971. [3] Н. Triebel, *Math. Nachr.*, **69** (1975), 57–60. [4] L. Maligranda, *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo*, **10** (1985), 113–118. [5] R. Wallsten, in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 1902, 1988, 410–419. [6] G. Pisier, *Pacific J. Math.*, **155** (1992), 341–368. [7] S. Janson, *Arkiv Math.*, **31** (1993), 307–338. [8] С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *Алгебра и анализ*, **8:4** (1996), 75–109. [9] J. Löfström, *Interpolation of subspaces*, Technical report no. 10, Univ. of Göteborg, 1997. [10] S. Ivanov, N. Kalton, *Алгебра и анализ*, **13:2** (2001), 93–115. [11] S. V. Astashkin, *J. Math. Math. Sci.*, **25:7** (2001), 451–465. [12] S. Kaijser, P. Sunehag, in: *Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics* (Lund 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, 345–353. [13] С. В. Асташкин, *Функц. анализ и его прил.*, **39:2** (2005), 61–64. [14] С. В. Асташкин, *Алгебра и анализ*, **17:2** (2005), 33–69. [15] P. Sunehag, *J. Approx. Theory*, **130** (2004), 78–98. [16] N. Krugljak, L. Maligranda, L.-E. Persson, *Arkiv Mat.*, **37** (1999), 323–344.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Department of Mathematics, Uppsala University
e-mail: peter@math.uu.se

Поступило в редакцию
20 апреля 2005 г.

УДК 517.986.4

Об операторах Рака*

© 2006. Р. С. ИСМАГИЛОВ

Обычно коэффициенты Рака определяются для тензорных произведений конечномерных представлений полупростых групп Ли ([1], [2]). В дальнейшем это определение переносилось на представления со старшим весом группы $SL(2, \mathbb{R})$; см. [3]. В этом случае спектр произведения дискретен, что позволяет определить указанные коэффициенты «аналитическим продолжением по целочисленным параметрам» из формул для конечномерного случая. В работе [5] указаны коэффициенты Рака для трех представлений этой же группы в предположении, что хотя бы два из них содержатся в дискретной серии.

В этой заметке в качестве обобщения коэффициентов Рака вводятся *операторы Рака* для произвольной локально компактной группы с «хорошим» двойственным пространством. Приводятся явные формулы для операторов Рака, связанных с представлениями основной серии группы $G = PSL(2, \mathbb{C})$ (тензорные произведения этих представлений были изучены Наймарком [4]).

1. Операторы Рака.

Введем основное определение.

Пусть G — локально компактная группа типа I и $\hat{G}$ — двойственное пространство. Пусть дано непрерывное поле гильбертовых пространств H_c и действующих в них представлений T_c (T_c принадлежит классу эквивалентности $c \in \hat{G}$). Через δc обозначим меру Планшереля на $\hat{G}$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-0001.