

Об интерполяции пересечений, порожденных линейным функционалом

© 2005. С. В. Асташкин

1. Введение. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, т. е. два банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в отделимое линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Если N — линейное подпространство в $\mathcal{T}$, то оно порождает нормированную (вообще говоря, не банахову) пару $(X_0 \cap N, X_1 \cap N)$, где норма в $X_i \cap N$ — сужение нормы пространства X_i ($i = 0, 1$).

Проблема интерполяции пересечений состоит в нахождении условий на тройку (X_0, X_1, N) и параметры вещественного метода интерполяции $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$, при которых верно следующее естественное равенство (по составу элементов с эквивалентностью норм):

$$(X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap N \quad (1)$$

(определение пространств $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ см. ниже).

Важный частный случай этой задачи, когда (X_0, X_1) — пара весовых L_p -пространств $(L_p(w_0), L_p(w_1))$, а N — линейное пространство всех функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что

$$\int_0^\infty f(x) dx = 0, \quad (2)$$

был рассмотрен в работе Кругляка, Малигранды и Перссона [1]. Там же была поставлена более общая задача: при каких условиях на $w_0(x)$, $w_1(x)$, $p_0, p_1 \in [1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty)$

$$(L_{p_0}(w_0) \cap N, L_{p_1}(w_1) \cap N)_{\theta, q} = (L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta, q} \cap N \quad (3)$$

(здесь, вообще говоря, $p_0 \neq p_1$, а пространство N определяется по-прежнему соотношением (2))? Она и стала отправной точкой для постановки проблемы, рассматриваемой в данной заметке.

Предположим, что N — ядро линейного функционала ψ , определенного на некотором линейном пространстве $M \subset \mathcal{T}$, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$. Мы определим четыре индекса растяжения $\mathcal{K}$ -функционала ψ в сопряженной паре (X_0^*, X_1^*) , используя которые сформулируем необходимые условия для выполнения равенства (1). При подходящем выборе N эти условия оказываются также и достаточными. В качестве следствия мы получаем результаты Иванова и Калтона [2] о сравнении интерполяционных пространств $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ и $(N_0, X_1)_{\theta, q}$, где $\psi \in X_0^*$ и $N_0 = \text{Ker } \psi$ с нормой из X_0 . В то же время доказательство теоремы 1 основано на использовании идеи из последней работы, состоящей в сведении общей задачи интерполяции подпространств к изучению оператора сдвига в некотором весовом l_p -пространстве последовательностей. При определенных условиях полученные результаты позволяют решить задачу об интерполяции пересечений весовых L_p -пространств, поставленную в [1] (см. равенство (3)). Об этом речь пойдет в конце работы.

В заключение заметим, что задача об интерполяции пересечений, а также задача, рассматриваемая в [2], — важные (но все-таки частные) случаи общей

и трудной проблемы интерполяции подпространств, сформулированной еще в монографии Лионса и Мадженеса [3] (см., в частности, [4–13]).

2. Определения и обозначения. Для нормированной пары (X_0, X_1) и $t > 0$ $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалы Петре определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) &= \inf_{x=x_0+x_1, x_i \in X_i} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}), & x \in X_0 + X_1, \\ \mathcal{J}(t, x; X_0, X_1) &= \max(\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}), & x \in X_0 \cap X_1.\end{aligned}$$

Если $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q < \infty$, то интерполяционное пространство вещественного метода $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, таких, что

$$\|x\|_{X_{\theta,q}} = \left\{ \int_0^\infty (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty.$$

Если $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , а $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то можно рассмотреть банахову пару сопряженных пространств (X_0^*, X_1^*) и $\psi \in X_0^* + X_1^*$ [14, §3.7]. Важную роль в дальнейшем играет $\mathcal{K}$ -функционал $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$, а также функции

$$M(t) = \sup_{s>0} \frac{k(ts)}{k(s)}, \quad M_0(t) = \sup_{0<s \leq \min(1, 1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)}, \quad M_\infty(t) = \sup_{s \geq \max(1, 1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)}.$$

Они полумультимпликативны при $t > 0$, и поэтому существуют числа

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, & \beta &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \\ \alpha_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, & \beta_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},\end{aligned}$$

называемые индексами растяжения функции $k(t)$. Легко видеть, что $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \leq \beta \leq 1$ и $0 \leq \alpha \leq \beta_\infty \leq \beta \leq 1$. Если, в частности, $\psi \in X_0^*$, то $k(t) \leq C$ ($t > 0$). Поэтому $\alpha = \beta_\infty = 0$. Оставшиеся два индекса α_0 и β были введены и использовались в работе [2].

