

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫМ МЕТОДОМ

© С. В. АСТАШКИН

Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$) — пространства вещественного метода интерполяции, ψ — линейный функционал, определенный на некотором линейном пространстве $M \subset X_0 + X_1$, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$. Рассматриваются условия, при которых верно естественное равенство

$$(X_0 \cap \text{Ker} \psi, X_1 \cap \text{Ker} \psi)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap \text{Ker} \psi.$$

Полученные результаты позволяют решить задачу об интерполяции пар пересечений весовых L_p -пространств, порожденных интегральным функционалом, которая была поставлена в работе Н. Кругляка, Л. Малигранды и Л.-Е. Перссона.

Кроме того, найдено выражение для $\mathcal{K}$ -функционала на паре пересечений, порожденных линейным функционалом, и рассматриваются другие близкие вопросы.

Введение

Пусть (X_0, X_1) — нормированная пара, т. е. два нормированных пространства, линейно и непрерывно вложенных в отдельное линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Для $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$ -функционал Петре:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \}.$$

Если $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q < \infty$, то интерполяционное пространство вещественного метода $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$ таких, что

$$\|x\|_{\theta, q} = \left\{ \int_0^\infty (t^{-\theta} \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty.$$

Ключевые слова: интерполяционное пространство, интерполяция подпространств, вещественный метод интерполяции, $\mathcal{K}$ -функционал, индексы растяжения функции, пространства измеримых функций, весовые пространства.

Если теперь (X_0, X_1) — банахова пара, то любое линейное пространство $N \subset \mathcal{T}$ порождает нормированную (вообще говоря, не банахову) пару пересечений $(X_0 \cap N, X_1 \cap N)$, где норма в $X_i \cap N$ является просто сужением нормы пространства X_i ($i = 0, 1$).

Задача интерполяции пересечений для вещественного метода состоит в определении условий, при которых верно следующее естественное равенство (по составу элементов с эквивалентностью норм):

$$(X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap N. \quad (0.1)$$

Это так, например, если (X_0, X_1) — пара функциональных банаховых решеток, а N — линейное пространство функций (на одном и том же пространстве с мерой), обладающее решеточным свойством: если $g \in N$ и $|f| \leq |g|$, то $f \in N$ [1, Замечание 2]. В то же время, если в качестве (X_0, X_1) взять пару $(L_1[0, 1], L_\infty[0, 1])$, а в качестве N — замкнутую линейную оболочку $[r_n]$ системы функций Радемахера в $L_1[0, 1]$, то (0.1) не выполняется. Действительно, ввиду неравенства Хинчина $L_p \cap [r_n] \approx l_2$, если $1 \leq p < \infty$, и $L_\infty \cap [r_n] \approx l_1$. Поэтому, вычисляя интерполяционные пространства из (0.1) для произвольного $0 < \theta < 1$ и $q = \frac{1}{1-\theta}$ [2, теорема 5.2.1], мы получаем, что $(X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta, q} \approx l_q$, а $(X_0, X_1)_{\theta, q} \cap N \approx l_2$.

Здесь нас будет интересовать ситуация, когда N является ядром линейного функционала, определенного на некотором линейном пространстве $D \subset \mathcal{T}$. Важный частный случай такой задачи был рассмотрен в работе Н. Я. Кругляка, Л. Малигранды и Л.-Э. Перссона [1]. А именно там были найдены условия на $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty)$ и весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$, при которых

$$(L_p(w_0) \cap N, L_p(w_1) \cap N)_{\theta, p} = (L_p(w_0), L_p(w_1))_{\theta, p} \cap N, \quad (0.2)$$

где $L_p(w)$ — весовое L_p -пространство на $(0, \infty)$ с обычной нормой, а N — линейное пространство всех функций $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\int_0^\infty f(x) dx = 0. \quad (0.3)$$

При этом выяснилось, что выполнение равенства (0.2) тесно связано с возможностью „интерполяции” некоторых интегральных неравенств типа неравенства Харди. Там же была поставлена более общая задача: при каких условиях на $w_0(x)$, $w_1(x)$, $p_0, p_1 \in [1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$ имеет место равенство

$$(L_{p_0}(w_0) \cap N, L_{p_1}(w_1) \cap N)_{\theta, q} = (L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta, q} \cap N \quad (0.4)$$

(здесь, вообще говоря, $p_0 \neq p_1$, а пространство N определяется по-прежнему соотношением (0.3))?

Как известно [2, гл. 5], эквивалентные выражения для $\mathcal{K}$ -функционала на паре $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))$ в случаях $p_0 = p_1$ и $p_0 \neq p_1$ существенным образом различаются, и это обуславливает принципиально бо́льшую сложность последней задачи по сравнению с рассмотренной в [1]. Она и стала отправной точкой для постановки следующей общей проблемы.

Предположим, что (X_0, X_1) — банахова пара, где $X_i \subset \mathcal{T}$ ($i = 0, 1$), такая, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 . Кроме того, пусть ψ — линейный функционал, определенный на некотором линейном пространстве $D \subset \mathcal{T}$, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$ и $\psi(x) \neq 0$ для некоторых $x \in X_0 \cap X_1$. Мы покажем, что определяющую роль в вопросе о том, когда выполняется равенство

$$(X_0 \cap \text{Ker}\psi, X_1 \cap \text{Ker}\psi)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap \text{Ker}\psi, \quad (0.5)$$

играют четыре индекса α, β, α_0 и β_∞ , связанные с $\mathcal{K}$ -функционалом Петре $\mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$ в паре сопряженных пространств (X_0^*, X_1^*) и удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leq \alpha \leq \min(\alpha_0, \beta_\infty) \leq \max(\alpha_0, \beta_\infty) \leq \beta \leq 1.$$

Мы покажем, что при дополнительном условии $\beta_\infty \leq \alpha_0$ нормы интерполяционных пространств $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ и $N_{\theta, q} = (N_0, N_1)_{\theta, q}$ эквивалентны на $N := X_0 \cap X_1 \cap \text{Ker}\psi$ тогда и только тогда, когда $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1)$ (см. теорему 1). Здесь N_i — пространство N с нормой из X_i ($i = 0, 1$). Тем самым последнее условие необходимо для выполнения равенства (0.5). Кроме того, мы покажем, что в случае, если функционал ψ определен на $X_0 \cap X_1$, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то для каждого $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1)$ существует продолжение функционала ψ по непрерывности на некоторое пространство $\widetilde{M}_\theta \supset X_0 \cap X_1$ такое, что для ядра этого продолжения верно (0.5) (см. теорему 2).

В доказательстве теоремы 1 используется подход из работы С. А. Иванова и Н. Калтона [3], в первой части которой сравниваются интерполяционные пространства $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ и $(Y_0, X_1)_{\theta, q}$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty$), где $Y_0 = \text{Ker}\psi$, $\psi \in X_0^*$. Суть его состоит в сведении общей проблемы интерполяции подпространств к изучению оператора сдвига в некотором весовом l_p -пространстве последовательностей. В то же время результаты работы [3] являются следствием полученных здесь (см. следствие 3 и замечание 2).

Заметим, что задача об интерполяции пересечений, а также задача, рассматриваемая в [3], — важные (но все-таки частные) случаи общей проблемы интерполяции подпространств, сформулированной еще в монографии Ж.-Л. Лионса и Е. Мадженеса [4]. Ни в коей мере не претендуя на полноту, заметим, что различные частные аспекты ее рассматривались в работах [5–14].

Полученные в первой части работы результаты при определенных условиях позволяют решить вышеупомянутую задачу, поставленную в [1]. В этом случае N является ядром интегрального функционала $\psi(f) = \int_0^\infty f(x)dx$. Не вдаваясь в подробности, скажем только о том, что ответ существенно зависит от p_0 и p_1 и наиболее просто выглядит в случае степенных весовых функций $w_0(x)$ и $w_1(x)$. А именно (см. следствие 8), если $1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$ и выполнено хотя бы одно из условий (а) $l > p_0 - 1$ и $m \leq 0$ или (б) $l > p_0 - 1$, $l > m$ и $0 \leq m < p_1 - 1$, то равенство (0.4) при $w_0(x) = x^l$ и $w_1(x) = x^m$ выполнено тогда и только тогда, когда $\theta \neq \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1l-p_0m+p_1-p_0}$.

Для общих весовых функций ситуация иная. Так, показано (см. следствие 7), что для произвольных чисел $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ существуют весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ такие, что равенство (0.4) при $p_0 = p_1 = 1$ и $q \in [1, \infty)$ выполнено тогда и только тогда, когда $\theta \in (0, a) \cup (b, c) \cup (d, 1)$. Таким образом, значения параметра θ , при которых нарушается естественное интерполяционное равенство (0.1), могут заполнять один или два произвольных отрезка из $(0, 1)$ (ср. с [1, следствие 2, замечание 8]).

Разумеется, один из наиболее естественных подходов к решению проблемы интерполяции подпространств связан с вычислением $\mathcal{K}$ -функционала на их паре [1, 8, 12]. Последняя задача, на наш взгляд, представляющая интерес и сама по себе, рассматривается в §3. В теореме 3 найдено выражение для $\mathcal{K}(t, x; X_0 \cap N, X_1 \cap N)$ в предположении, что соответствующий функционал ψ определен на множестве $\{y_0(t) \in X_0 : y \in X_0 \cap N + X_1 \cap N, t > 0\}$, где $y_0(t)$ — первое слагаемое в оптимальном разложении $y = y_0(t) + y_1(t)$, $y_i(t) \in X_i$ ($i = 0, 1$), т. е. разложении, для которого

$$\frac{1}{2}(\|y_0(t)\|_{X_0} + t\|y_1(t)\|_{X_1}) \leq \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \|y_0(t)\|_{X_0} + t\|y_1(t)\|_{X_1} \quad (t > 0).$$

Заметим, что последнее условие выполнено в частном случае весовых L_p -пространств, рассмотренном в [1]. Поэтому доказанная здесь теорема обобщает соотношения для $\mathcal{K}$ -функционала $\mathcal{K}(t, f; L_p(w_0) \cap N, L_p(w_1) \cap N)$, полученные в этой работе на основе непосредственных вычислений. В заключение отметим, что аналогичный результат, но для пары (Y_0, X_1) , где $Y_0 = \text{Ker} \psi$, $\psi \in X_0^*$, был получен Р.Валлстеном [8] (см. также [12, теорема 2.1]).

Определения и обозначения. Пусть (X_0, X_1) — произвольная нормированная пара. Определение $\mathcal{K}$ -функционала Петре $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ ($x \in X_0 + X_1$, $t > 0$) и интерполяционных пространств вещественного метода $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$) было дано в самом начале работы. Анализ доказательства теоремы эквивалентности [2, §3.3] показывает, что она

справедлива не только для банаховых, но и для нормированных пар. Поэтому пространству $X_{\theta,q}$ можно дать и другое определение (с эквивалентной нормой), используя $\mathcal{J}$ -функционал

$$\mathcal{J}(t, x; X_0, X_1) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\} \quad (x \in X_0 \cap X_1).$$

А именно $X_{\theta,q}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, представимых в виде

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} x_k \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

с нормой

$$\inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{J}(2^k, x_k; X_0, X_1))^q \right\}^{1/q},$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям указанного вида.