3. Основные результаты. Предположим, что (X_0, X_1) — банахова пара, такая, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 . Пусть $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$, $N = \text{Ker } \psi$ и N_i — пространство N , рассматриваемое с нормой из X_i ($i = 0, 1$).

ТЕОРЕМА 1. Если

$$\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1), \quad (4)$$

то нормы интерполяционных пространств $N_{\theta,q} = (N_0, N_1)_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ эквивалентны на N . При условии $\beta_\infty \leq \alpha_0$ верно и обратное утверждение: если нормы пространств $N_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q}$ эквивалентны на N , то выполнено (4).

Кроме того, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то $N_{\theta,q}$ всюду плотно в $X_{\theta,q}$; если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $N_{\theta,q}$ всюду плотно в некотором подпространстве коразмерности 1 пространства $X_{\theta,q}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что линейный функционал ψ определен на некотором линейном пространстве $M \supset X_0 \cap X_1$, $N = \text{Ker } \psi$. Пусть ψ_0 — сужение функционала ψ на $X_0 \cap X_1$, $\psi_0 \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi_0 \neq 0$, и α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi_0; X_0^*, X_1^*)$, $\beta_\infty \leq \alpha_0$. Тогда, если верно равенство (1), то выполнено (4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi_0 \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi_0 \neq 0$. Если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то ψ_0 продолжается по непрерывности до функционала $\psi \in ((X_0, X_1)_{\theta, q})^*$. Если $\theta \in (0, \alpha)$ (соответственно $\theta \in (\beta, 1)$), то ψ_0 продолжается по непрерывности до функционала $\psi \in ((X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_1)^*$ (соответственно $\psi \in ((X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_0)^*$). Кроме того, если $N = \text{Ker } \psi$, то равенство (1) будет верным во всех трех случаях.

Из теорем 1 и 2 получаем важное

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$, $N = \text{Ker } \psi$. Если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то интерполяционное пространство $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ совпадает с множеством всех $x \in X_0 + X_1$, таких, что $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$, $x_k \in N$, и

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathcal{J}(2^k, x_k; X_0, X_1) 2^{-\theta k})^q \right)^{1/q} \leq C \|x\|_{X_{\theta, q}},$$

где константа $C > 0$ не зависит от x . Аналогичное утверждение верно также в случае $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, если пространство $X_{\theta, q}$ заменить пересечением $X_{\theta, q} \cap \tilde{N}$, где $\tilde{N}$ — ядро функционала $\tilde{\psi}$, являющегося продолжением функционала ψ на $X_{\theta, q}$.

Отсюда легко получить результаты о сравнении пространств $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ и $(N_0, X_1)_{\theta, q}$, где $N_0 = \text{Ker } \psi$, $\psi \in X_0^*$, из работы [2]. Действительно, в этом случае $\alpha = \beta_\infty = 0$. Кроме того, так как ψ определен на всем пространстве X_0 , то $(X_0, X_1)_{\theta, q} \subset N_0 + X_1$. Поэтому ввиду следствия 2 и теоремы о совпадении пространств $\mathcal{H}$ - и $\mathcal{J}$ -методов [14, теорема 3.3.1]

$$(N_0, X_1)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}, \quad \text{если } \theta \in (\beta, 1),$$

и

$$(N_0, X_1)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap \tilde{N}, \quad \text{если } \theta \in (0, \alpha_0).$$

Дополнительно из теоремы 1 следует, что $(N_0, X_1)_{\theta, q}$ не замкнуто в $(X_0, X_1)_{\theta, q}$, если $\theta \in [\alpha_0, \beta]$.

4. Приложения. Вернемся к задаче, связанной с равенством (3). В этом случае пространство N , определяемое соотношением (2), является ядром функционала $\psi(f) = \int_0^\infty f(x) dx$, область определения M которого состоит из всех измеримых функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ для произвольных $0 < a < b < \infty$, а также существует $\lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$.