Далее, всегда будет предполагаться, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 . Поэтому можно рассмотреть банахову пару сопряженных пространств (X_0^*, X_1^*) , и если $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то $\psi \in X_0^* + X_1^*$ [2, §3.7]. В дальнейшем важную роль будет играть функция $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$, для которой выполнено следующее соотношение [2, с. 74]:

$$k(t) = \sup\{|\psi(x)| : x \in X_0 \cap X_1, \mathcal{J}(t^{-1}, x; X_0, X_1) \leq 1\}. \quad (0.6)$$

Определим функции

$$M(t) = \sup_{s>0} \frac{k(ts)}{k(s)}, \quad M_0(t) = \sup_{0<s \leq \min(1, 1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)},$$

$$M_\infty(t) = \sup_{s \geq \max(1, 1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)},$$

которые полумультимпликативны при $t > 0$, а значит, существуют числа

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \quad \beta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t},$$

$$\alpha_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \quad \beta_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

называемые индексами растяжения функции $k(t)$. Легко видеть, что

$$0 \leq \alpha \leq \min(\alpha_0, \beta_\infty) \leq \max(\alpha_0, \beta_\infty) \leq \beta \leq 1.$$

Если теперь $\mu_n = (k(2^{-n}))^{-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$), то $\mu_n > 0$ и, так как $k(t)$ — возрастающая вогнутая на $(0, \infty)$ функция, то

$$\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq 2\mu_n \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (0.7)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\alpha &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{n+k}}, & \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}}, \\ \alpha_0 &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{n+k}}, & \beta_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k \leq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}}.\end{aligned}\quad (0.8)$$

Пусть e_k ($k \in \mathbb{Z}$) — стандартные орты в пространстве числовых последовательностей, а $l_q(\mu)$ — пространство двусторонних числовых последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^\infty$ с нормой

$$\|a\|_{q,\mu} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^q \mu_k^q \right\}^{1/q}.$$

Далее нас будут интересовать оператор сдвига $S(a_k) = (a_{k-1})$, обратный к нему S^{-1} , а также операторы $T_\theta = S - 2^\theta I$ ($0 < \theta < 1$), где I — тождественное отображение. Ввиду (0.7) S и S^{-1} ограничены в пространстве $l_q(\mu)$ и $\|S\| \leq 2$, $\|S^{-1}\| \leq 1$. Кроме того, через P_+ и P_- будут обозначаться проекторы

$$P_+(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad P_-(a_k) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k e_k,$$

а через $r(T)$ — спектральный радиус оператора T в пространстве $l_q(\mu)$.

Наконец, выражение вида $F_1 \asymp F_2$ означает, что для некоторых $c > 0$ и $C > 0$ верны оценки $cF_1 \leq F_2 \leq CF_1$, причем константы c и C , как правило, не зависят от всех или части аргументов функций F_1 и F_2 .

§1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Справедливы равенства $r(S) = 2^\beta$, $r(S^{-1}) = 2^{-\alpha}$, $r(SP_-) = 2^{\beta_\infty}$ и $r(S^{-1}P_+) = 2^{-\alpha_0}$.*

Доказательство. Так как $S^n(a_k) = (a_{k-n})$, а $S^{-n}(a_k) = (a_{k+n})$, то

$$\|S^n\|_{l_q(\mu) \rightarrow l_q(\mu)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}}, \quad \|S^{-n}\|_{l_q(\mu) \rightarrow l_q(\mu)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{k+n}}.$$

Поэтому, учитывая (0.8), получаем

$$\begin{aligned}r(S) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}} \right)^{1/n} = 2^\beta, \\ r(S^{-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{k+n}} \right)^{1/n} = 2^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$(SP_-)^n(a_k) = \sum_{k=-n}^{-\infty} a_k e_{k+n}, \quad (S^{-1}P_+)^n(a_k) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k e_{k-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и, значит,

$$\|(SP_-)^n\|_{l_q(\mu) \rightarrow l_q(\mu)} = \sup_{k \leq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}}, \quad \|(S^{-1}P_+)^n\|_{l_q(\mu) \rightarrow l_q(\mu)} = \sup_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k+n}}.$$

Таким образом,

$$r(SP_-) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \leq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}} \right)^{1/n} = 2^{\beta_\infty},$$

$$r(S^{-1}P_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k+n}} \right)^{1/n} = 2^{-\alpha_0}. \quad \bullet$$

Следующее ключевое утверждение о свойствах оператора $T_\theta = S - 2^\theta I$, где I — тождественный оператор, аналогично лемме 2.2 из [3]. Отметим, однако, одно существенное различие. В [3] $\psi \in X_0^*$ и, значит, $\inf_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n > 0$. Отсюда вытекает инъективность оператора T_θ для любого $\theta \in (0, 1)$. В нашей более общей ситуации, когда $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, оператор T_θ инъективен не всегда, так как $\inf_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n$ может равняться 0.

Лемма 2. Пусть $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q < \infty$. Тогда оператор T_θ осуществляет изоморфное вложение $l_q(\mu)$ в $l_q(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1)$.

При этом, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то образ $\text{Im} T_\theta$ совпадает с $l_q(\mu)$; если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $\text{Im} T_\theta$ является замкнутым подпространством ко-размерности 1 в $l_q(\mu)$, состоящим из всех $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_q(\mu)$ таких, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\theta} a_k = 0. \quad (1.1)$$

Доказательство. Прежде всего, если $\theta \in (\beta, 1)$, то по лемме 1 мы имеем $2^\theta > r(S)$, и, значит, T_θ — изоморфизм пространства $l_q(\mu)$ на $l_q(\mu)$. То же самое мы получаем и в случае $\theta \in (0, \alpha)$, так как опять по лемме 1 верна оценка $r(S^{-1}) < 2^{-\theta}$, а

$$T_\theta = 2^\theta S(2^{-\theta} I - S^{-1}). \quad (1.2)$$

Покажем, что ни T_β , ни T_α не является изоморфизмом пространства $l_q(\mu)$ на $l_q(\mu)$. Действительно, для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ операторы $Q_\lambda(a_i) = (\lambda^i a_i)$ и $Q'_\lambda(a_i) = (\lambda^{i+1} a_i)$ — изометрии пространства $l_q(\mu)$. Поэтому так как $S - \lambda 2^\beta I = Q_\lambda^{-1} T_\beta Q'_\lambda$, то вместе с T_β изоморфизмом на $l_q(\mu)$ будет и оператор $S - \lambda 2^\beta I$ (для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$). Но это противоречит

тому, что $r(S) = 2^\beta$. Если же предположить, что T_α — изоморфизм на все $l_q(\mu)$, то из (1.2) при $\theta = \alpha$ и равенства $S^{-1} - \lambda 2^{-\alpha} I = Q'_\lambda(S^{-1} - 2^{-\alpha} I)Q_\lambda^{-1}$ следует, что этим свойством обладает и оператор $S^{-1} - \lambda 2^{-\alpha} I$. Последнее противоречит тому, что $r(S^{-1}) = 2^{-\alpha}$.

Проанализируем теперь, каким может быть $\text{Im} T_\theta$. Так как

$$T_\theta \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{(n-1-i)\theta} e_i \right) = e_n - 2^{\theta n} e_0,$$

то $e_n - 2^{\theta n} e_0 \in \text{Im} T_\theta$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Пусть f_θ — линейный функционал такой, что $f_\theta(b) = 0$ для всех $b \in \text{Im} T_\theta$. Тогда $f_\theta(e_n) = 2^{\theta n} C$. Таким образом, можно считать, что функционал f_θ задается последовательностью $(2^{\theta n})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Ясно, что условие $f_\theta \in l_q(\mu)^*$ эквивалентно тому, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kq'\theta} \mu_k^{-q'} < \infty, \quad \text{где} \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.3)$$

(если $q' = \infty$, то последнее неравенство естественным образом модифицируется). Если функционал f_θ ограничен, то легко видеть, что ввиду теоремы Хана–Банаха и предыдущих рассуждений имеем

$$\overline{\text{Im} T_\theta} = \text{Ker} f_\theta. \quad (1.4)$$

С другой стороны, в случае $f_\theta \notin l_q(\mu)^*$ имеем

$$\overline{\text{Im} T_\theta} = l_q(\mu). \quad (1.5)$$

Покажем, что в случае, когда $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, функционал f_θ ограничен и образ $\text{Im} T_\theta$ замкнут. Пусть $\beta_\infty + \varepsilon < \theta < \alpha_0 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду (0.8) справедливы неравенства

$$\sup_{k \geq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k+n}} \leq C_1 2^{-n(\alpha_0 - \varepsilon)}, \quad \sup_{k \leq 0} \frac{\mu_k}{\mu_{k-n}} \leq C_2 2^{n(\beta_\infty + \varepsilon)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откуда

$$\mu_n^{-1} \leq \mu_0^{-1} C_1 2^{-n(\alpha_0 - \varepsilon)}, \quad \mu_{-n}^{-1} \leq \mu_0^{-1} C_2 2^{n(\beta_\infty + \varepsilon)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

Поэтому

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{n\theta} \mu_n^{-1} \leq \mu_0^{-1} C_1 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\theta - \alpha_0 + \varepsilon)} + \mu_0^{-1} C_2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\theta - \beta_\infty - \varepsilon)} < \infty,$$

т. е. условие (1.3) выполнено для любого $1 \leq q < \infty$, и, значит, $f_\theta \in l_q(\mu)^*$. Чтобы доказать замкнутость образа $\text{Im} T_\theta$, представим $l_q(\mu)$ в следующем виде:

$$l_q(\mu) = E_- + E_0 + E_+,$$

где $E_- = [\{e_n\}_{n \leq -1}]_{q,\mu}$, $E_0 = [\{e_0\}]_{q,\mu}$ и $E_+ = [\{e_n\}_{n \geq 1}]_{q,\mu}$ ($[F]_{q,\mu}$ — замкнутая линейная оболочка множества F в пространстве $l_q(\mu)$). Так как

$$\text{Im} T_\theta = T_\theta(E_-) + T_\theta(E_0) + T_\theta(E_+),$$

$T_\theta(E_-) \cap T_\theta(E_+) = \{0\}$ и пространство $T_\theta(E_0)$ одномерно, то достаточно доказать замкнутость множеств $T_\theta(E_-)$ и $T_\theta(E_+)$.

Так как $\beta_\infty < \theta < \alpha_0$ и по лемме 1 $r(SP_-) = 2^{\beta_\infty}$ и $r(S^{-1}P_+) = 2^{-\alpha_0}$, то операторы $SP_- - 2^\theta I$ и $S^{-1}P_+ - 2^{-\theta}I$ отображают $l_q(\mu)$ на $l_q(\mu)$ изоморфно. Значит, ввиду замкнутости множества E_- множество $T_\theta(E_-) = (SP_- - 2^\theta I)(E_-)$ тоже замкнуто. Аналогично, так как S — изоморфизм пространства $l_q(\mu)$ и $T_\theta(E_+) = -2^\theta S(S^{-1}P_+ - 2^{-\theta}I)(E_+)$, то и $T_\theta(E_+)$ множество замкнуто.

Кроме того, нетрудно показать, что при условии $\theta \in (0, \alpha_0) \cup (\beta_\infty, 1)$ оператор T_θ инъективен. Действительно, равенство $T_\theta a = 0$ означает, что $a_{n-1} = 2^\theta a_n$, или $a_n = 2^{-n\theta} a_0$ ($n \in \mathbb{Z}$). Так как $a \in l_q(\mu)$, то должно выполняться

$$|a_0|^q \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-kq\theta} \mu_k^q < \infty. \quad (1.7)$$

Ввиду условия относительно θ для любого $\varepsilon > 0$ выполнено хотя бы одно из неравенств (1.6). Отсюда, если ε достаточно мало, сразу следует, что (1.7) возможно лишь в случае, когда $a_0 = 0$, т. е. $a = 0$.

Таким образом, в случае $\beta_\infty < \theta < \alpha_0$ оператор T_θ изоморфно отображает $l_q(\mu)$ на подпространство коразмерности 1, состоящее из всех $(a_k) \in l_q(\mu)$ таких, что выполнено (1.1).

Предположим далее, что $\theta \notin (0, \alpha] \cup [\beta, 1)$ и $T_\theta : l_q(\mu) \rightarrow \text{Im} T_\theta$ — изоморфизм. Тогда для некоторого $c > 0$ и всех $a \in l_q(\mu)$ справедливо неравенство

$$\|T_\theta a\|_{l_q(\mu)} \geq c \|a\|_{l_q(\mu)}. \quad (1.8)$$

Для пока произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$ определим $a = (I + 2^{-\theta}S + \dots + 2^{-n\theta}S^n)^2 e_k$. Непосредственные вычисления показывают, что $a \geq n 2^{-n\theta} e_{k+n}$, и поэтому

$$\|a\|_{l_q(\mu)} \geq n 2^{-n\theta} \mu_{k+n}. \quad (1.9)$$

Оценим сверху величину $\|T_\theta^2 a\|_{l_q(\mu)}$. Прежде всего,

$$\begin{aligned} & T_\theta^2 (I + 2^{-\theta}S + \dots + 2^{-n\theta}S^n)^2 \\ &= 2^\theta (S - 2^\theta I)(2^{-(n+1)\theta}S^{n+1} - I)(I + 2^{-\theta}S + \dots + 2^{-n\theta}S^n) \\ &= 2^{2\theta}I - 2^{1-(n-1)\theta}S^{n+1} + 2^{-2n\theta}S^{2n+2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T_\theta^2 a = 2^{2\theta} e_k - 2^{1-(n-1)\theta} e_{n+k+1} + 2^{-2n\theta} e_{2n+k+2},$$

и ввиду неравенств (0.7)

$$\begin{aligned} \|T_{\theta}^2 a\|_{l_q(\mu)} &= (2^{2\theta} \mu_k^q - 2^q 2^{-(n-1)q\theta} \mu_{n+k+1}^q + 2^{-2qn\theta} \mu_{2n+k+2}^q)^{1/q} \\ &\leq 4\mu_k + 8 \cdot 2^{-n\theta} \mu_{n+k} + 4 \cdot 2^{-2n\theta} \mu_{2n+k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|T_{\theta}^2 a\|_{l_q(\mu)} - 8 \cdot 2^{-n\theta} \mu_{n+k} \leq 4(\mu_k + 2^{-2n\theta} \mu_{2n+k}) \leq 8 \max(\mu_k, 2^{-2n\theta} \mu_{2n+k}).$$

Выберем теперь $n \in \mathbb{N}$ так, что $nc^2 > 16$. Тогда из (1.8) и (1.9) следует

$$\|T_{\theta}^2 a\|_{l_q(\mu)} \geq c^2 n 2^{-n\theta} \mu_{n+k},$$

и, значит,

$$2^{-n\theta} \mu_{n+k} < \max(\mu_k, 2^{-2n\theta} \mu_{2n+k})$$

или, эквивалентным образом, для $\nu_n = 2^{-n\theta} \mu_n$

$$\nu_{n+k} < \max(\nu_k, \nu_{2n+k}) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (1.10)$$

Так как по условию $\theta < \beta$, то для выбранного $n \in \mathbb{N}$ существует число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mu_{n+k} > 2^{n\theta} \mu_k$, т. е. $\nu_{k+n} > \nu_k$. Поэтому из (1.10) получаем $\nu_{k+2n} > \nu_{k+n}$. Если в (1.10) вместо k взять $k+n$, то точно такие же рассуждения дают $\nu_{k+3n} > \nu_{k+2n}$ и т. д. Тем самым последовательность $(\nu_{k+rn})_{r=0}^{\infty}$ монотонно возрастает.

Пусть $j \geq k$ и $m \geq n$. Найдём $0 \leq r_1 \leq r_2$ такие, что

$$k + (r_1 - 1)n \leq j \leq k + r_1 n, \quad k + r_2 n \leq j + m \leq k + (r_2 + 1)n.$$

Тогда

$$\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j} \geq \frac{\mu_{k+r_2 n}}{\mu_{k+r_1 n}} = \frac{2^{r_2 n \theta} \nu_{k+r_2 n}}{2^{r_1 n \theta} \nu_{k+r_1 n}} \geq 2^{n(r_2 - r_1)\theta}.$$

Поэтому, используя то, что $m - 2n \leq (r_2 - r_1)n$, получим

$$\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j} \geq 2^{(m-2n)\theta} \quad (j \geq k, \quad m \geq n)$$

или

$$\sup_{j \geq k} \frac{\mu_j}{\mu_{j+m}} \leq C 2^{-m\theta} \quad (m \geq n).$$

Так как ввиду неравенств (0.7) в случае $k > 0$ и $0 \leq j \leq k$ имеем

$$\frac{\mu_j}{\mu_{j+m}} \leq \frac{\mu_k}{\mu_{k+m}} \frac{\mu_{k+m}}{\mu_{j+m}} \leq 2^k \frac{\mu_k}{\mu_{k+m}},$$

то отсюда следует

$$\sup_{j \geq 0} \frac{\mu_j}{\mu_{j+m}} \leq C' 2^{-m\theta} \quad (m \geq n).$$

Учитывая (0.8), в итоге получаем

$$\theta \leq \alpha_0. \quad (1.11)$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\theta \geq \beta_\infty. \quad (1.12)$$

Для $b = (I + 2^{-\theta}S + \dots + 2^{-n\theta}S^n)^2 e_{k-2n}$ выполнено

$$\|b\|_{l_q(\mu)} \geq n 2^{-n\theta} \mu_{k-n}. \quad (1.13)$$

Так как

$$T_\theta^2 b = 2^{2\theta} e_{k-2n} - 2^{1-(n-1)\theta} e_{k-n+1} + 2^{-2n\theta} e_{k+2},$$

то, согласно (0.7),

$$\begin{aligned} \|T_\theta^2 b\|_{l_q(\mu)} &\leq 2^{2\theta} \mu_{k-2n} + 4 \cdot 2^{-n\theta} \mu_{k-n+1} + 2^{-2n\theta} \mu_{k+2} \\ &\leq 4\mu_{k-2n} + 8 \cdot 2^{-n\theta} \mu_{k-n} + 4 \cdot 2^{-2n\theta} \mu_k. \end{aligned}$$

Если опять $nc^2 > 16$, то ввиду (1.8) и (1.13) получаем

$$2^{-n\theta} \mu_{k-n} < \max(\mu_{k-2n}, 2^{-2n\theta} \mu_k)$$

или

$$\nu_{k-n} < \max(\nu_k, \nu_{k-2n}) \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1.14)$$

где по-прежнему $\nu_n = 2^{-n\theta} \mu_n$. В случае $\theta > \alpha$ для выбранного $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mu_{k-n} > 2^{-n\theta} \mu_k$. Тем самым $\nu_k < \nu_{k-n}$. Применяя (1.14), получаем, что $\nu_{k-n} < \nu_{k-2n}$. Повторяя эти рассуждения, получаем, что последовательность $(\nu_{k-rn})_{r=0}^\infty$ монотонно возрастает.

Если $j \geq -k$ и $m \geq n$, то существуют $0 \leq r_1 \leq r_2$ такие, что

$$k - (r_1 + 1)n \leq -j \leq k - r_1 n, \quad k - r_2 n \leq -j - m \leq k - (r_2 - 1)n.$$

Тогда

$$\frac{\mu_{-j}}{\mu_{-m-j}} \leq \frac{\mu_{k-r_1 n}}{\mu_{k-r_2 n}} = \frac{2^{-r_1 n \theta} \nu_{k-r_1 n}}{2^{-r_2 n \theta} \nu_{k-r_2 n}} \leq 2^{n(r_2 - r_1)\theta},$$

и так как $(r_2 - r_1)n \leq m + 2n$, то

$$\sup_{j \geq -k} \frac{\mu_{-j}}{\mu_{-j-m}} \leq C 2^{m\theta} \quad (m \geq n),$$

откуда, как и ранее, легко получить, что

$$\sup_{j \geq 0} \frac{\mu_{-j}}{\mu_{-j-m}} \leq C' 2^{m\theta} \quad (m \geq n).$$

Из последнего неравенства и (0.8) вытекает (1.12).

Подведем итоги. Если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1)$, то оператор $T_\theta : l_q(\mu) \rightarrow \text{Im} T_\theta$ является изоморфизмом, а если $\theta \in (\alpha, \beta_\infty) \cup (\alpha_0, \beta)$, то ввиду (1.11) и (1.12) не является таковым. Кроме того, при $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$ оператор T_θ — фредгольмов с индексом 0, а при $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$ — с индексом -1. Так как множество всех фредгольмовых операторов с фиксированным индексом

открыто и при $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$ оператор T_θ не является изоморфизмом на все $l_q(\mu)$, то ввиду равенств (1.4) и (1.5) лемма доказана. •

Замечание 1. Из леммы 2 и ее доказательства следует, что при условии $\beta_\infty \leq \alpha_0$ оператор T_θ осуществляет изоморфное вложение пространства $l_q(\mu)$ в $l_q(\mu)$ тогда и только тогда, когда он замкнут. Действительно, ввиду инъективности оператора T_θ при $\theta \in (0, \alpha_0) \cup (\beta_\infty, 1)$ достаточно рассмотреть случай $\beta_\infty = \alpha_0$ и проверить, что оператор T_{α_0} не может быть одновременно замкнутым и не инъективным в $l_q(\mu)$. Если предположить противное, то T_θ является оператором Фредгольма с постоянным индексом в некоторой малой окрестности α_0 , а значит, ввиду инъективности при $\theta \neq \alpha_0$, он является изоморфным вложением пространства $l_q(\mu)$ в $l_q(\mu)$. При этом его индекс может быть равен лишь нулю, т. е. $T_\theta(l_q(\mu)) = l_q(\mu)$. В частности, индекс оператора T_{α_0} равен тоже нулю, откуда $T_{\alpha_0}(l_q(\mu))$ является замкнутым подпространством коразмерности 1 в $l_q(\mu)$. Но тогда получаем (1.3), и, значит, (1.7) может быть выполнено лишь при $a = 0$, т. е. T_{α_0} инъективен, что противоречит предположению.