Для простоты мы ограничимся случаем, когда $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, а также выполнены условия регулярности, аналогичные условиям из работы [1]. А именно, предположим, что

(*) $w_0(x)$ возрастает, $w_0(2x) \leq C_1 w_0(x)$ ($x > 0$) и $\int_x^\infty w_0(s)^{1/(1-p_0)} ds \leq C_2 x w_0(x)^{1/(1-p_0)}$ ($x > 0$), если $p_0 > 1$, а $w_1(x)$ либо убывает и $w_1(x) \leq C_3 w_1(2x)$ ($x > 0$), либо возрастает, но так, что функция $w(x) = w_0(x)/w_1(x)$ возрастает и $\int_0^x w_1(s)^{1/(1-p_1)} ds \leq C_4 x w_1(x)^{1/(1-p_1)}$ ($x > 0$).

Пусть $r^{-1} = p_0^{-1} - p_1^{-1}$, $v(x) = w_0(x)^{p_1/(p_1-p_0)} w_1(x)^{-p_0/(p_1-p_0)}$ и $\gamma(t)$ — решение уравнения $\int_0^x v(s) ds = t^{-r}$ для каждого $t > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p_0, p_1, w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют условиям (*), а α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k(t) = \gamma(t)^{(p_0-1)/p_0} w_0(\gamma(t))^{-1/p_0}$,

$\beta_\infty \leq \alpha_0$. Тогда равенство (3) верно в том и только том случае, когда выполнено (4).

В частности, рассмотрим случай степенных весовых функций $w_0(x) = x^l$ и $w_1(x) = x^m$. Тогда условия (*) выполняются, если (а) $l > p_0 - 1$ и $m \leq 0$ или (б) $l > p_0 - 1$, $l > m$ и $0 \leq m < p_1 - 1$. Так как $k(t) \asymp t^{\theta_0}$, где $\theta_0 = \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1(l+1)-p_0(m+1)}$, то $\alpha = \beta = \alpha_0 = \beta_\infty = \theta_0$, и мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Предположим, что для p_0, p_1 ($1 \leq p_0 < p_1 < \infty$), l и m выполнено хотя бы одно из условий (а) и (б). Тогда равенство*

$$(L_{p_0}(x^l) \cap N, L_{p_1}(x^m) \cap N)_{\theta,q} = (L_{p_0}(x^l), L_{p_1}(x^m))_{\theta,q} \cap N$$

выполнено в том и только том случае, когда $\theta \neq \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1(l+1)-p_0(m+1)}$.

В случае $p_0 = p_1 = q$ последнее утверждение иным способом было доказано в [1, Corollary 1].

Автор благодарен проф. Л. Малигранда за полезные обсуждения некоторых вопросов, связанных с доказательством теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krugljak N., Maligranda L., Persson L.-E. Ark. Mat., **37**, 323–344 (1999).
2. Ivanov S., Kalton N. Алгебра и анализ, **13**, No. 2, 93–115 (2001).
3. Лионс Ж. Л., Маджenes Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Мир, М., 1971.
4. Triebel H. Math. Nachr., **69**, 57–60 (1975).
5. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, М., 1980.
6. Maligranda L. Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, **10**, 113–118 (1985).
7. Wallsten R. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1902, 1988, pp. 410–419.
8. Pisier G. Pacific J. Math., **155**, 341–368 (1992).
9. Janson S. Ark. Math., **31**, 307–338 (1993).
10. Кисляков С. В., Куанхуа Шу. Алгебра и анализ, **8**, вып. 4, 75–109 (1996).
11. Löfström J. Interpolation of subspaces, Technical report No. 10, Univ. of Göteborg, 1997.
12. Astashkin S. V. J. Math. Math. Sci., **25**, No. 7, 451–465 (2001).
13. Kaijser S., Sunehag P. Interpolation subspaces and the unit problem, In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics (Lund 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 345–353.
14. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
28 августа 2003 г.

УДК 517.44

Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+^*$

© 2005. Б. И. ГОЛУБОВ

1. В работе [1] Бутцер и Вагнер ввели сильную двоичную производную и интеграл порядка $r = 1, 2, \dots$ и доказали, что они являются взаимно обратными операторами. Их определения относятся к функциям $f \in L[0, 1)$ или $f \in L(G)$, где G — двоичная группа, изоморфная модифицированному отрезку $[0, 1]^*$.