Следующее простое утверждение фактически содержится в [15, лемма 3.2]. Однако мы приведем его здесь для полноты изложения.

Лемма 3. Для произвольной банаховой пары (Y_0, Y_1) , всех $y \in Y_0 + Y_1$ и $t \in (0, 1]$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{4}\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \leq \mathcal{K}(t, y; Y_0 + Y_1, Y_1) \leq \mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1).$$

Доказательство. Достаточно доказать левую часть неравенства. По определению $\mathcal{K}$ -функционала для каждого $t \in (0, 1]$ найдем представление $y = u^t + v^t$ такое, что $u^t \in Y_0 + Y_1$, $v^t \in Y_1$ и

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0 + Y_1, Y_1) \geq \frac{1}{2}(\|u^t\|_{Y_0+Y_1} + t\|v^t\|_{Y_1}).$$

По аналогичной причине $u^t = u_0^t + u_1^t$, $u_0^t \in Y_0$, $u_1^t \in Y_1$ и

$$\|u^t\|_{Y_0+Y_1} \geq \frac{1}{2}(\|u_0^t\|_{Y_0} + \|u_1^t\|_{Y_1}).$$

Из двух последних неравенств и того, что $t \leq 1$, следует

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, y; Y_0 + Y_1, Y_1) \\ & \geq \frac{1}{4}(\|u_0^t\|_{Y_0} + t\|u_1^t + v^t\|_{Y_1}) \geq \frac{1}{4}\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1). \quad \bullet \end{aligned}$$

Лемма 4. Для любой банаховой пары (X_0, X_1) и произвольных $0 < \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$ верны равенства

$$(X_0 \cap X_1, X_1)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_1 \quad (1.15)$$

и

$$(X_0, X_0 \cap X_1)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_0. \quad (1.16)$$

Доказательство. Так как $(A_0, A_1)_{\theta, q} = (A_1, A_0)_{1-\theta, q}$, то достаточно доказать соотношение (1.15). Вложение

$$(X_0 \cap X_1, X_1)_{\theta, q} \subset (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_1$$

очевидно. Поэтому лемма будет доказана, если мы покажем, что для всех $x \in X_1$ и $t > 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{K}(t, x; X_0 \cap X_1, X_1) \leq 2(\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) + \min(1, t)\|x\|_{X_1}). \quad (1.17)$$

Если $0 < t \leq 1$, то $\mathcal{K}(t, x; X_0 \cap X_1, X_1) = t\|x\|_{X_1}$, и тем самым (1.17) выполнено. Пусть теперь $t > 1$. Для $x \in X_1$ и $\varepsilon > 0$ найдем разложение $x = x_0 + x_1$, $x_i \in X_i$ ($i = 0, 1$) такое, что

$$\mathcal{K}(2t, x; X_0, X_1) \geq (1 - \varepsilon)(\|x_0\|_{X_0} + 2t\|x_1\|_{X_1}).$$

Тогда $x_0 \in X_0 \cap X_1$, и поэтому ввиду предыдущего неравенства и вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала по t получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, x; X_0 \cap X_1, X_1) &\leq \max(\|x_0\|_{X_0}, \|x_0\|_{X_1}) + t\|x_1\|_{X_1} \\ &\leq \|x_0\|_{X_0} + (t + 1)\|x_1\|_{X_1} + \|x\|_{X_1} \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{-1}\mathcal{K}(2t, x; X_0, X_1) + \|x\|_{X_1} \\ &\leq \frac{2}{1 - \varepsilon}(\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) + \|x\|_{X_1}), \end{aligned}$$

откуда из-за произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает оценка (1.17). •

Заметим, что утверждение, близкое к только что доказанному, было получено в [7].

§2. Вещественный метод интерполяции на парах пересечений

Всюду далее (X_0, X_1) — банахова пара такая, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$). Пусть ψ — линейный функционал, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$, α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi, X_0^*, X_1^*)$.

Обозначим $N = \text{Ker}\psi$, $N_{\theta,q} = (N_0, N_1)_{\theta,q}$, где N_i — пространство N , рассматриваемое с нормой из X_i ($i = 0, 1$). Ясно, что $N_{\theta,q} \subset X_{\theta,q}$ и $\|x\|_{X_{\theta,q}} \leq \|x\|_{N_{\theta,q}}$ ($x \in N_{\theta,q}$).

Теорема 1. *Если*

$$\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1), \quad (2.1)$$

то нормы интерполяционных пространств $N_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q}$ эквивалентны на N . При условии $\beta_\infty \leq \alpha_0$ верно и обратное утверждение: если нормы пространств $N_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q}$ эквивалентны на N , то выполнено условие (2.1).

Кроме того, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то $N_{\theta,q}$ всюду плотно в $X_{\theta,q}$; если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $N_{\theta,q}$ всюду плотно в некотором подпространстве коразмерности 1 пространства $X_{\theta,q}$.

Доказательство. Пусть сначала выполнено условие (2.1). Прежде всего, используя ранее введенные обозначения, заключаем, что по лемме 2

$$\|a\|_{l_q(\mu)} \leq B \|T_\theta a\|_{l_q(\mu)} \quad (a \in l_q(\mu)) \quad (2.2)$$

для некоторого $B > 0$. Кроме того, если а) $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то $\text{Im} T_\theta = l_q(\mu)$, а если б) $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $\text{Im} T_\theta = \text{Ker} f_\theta$, где функционал $f_\theta \in l_q(\mu)^*$ определяется равенством

$$f_\theta(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{n\theta} a_n \quad (a = (a_n) \in l_q(\mu)).$$

Так как в случае б) выполнено условие (1.3), т. е.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kq'\theta} \mathcal{K}(2^{-k}, \psi)^{q'} = C_0^{q'} < \infty, \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$$

(здесь и далее $\mathcal{K}(t, \psi) := \mathcal{K}(t, \psi, X_0^*, X_1^*)$, а $\mathcal{J}(t, x) := \mathcal{J}(t, x, X_0, X_1)$), то ψ можно продолжить по непрерывности до функционала $\tilde{\psi} \in X_{\theta,q}^*$ [16, теорема 3.7.2].

Пусть теперь $x \in X_{\theta,q}$, $\|x\|_{X_{\theta,q}} = 1$. Тогда существует последовательность $\{x_k\} \subset X_0 \cap X_1$ такая, что

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\theta} x_k, \quad \|(\mathcal{J}(2^k, x_k))_k\|_q \leq 2. \quad (2.3)$$

Так как по условию $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то ввиду равенства (0.6)

$$|\psi(x_k)| \leq \mathcal{K}(2^{-k}, \psi) \mathcal{J}(2^k, x_k) = \mu_k^{-1} \mathcal{J}(2^k, x_k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Поэтому из (2.3) следует, что

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(x_k)|^q \mu_k^q \right)^{1/q} \leq \|(\mathcal{J}(2^k, x_k))_k\|_q \leq 2, \quad (2.4)$$

т. е. $(\psi(x_k)) \in l_q(\mu)$.

В случае б) мы дополнительно предположим, что $x \in \text{Ker} \tilde{\psi}$. Тогда, так как ряд из (2.3) сходится в $X_{\theta, q}$, а $\tilde{\psi} \in X_{\theta, q}^*$, то $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} \psi(x_k) = 0$. Таким образом, по лемме 2 в обоих случаях — и а), и б) — мы получаем, что $(\psi(x_k)) \in \text{Im} T_\theta$. Поэтому существует последовательность $a \in l_q(\mu)$ такая, что $T_\theta a = (\psi(x_k))$, причем $\|a\|_{l_q(\mu)} \leq 2B$ ввиду неравенств (2.2) и (2.4).

Опять используя (0.6), найдем последовательность $\{u'_n\} \in X_0 \cap X_1$ такую, что $\mathcal{J}(2^n, u'_n) \leq 2$ и $\psi(u'_n) = \mu_n^{-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тогда если $u_n = a_n \mu_n u'_n$, то $u_n \in X_0 \cap X_1$, $\mathcal{J}(2^n, u_n) \leq 2|a_n| \mu_n$ и $\psi(u_n) = a_n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Поэтому

$$\|(\mathcal{J}(2^n, u_n))_n\|_q \leq 2\|a\|_{l_q(\mu)} \leq 4B. \quad (2.5)$$

Отсюда, в частности, сразу следует, что ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} u_k$ сходится в $X_0 + X_1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \geq N} 2^{\theta n} u_n \right\|_{X_1} &\leq \sum_{n \geq N} 2^{(\theta-1)n} 2^n \|u_n\|_{X_1} \\ &\leq \left(\sum_{n \geq N} (2^n \|u_n\|_{X_1})^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n \geq N} 2^{n(\theta-1)q'} \right)^{1/q'} \\ &\leq C \left(\sum_{n \geq N} (\mathcal{J}(2^n, u_n))^q \right)^{1/q} \rightarrow 0, \quad \text{если } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \leq -N} 2^{\theta n} u_n \right\|_{X_0} &\leq \sum_{n \leq -N} 2^{\theta n} \|u_n\|_{X_0} \\ &\leq C' \left(\sum_{n \leq -N} (\mathcal{J}(2^n, u_n))^q \right)^{1/q} \rightarrow 0, \quad \text{если } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому если $v_n = u_{n-1} - 2^\theta u_n$, то $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} v_k = 0$, откуда ввиду (2.3) получаем

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} y_k, \quad (2.6)$$

где $y_k = x_k - v_k$. При этом

$$\psi(y_k) = \psi(x_k) - \psi(u_{k-1}) + 2^\theta \psi(u_k) = (T_\theta a)_k - a_{k-1} + 2^\theta a_k = 0,$$

т. е. $y_k \in N$ ($k \in \mathbb{Z}$). Так как ряд (2.6) сходится в $X_{\theta,q}$, то вторая часть теоремы доказана.

Далее, используя (2.3) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{J}(2^n, y_n))_n\|_q &\leq \|(\mathcal{J}(2^n, x_n))_n\|_q + \|(\mathcal{J}(2^n, v_n))_n\|_q \\ &\leq 2 + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\max(\|u_{k-1}\|_{X_0}, 2^k \|u_{k-1}\|_{X_1})^q \right)^{1/q} \\ &\quad + 2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\max(\|u_k\|_{X_0}, 2^k \|u_k\|_{X_1})^q \right)^{1/q} \leq 2 + 16B. \end{aligned}$$

Поэтому если предположить, что $x \in N$, то из (2.6) следует, что $\|x\|_{N_{\theta,q}} \leq 16B + 2$. Таким образом, при условии (2.1) нормы пространств $X_{\theta,q}$ и $N_{\theta,q}$ эквивалентны на N .

Докажем обратное в предположении, что $\beta_\infty \leq \alpha_0$. По условию существует число $D > 0$ такое, что

$$\|x\|_{N_{\theta,q}} \leq D \|x\|_{X_{\theta,q}} \quad (2.7)$$

для всех $x \in N$. Ввиду леммы 2 достаточно показать, что оператор $T_\theta : l_q(\mu) \rightarrow \text{Im} T_\theta$, где $T_\theta = S - 2^\theta I$, является изоморфизмом.

Опять будем разделять два случая: а) функционал ψ не ограничен на $X_0 \cap X_1$ относительно нормы $X_{\theta,q}$; б) функционал ψ ограничен на $X_0 \cap X_1$ относительно нормы $X_{\theta,q}$. Во втором случае через $\tilde{\psi} \in X_{\theta,q}^*$ обозначим продолжение функционала ψ .

Итак, пусть $a = (a_n) \in l_q(\mu)$, $\|a\|_{l_q(\mu)} \leq 1$. Как и ранее, существует последовательность $\{x_n\} \subset X_0 \cap X_1$ ($n \in \mathbb{Z}$) такая, что

$$\mathcal{J}(2^n, x_n) \leq 2|a_n|\mu_n, \quad \psi(x_n) = a_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Отсюда

$$\|(\mathcal{J}(2^n, x_n))_n\|_q \leq 2\|a\|_{l_q(\mu)} \leq 2,$$

и, значит, ряд

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} x_k \quad (2.8)$$

сходится в $X_0 + X_1$, $x \in X_{\theta,q}$ и $\|x\|_{X_{\theta,q}} \leq 2$. При этом в случае б) $|\tilde{\psi}(x)| \leq C\|x\|_{X_{\theta,q}} \leq 2C$. Так как ряд (2.8) сходится и по норме $X_{\theta,q}$, то тогда

$$|f_\theta(a)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} a_k \right| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\theta k} \psi(x_k) \right| = |\tilde{\psi}(x)| \leq 2C$$

для любого $a \in l_q(\mu)$, $\|a\|_{l_q(\mu)} \leq 1$, т. е. $f_\theta \in l_q(\mu)^*$. В случае б) далее будем предполагать, что $f_\theta(a) = 0$. Поэтому по доказанному в этом случае $\tilde{\psi}(x) = f_\theta(a) = 0$, т. е. $x \in X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$, где $\tilde{N} := \text{Ker} \tilde{\psi}$.

Следующее утверждение, где $Z_{\theta,q}$ — замыкание множества N в $X_{\theta,q}$, сформулируем в виде леммы.

Лемма 5. В случае а) верно равенство $Z_{\theta,q} = X_{\theta,q}$, а в случае б) — равенство $Z_{\theta,q} = X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$.

Доказательство. Если функционал ψ не ограничен на $X_0 \cap X_1$ относительно нормы $X_{\theta,q}$, то N всюду плотно в $X_0 \cap X_1$, а значит, и в $X_{\theta,q}$ (относительно той же нормы) [2, теорема 3.4.2]. Поэтому $Z_{\theta,q} = X_{\theta,q}$.

В случае б) если $x \in Z_{\theta,q}$, то $\tilde{\psi}(x) = 0$, и, значит, $Z_{\theta,q} \subset X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$. Для доказательства обратного вложения возьмем вектор $x \in X_{\theta,q}$, для которого $\tilde{\psi}(x) = 0$. Найдется последовательность $\{x_n\} \subset X_0 \cap X_1$ такая, что $x_n \rightarrow x$ в $X_{\theta,q}$. Так как $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то $x_n = y_n + \lambda_n z$, где $y_n \in N$, $z \in X_0 \cap X_1$, $\psi(z) = 1$, а $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Тогда $\psi(x_n) = \lambda_n \psi(z) = \lambda_n \rightarrow \tilde{\psi}(x) = 0$. Поэтому $y_n \rightarrow x$ в $X_{\theta,q}$, откуда $x \in Z_{\theta,q}$. •

Продолжим доказательство теоремы. Напомним, что вектор x , определенный соотношением (2.8), где $\psi(x_k) = a_k$, принадлежит пространству $X_{\theta,q}$ в случае а) и пространству $X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$ в случае б). В обоих случаях по лемме 5 найдется последовательность $\{z_n\} \subset N$ такая, что

$$z_n \rightarrow x \text{ в } X_{\theta,q}, \quad \|z_{n+1} - z_n\|_{X_{\theta,q}} \leq 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

Отсюда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (z_{n+1} - z_n) \quad (z_0 = 0), \quad (2.10)$$

причем ряд сходится абсолютно в $X_{\theta,q}$. Кроме того, так как ввиду (2.7) верна оценка $\|z_{n+1} - z_n\|_{N_{\theta,q}} \leq 2^{-n} D$, то для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ существует последовательность $\{z_{n,i}\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset N$ такая, что

$$z_{n+1} - z_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{i\theta} z_{n,i}, \quad \|(\mathcal{J}(2^i, z_{n,i}))_i\|_q < 2^{1-n} D. \quad (2.11)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|z_{n,i}\|_{X_0 \cap X_1} &\leq \max(1, 2^{-i}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}(2^i, z_{n,i}) \\ &\leq \max(1, 2^{-i}) \sum_{n=0}^{\infty} \|(\mathcal{J}(2^i, z_{n,i}))_i\|_q \leq 4D \max(1, 2^{-i}), \end{aligned}$$

и, значит, ряд

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} z_{n,i} \quad (2.12)$$

сходится абсолютно в пространстве $X_0 \cap X_1$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Так как $z_{n,i} \in N$ и N является ядром функционала $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то $y_i \in N$ ($i \in \mathbb{Z}$). Кроме того, из неравенства Минковского и формулы (2.11) получаем

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{J}(2^i, y_i))_i\|_q &\leq \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}(2^i, z_{n,i}) \right)^q \right\}^{1/q} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (\mathcal{J}(2^i, z_{n,i}))^q \right)^{1/q} \leq 4D. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд $\sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} y_i$ сходится в $X_0 + X_1$ к некоторому вектору y из $X_{\theta,q}$. Покажем, что $y = x$. Для этого ввиду (2.10)–(2.12) достаточно проверить, что двойной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} z_{n,i}$$

абсолютно сходится в пространстве $X_0 + X_1$. Действительно, применяя неравенство Гёльдера и неравенство из (2.11), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{\theta i} \|z_{n,i}\|_{X_1} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{J}(2^i, z_{n,i}) 2^{i(\theta-1)} \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\theta-1)q'} \right)^{1/q'} \|(\mathcal{J}(2^i, z_{n,i}))_i\|_q \leq C_{\theta,q} 2^{1-n} D \end{aligned}$$

и

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} 2^{\theta i} \|z_{n,i}\|_{X_0} \leq \left(\sum_{i=-\infty}^{-1} 2^{i\theta q'} \right)^{1/q'} \|(\mathcal{J}(2^i, z_{n,i}))_i\|_q \leq C'_{\theta,q} 2^{1-n} D,$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|z_{n,i}\|_{X_0+X_1} \leq 4D \max(C_{\theta,q}, C'_{\theta,q}).$$

Таким образом, наряду с (2.8) в обоих случаях а) и б) мы имеем представление

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{\theta n} y_n, \quad \text{где } y_n \in N \text{ и } \|(\mathcal{J}(2^n, y_n))_n\|_q \leq 4D. \quad (2.13)$$

Далее, следуя статье [3], рассмотрим векторы

$$u_n = x_n - y_n \quad \text{и} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(k-n-1)\theta} u_k.$$

Тогда

$$\psi(u_n) = \psi(x_n) = a_n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (2.14)$$

а соотношения (2.8) и (2.13) показывают, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{\theta n} u_n = 0, \quad \|(\mathcal{J}(2^n, u_n))_n\|_q \leq 4D + 2. \quad (2.15)$$

Кроме того,

$$2^n \|v_n\|_{X_1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(k-n-1)(\theta-1)} \|u_k\|_{X_1} 2^k,$$

а ввиду (2.15) верны оценки

$$\|v_n\|_{X_0} \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^n 2^{(k-n-1)\theta} u_k \right\|_{X_0} \leq \sum_{k=-\infty}^n 2^{(k-n-1)\theta} \|u_k\|_{X_0}.$$

Поэтому, применяя элементарное неравенство $\max(a, b) \leq a + b$ ($a, b > 0$), неравенство Минковского и (2.15), получим

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{J}(2^n, v_n))_n\|_q \\ & \leq \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(k-n-1)(\theta-1)} \mathcal{J}(2^k, u_k) + \sum_{k=-\infty}^n 2^{(k-n-1)\theta} \mathcal{J}(2^k, u_k) \right)^q \right\}^{1/q} \\ & = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l(\theta-1)} \mathcal{J}(2^{l+n+1}, u_{l+n+1}) + \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\theta} \mathcal{J}(2^{l+n+1}, u_{l+n+1}) \right)^q \right\}^{1/q} \\ & \leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{l(\theta-1)} + \sum_{l=-\infty}^{-1} 2^{l\theta} \right) \|(\mathcal{J}(2^n, u_n))_n\|_q \leq C_{\theta}(4D + 2). \end{aligned}$$

Тем самым $v_n \in X_0 \cap X_1$, $v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{\theta n} v_n \in X_{\theta, q}$ и $\|v\|_{X_{\theta, q}} \leq C_{\theta}(4D + 2)$. Ввиду формулы (0.6) верно неравенство $\psi(v_n) \leq \mu_n^{-1} \mathcal{J}(2^n, v_n)$, и, значит, если $b = (\psi(v_n))_n$, то $b \in l_q(\mu)$ и $\|b\|_{l_q(\mu)} \leq C_{\theta}(4D + 2)$. Кроме того, ввиду (2.14) для всех имеем $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (T_{\theta} b)_n &= b_{n-1} - 2^{\theta} b_n = \psi(v_{n-1}) - 2^{\theta} \psi(v_n) \\ &= \psi \left(\sum_{k=n}^{\infty} 2^{(k-n)\theta} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(k-n-1)\theta} u_k \right) = \psi(u_n) = a_n. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $T_\theta : l_q(\mu) \rightarrow l_q(\mu)$ замкнут, причем в случае а) $\text{Im} T_\theta = l_q(\mu)$, а в случае б) $\text{Im} T_\theta = \text{Ker} f_\theta$. Так как по условию $\beta_\infty \leq \alpha_0$, то ввиду замечания 1 оператор T_θ осуществляет изоморфное вложение, и теорема доказана. •

Приведем теперь некоторые следствия. Первое вытекает сразу из доказательства теоремы 1.

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) нормы пространств $X_{\theta,q}$ и $N_{\theta,q}$ эквивалентны на N , и функционал ψ можно продолжить до функционала $\tilde{\psi} \in X_{\theta,q}^*$;
- 2) $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$.

Следствие 2. *Предположим, что линейный функционал φ определен на некотором линейном пространстве $D \supset X_0 \cap X_1$. Пусть ψ — сужение функционала φ на $X_0 \cap X_1$, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$ и α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$, $\beta_\infty \leq \alpha_0$. Тогда, если*

$$(X_0 \cap \text{Ker} \varphi, X_1 \cap \text{Ker} \varphi)_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q} \cap \text{Ker} \varphi, \quad (2.16)$$

то выполнено включение (2.1).

Доказательство. Из соотношения (2.16), в частности, следует, что нормы пространств $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ и $(X_0 \cap \text{Ker} \varphi, X_1 \cap \text{Ker} \varphi)_{\theta,q}$ эквивалентны на $N := \text{Ker} \psi$. Кроме того, нормы пространств $(X_0 \cap \text{Ker} \varphi, X_1 \cap \text{Ker} \varphi)_{\theta,q}$ и $(N_0, N_1)_{\theta,q}$ на N одинаковы. Следовательно, на этом пространстве нормы пространств $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ и $(N_0, N_1)_{\theta,q}$ эквивалентны, и мы можем применить теорему 1. •

Последнее из следствий также сразу вытекает из доказательства теоремы 1.

Следствие 3. *Пусть $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$, $N = \text{Ker} \psi$. Если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то для каждого $x \in X_{\theta,q}$ существует представление*

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\theta k} x_k, \quad x_k \in N,$$

такое, что

$$\|(\mathcal{J}(2^k, x_k; X_0, X_1))_k\|_{l_q} \leq C \|x\|_{X_{\theta,q}},$$

где константа $C > 0$ не зависит от x . Аналогичное утверждение верно также в случае $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, если пространство $X_{\theta,q}$ заменить пересечением $X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$, где $\tilde{N}$ — ядро функционала $\tilde{\psi}$, являющегося продолжением функционала ψ на $X_{\theta,q}$.

Замечание 2. Из последнего следствия нетрудно получить результаты о сравнении пространств $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ и $(N_0, X_1)_{\theta, q}$ из работы [3]. Напомним, что здесь $\psi \in X_0^*$, а $N_0 := \text{Ker} \psi$ рассматривается с нормой пространства X_0 . Действительно, прежде всего, в этом случае $k(t) := \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*) \leq C$ ($t > 0$), и, значит, $\alpha = \beta_\infty = 0$. Кроме того, $(X_0, X_1)_{\theta, q} \subset N_0 + X_1$, так как если $x \in X_{\theta, q}$, $x = x_0 + x_1$, $x_i \in X_i$, то одновременно $x = y_0 + y_1$, где $y_0 = x_0 - \psi(x_0)z \in N_0$, а $y_1 = x_1 + \psi(x_0)z \in X_1$, где $z \in X_0 \cap X_1$, $\psi(z) = 1$. Поэтому ввиду следствия 3 и теоремы о совпадении пространств $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{J}$ -методов [2, теорема 3.3.1] получаем

$$(N_0, X_1)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}, \quad \text{если } \theta \in (\beta, 1),$$

и

$$(N_0, X_1)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap \tilde{N}, \quad \text{если } \theta \in (0, \alpha_0),$$

где $\tilde{N}$ — ядро продолжения $\tilde{\psi}$ функционала ψ на $(X_0, X_1)_{\theta, q}$.

Дополнительно из теоремы 1 следует, что пространство $(N_0, X_1)_{\theta, q}$ не замкнуто в $(X_0, X_1)_{\theta, q}$, если $\theta \in [\alpha_0, \beta]$.

Теорема 2. *Предположим, что $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$. Если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то ψ продолжается по непрерывности до функционала $\tilde{\psi}_\theta \in ((X_0, X_1)_{\theta, q})^*$. Если $\theta \in (0, \alpha)$ (соответственно $\theta \in (\beta, 1)$), то ψ продолжается по непрерывности до функционала $\tilde{\psi}_\theta \in ((X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_1)^*$ (соответственно $\tilde{\psi}_\theta \in ((X_0, X_1)_{\theta, q} \cap X_0)^*$). Кроме того, если $\tilde{N}_\theta := \text{Ker} \tilde{\psi}_\theta$, то во всех трех случаях верно равенство*

$$(X_0 \cap \tilde{N}_\theta, X_1 \cap \tilde{N}_\theta)_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap \tilde{N}_\theta. \quad (2.17)$$

Доказательство. Если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то ψ продолжается до $\tilde{\psi}_\theta \in ((X_0, X_1)_{\theta, q})^*$ ввиду следствия 1. Докажем формулу (2.17) в этом случае.

Так как для $\tilde{N} := \tilde{N}_\theta$ вложение

$$(X_0 \cap \tilde{N}, X_1 \cap \tilde{N})_{\theta, q} \subset (X_0, X_1)_{\theta, q} \cap \tilde{N}$$

очевидно, то с учетом следствия 3 достаточно доказать, что

$$X_{\theta, q} \cap \tilde{N} \subset X_0 \cap \tilde{N} + X_1 \cap \tilde{N}. \quad (2.18)$$

Заметим, прежде всего, что

$$X_{\theta, q} \subset X_{\theta, q} \cap X_0 + X_{\theta, q} \cap X_1. \quad (2.19)$$

Действительно, для любого $x \in X_{\theta, q}$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset X_0 \cap X_1$ такая, что

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\theta k} x_k \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1)$$

и $(\mathcal{J}(2^k, x_k))_k \in l_q$. Как и ранее, нетрудно показать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{\theta n} x_n = x_0 \in X_0 \text{ (сходимость в } X_0)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\theta n} x_n = x_1 \in X_1 \text{ (сходимость в } X_1).$$

Одновременно по определению $X_{\theta,q}$ как пространства $\mathcal{J}$ -метода справедливы включения $x_i \in X_{\theta,q}$ ($i = 0, 1$), и соотношение (2.19) следует из того, что $x = x_0 + x_1$.

Переходя к доказательству формулы (2.18), возьмем $z \in X_0 \cap X_1$ так, что $\psi(z) = 1$. Если $x \in X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$ и $x = x_0 + x_1$, $x_i \in X_{\theta,q} \cap X_i$ ($i = 0, 1$), то положим

$$y_0 = x_0 + \tilde{\psi}_{\theta}(x_1)z, \quad y_1 = x_1 - \tilde{\psi}_{\theta}(x_1)z. \quad (2.20)$$

Тогда $y_i \in X_i \cap \tilde{N}$ ($i = 0, 1$), и тем самым включение (2.18) доказано.

Пусть теперь $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$. В случае $\theta \in (0, \alpha)$ мы используем леммы 3 и 4. Для этого рассмотрим банахову пару $(X_0 \cap X_1, X_1)$ и соответствующий $\mathcal{K}$ -функционал

$$k'(t) := \mathcal{K}(t, \psi; (X_0 \cap X_1)^*, X_1^*) = \mathcal{K}(t, \psi; X_0^* + X_1^*, X_1^*).$$

Индексы растяжения функции $k'(t)$ будем обозначать через $\alpha', \beta', \alpha'_0$ и β'_∞ . Так как $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то $k'(t) \leq C$ ($t > 0$) и, значит, $\alpha' = \beta'_\infty = 0$. Применяя лемму 3 к паре (X_0^*, X_1^*) , получаем $k'(t) \asymp k(t) := \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$ для $t \in (0, 1]$. Поэтому из определения индексов растяжения следует, что $\alpha'_0 \geq \alpha$. Таким образом, $\theta \in (\beta'_\infty, \alpha'_0)$ и ввиду первой (уже доказанной) части теоремы получаем, что ψ продолжается по непрерывности до функционала $\tilde{\psi}_{\theta} \in ((X_0 \cap X_1, X_1)_{\theta,q})^*$. Но последнее пространство по лемме 4 совпадает с пространством $((X_0, X_1)_{\theta,q} \cap X_1)^*$.

Случай $\theta \in (\beta, 1)$ сводится к предыдущему. Обозначим

$$k''(t) := \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, (X_0 \cap X_1)^*),$$

и пусть $\alpha'', \beta'', \alpha''_0$ и β''_∞ — показатели растяжения этой функции. Тогда $k''(t) \leq Ct$ ($t > 0$), и поэтому $\alpha''_0 = \beta'' = 1$. Далее, заметим, что

$$k(t) = tl\left(\frac{1}{t}\right), \quad k''(t) = tm\left(\frac{1}{t}\right),$$

где

$$l(t) := \mathcal{K}(t, \psi; X_1^*, X_0^*), \quad m(t) := \mathcal{K}(t, \psi; (X_0 \cap X_1)^*, X_0^*).$$

Легко проверить, что

$$\beta + \alpha^l = 1, \quad \beta''_\infty + \alpha''_0 = 1, \quad (2.21)$$

если α^l и α_0^m — индексы растяжения функций $l(t)$ и $m(t)$ соответственно. Из предыдущего ясно, что $\alpha_0^m \geq \alpha^l$. Но тогда из (2.21) сразу следует, что $\beta_\infty'' \leq \beta$.

Таким образом, если $\theta \in (\beta, 1)$, то $\theta \in (\beta_\infty'', \alpha_0'')$, и опять по лемме 4 мы заключаем, что существует продолжение функционала ψ до функционала $\tilde{\psi}_\theta \in ((X_0, X_1)_{\theta,q} \cap X_0)^*$.

Осталось доказать равенство (2.17), если $\theta \in (0, \alpha)$ или $\theta \in (\beta, 1)$. Пусть, например, $\theta \in (0, \alpha)$, второй случай рассматривается точно так же. Ввиду следствия 3 опять достаточно показать, что имеет место вложение (2.18), где $\tilde{N} := \tilde{N}_\theta$ — ядро функционала $\tilde{\psi}_\theta$, являющегося продолжением функционала ψ .

Если $x \in X_{\theta,q} \cap \tilde{N}$, то, пользуясь формулой (2.19), представим x в виде $x = x_0 + x_1$, где $x_i \in X_{\theta,q} \cap X_i$ ($i = 0, 1$). Тем самым x_1 , а значит, и x_0 принадлежат области определения функционала $\tilde{\psi}_\theta$. Поэтому, определяя y_0 и y_1 с помощью соотношений (2.20), получаем, что $x = y_0 + y_1$, где $y_i \in X_i \cap \tilde{N}$ ($i = 0, 1$). Таким образом, мы приходим к (2.18), а тем самым и к (2.17). •

Следствие 4. *Предположим, что линейный функционал φ определен на некотором линейном пространстве D , $D \supset X_0 \cap X_1$, причем его сужение ψ на $X_0 \cap X_1$ является ограниченным функционалом на этом пересечении и $\psi \neq 0$. Пусть для каждого θ , удовлетворяющего условию (2.1), $\tilde{\psi}_\theta$ — непрерывное продолжение функционала ψ с областью определения $\tilde{M}_\theta$ (равной $X_{\theta,q}$, $X_{\theta,q} \cap X_1$ или $X_{\theta,q} \cap X_0$), как в теореме 2. Тогда, если $\tilde{M}_\theta \subset D$ и $\varphi(x) = \tilde{\psi}_\theta(x)$ для $x \in \tilde{M}_\theta$, то имеет место соотношение (2.16).*

Доказательство. Если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то опять ввиду следствия 3 достаточно показать, что

$$X_{\theta,q} \cap \text{Ker} \varphi \subset X_0 \cap \text{Ker} \varphi + X_1 \cap \text{Ker} \varphi. \quad (2.22)$$

Пусть для определенности $\theta \in (0, \alpha)$. Если $x \in X_{\theta,q} \cap \text{Ker} \varphi$, то ввиду (2.19) $x = x_0 + x_1$, где $x_i \in X_{\theta,q} \cap X_i$ ($i = 0, 1$). Тогда $x_1 \in \tilde{M}_\theta := X_{\theta,q} \cap X_1$. Определяя y_0 и y_1 в соответствие с (2.20), получаем, что $x = y_0 + y_1$ и y_1 , а значит, и y_0 принадлежат ядру $\text{Ker} \varphi$. Тем самым (2.22) доказано. Аналогично рассматривается случай $\theta \in (\beta, 1)$.

Пусть теперь $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$. Если $X_{\theta,q} \cap \text{Ker} \varphi = X_{\theta,q} \cap \tilde{N}_\theta$, где $\tilde{N}_\theta := \text{Ker} \tilde{\psi}_\theta$, то результат следует из теоремы 2 (или следствия 3). Предположим, что $X_{\theta,q} \cap \text{Ker} \varphi \not\supset X_{\theta,q} \cap \tilde{N}_\theta$. Так как $\tilde{N}_\theta$ — подпространство коразмерности 1

в $X_{\theta,q}$, то тогда $X_{\theta,q} \subset \text{Ker} \varphi$, т. е. $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in X_{\theta,q}$. Последнее противоречит условиям следствия. •

§3. $\mathcal{K}$ -функционал на парах пересечений

Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , Y_0 — замкнутое подпространство коразмерности 1 пространства X_0 . В [8] было найдено соотношение, связывающее $\mathcal{K}(t, x; Y_0, X_1)$ и $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ (см. также [12, теорема 2.1]). Покажем, что при одном дополнительном условии аналогичный результат верен и для нормированной пары пересечений, порожденной линейным функционалом.

Пусть ψ — линейный функционал, определенный на пространстве $M \supset X_0 \cap X_1$, $N = \text{Ker} \psi$. Кроме того, будем предполагать, что сужение функционала ψ на пересечение $X_0 \cap X_1$ является ограниченным функционалом на нем, не равным нулю. Обозначим $Y_i = X_i \cap N$ ($i = 0, 1$).

Для любого $y \in Y_0 + Y_1$ и каждого $t > 0$ существует „оптимальное” разложение

$$y = y_0(t) + y_1(t), \quad y_i(t) \in X_i, \quad i = 0, 1, \quad (3.1)$$

обладающее тем свойством, что

$$\frac{1}{2}(\|y_0(t)\|_{X_0} + t\|y_1(t)\|_{X_1}) \leq \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \|y_0(t)\|_{X_0} + t\|y_1(t)\|_{X_1}. \quad (3.2)$$

Теорема 3. Пусть пересечение $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , а „оптимальное” разложение (3.1) для любого $y \in Y_0 + Y_1$ можно выбрать так, что $y_0(t) \in M$ при всех $t > 0$.

Тогда

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \asymp \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) + \frac{|\psi(y_0(t))|}{\mathcal{K}(t^{-1}, \psi; X_0^*, X_1^*)},$$

где константы эквивалентности не зависят от $y \in Y_0 + Y_1$ и $t > 0$.

Доказательство. Пусть $h \in X_0 \cap X_1$, $\psi(h) \neq 0$. Для $y \in Y_0 + Y_1$ рассмотрим разложение (3.1), для которого выполнено условие теоремы. Тогда если

$$z_0(t) = y_0(t) - \frac{\psi(y_0(t))h}{\psi(h)}, \quad z_1(t) = y_1(t) + \frac{\psi(y_0(t))h}{\psi(h)},$$

то $z_i(t) \in Y_i$ и $y = z_0(t) + z_1(t)$. Следовательно, ввиду (3.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) &\leq \|z_0(t)\|_{X_0} + t\|z_1(t)\|_{X_1} \\ &\leq \|y_0(t)\|_{X_0} + t\|y_1(t)\|_{X_1} + |\psi(y_0(t))| \frac{\|h\|_{X_0} + t\|h\|_{X_1}}{|\psi(h)|} \\ &\leq 2\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) + 2|\psi(y_0(t))| \frac{\mathcal{J}(t, h; X_0, X_1)}{|\psi(h)|}. \end{aligned}$$

Применяя соотношение (0.6) и переходя во втором слагаемом из правой части к точной нижней грани по всем $h \in X_0 \cap X_1$, $\psi(h) \neq 0$, получим

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \leq 2\left(\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) + \frac{|\psi(y_0(t))|}{\mathcal{K}(t^{-1}, \psi; X_0^*, X_1^*)}\right).$$

Для доказательства противоположного неравенства достаточно показать, что

$$\frac{|\psi(y_0(t))|}{\mathcal{K}(t^{-1}, \psi; X_0^*, X_1^*)} \leq 4\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1). \quad (3.3)$$

Мы можем считать, что $\psi(y_0(t)) \neq 0$ (иначе нечего доказывать). Для $t > 0$ найдем разложение $y = z_0(t) + z_1(t)$, $z_i(t) \in Y_i$, такое, что

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \geq \frac{1}{2}(\|z_0(t)\|_{X_0} + t\|z_1(t)\|_{X_1}) \quad (3.4)$$

(„оптимальное” разложение вектора y в паре (Y_0, Y_1)). Используя его, а также разложение (3.1), определим $h = y_0(t) - z_0(t) = z_1(t) - y_1(t)$. Тогда $h \in X_0 \cap X_1$, и так как $z_0(t) \in Y_0 \subset N$, то

$$\psi(h) = \psi(y_0(t)) - \psi(z_0(t)) = \psi(y_0(t)) \neq 0.$$

Значит,

$$z_0(t) = y_0(t) - \frac{\psi(y_0(t))h}{\psi(h)}, \quad z_1(t) = y_1(t) + \frac{\psi(y_0(t))h}{\psi(h)}$$

и ввиду (3.4), (3.2) и (0.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) &\geq \frac{1}{2}\left(\left\|y_0(t) - \frac{\psi(y_0(t))h}{\psi(h)}\right\|_{X_0} + t\left\|y_1(t) + \frac{\psi(y_0(t))h}{\psi(h)}\right\|_{X_1}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(|\psi(y_0(t))| \frac{\|h\|_{X_0} + t\|h\|_{X_1}}{|\psi(h)|} - (\|y_0(t)\|_{X_0} + t\|y_1(t)\|_{X_1})\right) \\ &\geq \frac{1}{2}|\psi(y_0(t))| \inf_{h \in X_0 \cap X_1, \psi(h) \neq 0} \frac{\mathcal{J}(t, \psi; X_0, X_1)}{|\psi(h)|} \\ &\quad - \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) = \frac{1}{2} \frac{|\psi(y_0(t))|}{\mathcal{K}(t^{-1}, \psi; X_0^*, X_1^*)} - \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1), \end{aligned}$$

откуда сразу получаем (4.3), так как $\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1)$. •

§4. Интерполяция пересечений весовых L_p -пространств, порожденных интегральным функционалом

Если $w(x)$ — положительная измеримая на $(0, \infty)$ функция, то, как обычно, $L_p(w)$ — пространство всех измеримых функций $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{w,p} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p}, \quad \text{если } 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{w,\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x>0} (|f(x)|w(x)).$$

Для произвольной измеримой функции $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим линейный функционал

$$\varphi_g(f) = \int_0^\infty f(x)g(x) dx$$

с областью определения D_g , состоящей из всех измеримых функций $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\int_a^b |f(x)g(x)| dx < \infty$ для произвольных $0 < a < b < \infty$ и существует предел

$$\lim_{a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

В основном нас будет интересовать случай, когда $g(x) \equiv 1$. Обозначения тогда будут φ и D соответственно.

Сначала мы найдем условия, при которых верно равенство

$$(L_{p_0}(w_0) \cap \operatorname{Ker} \varphi, L_{p_1}(w_1) \cap \operatorname{Ker} \varphi)_{\theta,q} = (L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta,q} \cap \operatorname{Ker} \varphi. \quad (4.1)$$

Таким образом, $g(x) \equiv 1$, и мы рассмотрим три случая в зависимости от чисел p_0 и p_1 .

а) $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$. Обозначим через ψ сужение функционала $\varphi(f) = \int_0^\infty f(x) dx$ на $L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1)$. Для любой банаховой пары (X_0, X_1) такой, что пересечение $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1 , $(X_0 \cap X_1)^* = X_0^* + X_1^*$ изометрически [2, с. 47–48]. Поэтому если $\frac{1}{p_i'} + \frac{1}{p_i} = 1$ ($i = 0, 1$), то условие $\psi \in (L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1))^*$ эквивалентно тому, что

$$1 \in L_{p_0'}(w_0^{-1/(p_0-1)}) + L_{p_1'}(w_1^{-1/(p_1-1)}) \quad (p_0 > 1)$$

и

$$1 \in L_\infty(w_0^{-1}) + L_{p_1'}(w_1^{-1/(p_1-1)}) \quad (p_0 = 1).$$

Это, в свою очередь, равносильно конечности для некоторого (для всех) $t > 0$ функции

$$k(t) = \mathcal{K}(t, 1; L_{p_0'}(w_0^{-1/(p_0-1)}), L_{p_1'}(w_1^{-1/(p_1-1)})) \quad (p_0 > 1)$$

и

$$k'(t) = \mathcal{K}(t, 1; L_\infty(w_0^{-1}), L_{p'_1}(w_1^{-1/(p_1-1)})) \quad (p_0 = 1).$$

Пусть сначала $p_0 > 1$. После приведения к одной весовой функции приходим к равенству

$$k(t) = \mathcal{K}(t, u; L_{p'_0}(v), L_{p'_1}(v)),$$

где

$$u(x) = w_0(x)^{-\frac{p_1-1}{p_1-p_0}} w_1(x)^{\frac{p_0-1}{p_1-p_0}}, \quad v(x) = w_0(x)^{\frac{p_1}{p_1-p_0}} w_1(x)^{-\frac{p_0}{p_1-p_0}}. \quad (4.2)$$

Далее, применяя формулу Хольмстедта [2, с. 165], получим

$$\begin{aligned} k(t) &= t \mathcal{K}\left(\frac{1}{t}, u; L_{p'_1}(v), L_{p'_0}(v)\right) \\ &\asymp t \left(\int_0^{t^{-r}} u^*(s)^{p'_1} ds \right)^{1/p'_1} + \left(\int_{t^{-r}}^\infty u^*(s)^{p'_0} ds \right)^{1/p'_0}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$, а $u^*(s)$ — невозрастающая перестановка функции $u(x)$ относительно меры $\nu(E) = \int_E v(x) dx$. Если теперь обозначить

$$F_t = \{x > 0 : u(x) > u^*(t^{-r})\}, \quad F_t^c = (0, \infty) \setminus F_t, \quad (4.3)$$

то $k(t) \asymp k_1(t)$, где

$$k_1(t) = t \left(\int_{F_t} w_1(x)^{-1/(p_1-1)} dx \right)^{1/p'_1} + \left(\int_{F_t^c} w_0(x)^{-1/(p_0-1)} dx \right)^{1/p'_0}.$$

Совершенно аналогично можно показать, что в случае $p_0 = 1$ мы имеем $k'(t) \asymp k'_1(t)$, где

$$k'_1(t) = t \left(\int_{F_t} w_1(x)^{-1/(p_1-1)} dx \right)^{1/p'_1}.$$

Заметим также, что тогда $r = p'_1$, а $u(x) = w_0^{-1}(x)$.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, а функции $u(x)$, $v(x)$ и множества F_t , F_t^c ($t > 0$) определяются соотношениями (4.2) и (4.3) соответственно. Предположим, что функция

$$k_1(t) = t \left(\int_{F_t} w_1(x)^{-1/(p_1-1)} dx \right)^{1/p'_1} + \left(\int_{F_t^c} w_0(x)^{-1/(p_0-1)} dx \right)^{1/p'_0}$$

(в случае $p_0 = 1$ в правой части остается только первое слагаемое) конечна при некотором (при всех) $t > 0$, α, β, α_0 и β_∞ — ее индексы растяжения, $\beta_\infty \leq \alpha_0$. Если $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$, то равенство (4.1) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.1).

Доказательство. Если выполнено равенство (4.1), то условия теоремы позволяют применить следствие 2, и мы получаем (2.1).

Пусть, наоборот, выполняется условие (2.1). Тогда ввиду рассуждений перед теоремой сужение ψ функционала φ на $L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1)$ принадлежит пространству $(L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1))^*$. Кроме того, $\psi \neq 0$. Поэтому по теореме 2 существует непрерывное продолжение функционала ψ до функционала $\tilde{\psi}_\theta \in \widetilde{M}_\theta^*$, где $\widetilde{M}_\theta$ равно одному из пространств $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta,q}$, $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta,q} \cap L_{p_1}(w_1)$ или $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta,q} \cap L_{p_0}(w_0)$ в зависимости от того, какому интервалу (β_∞, α_0) , $(0, \alpha)$ или $(\beta, 1)$ принадлежит θ .

Проверим, что для любого $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1)$ справедливо вложение $\widetilde{M}_\theta \subset D$, и, если $f \in \widetilde{M}_\theta$, то

$$\tilde{\psi}_\theta(f) = \varphi(f) = \int_0^\infty f(x) dx. \quad (4.4)$$

Прежде всего, по условию $L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1) \subset D$ и для $f \in L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1)$ верна оценка

$$\int_0^\infty |f(x)| dx \leq C_\theta \|f\|_{\widetilde{M}_\theta}. \quad (4.5)$$

Пусть теперь $f \in \widetilde{M}_\theta$, а последовательность $\{f_n\} \subset L_{p_0}(w_0) \cap L_{p_1}(w_1)$ такова, что $\|f_n - f\|_{\widetilde{M}_\theta} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для каждого $b > 0$ мы имеем $f_n \chi_{[0,b]} \rightarrow f \chi_{[0,b]}$ по мере при $n \rightarrow \infty$ (здесь и далее χ_F — характеристическая функция множества $F \subset \mathbb{R}$). Поэтому ввиду (4.5) заключаем, что

$$\int_0^b |f_n(x)| dx \leq C_\theta \|f_n\|_{\widetilde{M}_\theta}.$$

Отсюда по лемме Фату

$$\int_0^\infty |f(x)| dx \leq C_\theta \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\widetilde{M}_\theta} = C_\theta \|f\|_{\widetilde{M}_\theta},$$

т. е. $\widetilde{M}_\theta \subset L_1(0, \infty) \subset D$. Кроме того, опять применяя (4.5), получаем

$$\int_0^\infty |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq C_\theta \|f_n - f_m\|_{\widetilde{M}_\theta} \quad (n, m = 1, 2, \dots),$$

и, значит, последовательность $\{f_n\}$ имеет предел в $L_1(0, \infty)$, который должен совпадать с f . Так как одновременно

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \tilde{\psi}_\theta(f_n) \rightarrow \tilde{\psi}_\theta(f),$$

то мы приходим к (4.4). В итоге выполнены все условия следствия 4, применяя которое, мы убеждаемся в справедливости равенства (4.1). •

Если числа p_0, p_1 и весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют дополнительным условиям, то можно получить более конкретные результаты. Пусть сначала $p_0 > 1$ и

(*) $w_0(x)$ возрастает, $w_0(2x) \leq C_1 w_0(x)$ ($x > 0$) и

$$\int_x^\infty w_0(s)^{\frac{1}{1-p_0}} ds \leq C_2 x w_0(x)^{\frac{1}{1-p_0}} \quad (x > 0),$$

а $w_1(x)$ либо убывает и $w_1(x) \leq C_3 w_1(2x)$ ($x > 0$), либо возрастает, но так, что функция $w(x) = \frac{w_0(x)}{w_1(x)}$ возрастает, и

$$\int_0^x w_1(s)^{\frac{1}{1-p_1}} ds \leq C_4 x w_1(x)^{\frac{1}{1-p_1}} \quad (x > 0).$$

Легко видеть, что при выполнении условия (*) функция $u(x)$ убывает, а функция $v(x)$ возрастает. Отсюда, в частности, следует, что $F_t = (0, s(t))$, где $s(t)$ — решение уравнения

$$V(x) := \int_0^x v(s) ds = t^{-r}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}. \quad (4.6)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что $V(x) \asymp x v(x)$. Поэтому

$$s(t) v(s(t)) \asymp t^{-r}. \quad (4.7)$$

Заметим, что, с одной стороны, ввиду (*) справедливы оценки

$$k_1(t) \geq \left(\int_{s(t)}^{2s(t)} w_0(x)^{-1/(p_0-1)} dx \right)^{1/p'_0} \geq C_1^{-1/p_0} s(t)^{1/p'_0} w_0(s(t))^{-1/p_0}.$$

С другой стороны, из условия (*) и (4.7) следует, что

$$\begin{aligned} k_1(t) &\leq C(s(t)^{1/p'_0} w_0(s(t))^{-1/p_0} + t s(t)^{1/p'_1} w_1(s(t))^{-1/p_1}) \\ &= C s(t)^{1/p'_0} w_0(s(t))^{-1/p_0} (1 + t s(t)^{1/r} v(s(t))^{1/r}) \\ &\leq C' s(t)^{1/p'_0} w_0(s(t))^{-1/p_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, при условии (*) получаем эквивалентность

$$k_1(t) \asymp s(t)^{1/p'_0} w_0(s(t))^{-1/p_0}.$$

В случае $p_0 = 1$ можно использовать несколько менее ограничительное условие:

(**) $w_0(x)$ возрастает и $w_0(2x) \leq C_1 w_0(x)$ ($x > 0$), а $w_1(x)$ либо убывает и $w_1(x) \leq C_2 w_1(2x)$ ($x > 0$), либо возрастает, но так, что функция $w(x) =$

$\frac{w_0(x)}{w_1(x)}$ возрастает и

$$\int_0^x w_1(s)^{\frac{1}{1-p_1}} ds \leq C_3 x w_1(x)^{\frac{1}{1-p_1}} \quad (x > 0).$$

Совершенно так же, как в случае $p_0 > 1$, можно показать, что при выполнении условия (**) имеем

$$k_1'(t) \asymp w_0(s(t))^{-1}.$$

В итоге, применяя теорему 4, получаем следующее утверждение.

Следствие 5. *Предположим, что числа p_0, p_1 ($1 \leq p_0 < p_1 < \infty$) и весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют условию (*), если $p_0 > 1$, и условию (**), если $p_0 = 1$. Пусть α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k_2(t) = s(t)^{\frac{p_0-1}{p_0}} w_0(s(t))^{-\frac{1}{p_0}}$, где $s(t)$ — решение уравнения (4.6), $\beta_\infty \leq \alpha_0$. Тогда, если $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$, то равенство (4.1) имеет место, если и только если выполнено (2.1).*

б) $1 < p_0 = p_1 = p < \infty$. Хорошо известно [2, с. 150], что в этом случае

$$\begin{aligned} k(t) &= \mathcal{K}(t, 1; L_{p'}(w_0^{-1/(p-1)}), L_{p'}(w_1^{-1/(p-1)})) \\ &\asymp \left(\int_0^\infty \min(w_0(x)^{-1/(p-1)}, t^{p'} w_1(x)^{-1/(p-1)}) dx \right)^{1/p'} \\ &= \left(t^{p'} \int_{F_t} w_1(x)^{-1/(p-1)} dx + \int_{F_t^c} w_0(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

где

$$F_t = \left\{ x > 0 : \frac{w_0(x)}{w_1(x)} < t^{-p} \right\}, \quad F_t^c = (0, \infty) \setminus F_t. \quad (4.8)$$

Точно так же, как теорема 4, доказывается следующее утверждение.

Теорема 5. *Предположим, что $p \in (1, \infty)$, $w_0(x)$ и $w_1(x)$ таковы, что функция*

$$k_3(t) = \left(t^{p'} \int_{F_t} w_1(x)^{-1/(p-1)} dx + \int_{F_t^c} w_0(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{1/p'},$$

где множества F_t и F_t^c определяются соотношениями (4.8), конечна при некотором (при всех) $t > 0$. Если α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k_3(t)$, $\beta_\infty \leq \alpha_0$, то равенство

$$(L_p(w_0) \cap \text{Ker} \varphi, L_p(w_1) \cap \text{Ker} \varphi)_{\theta, q} = (L_p(w_0), L_p(w_1))_{\theta, q} \cap \text{Ker} \varphi \quad (4.9)$$

верно тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.1).

Пусть для $p_0 = p_1 = p$, $w_0(x)$ и $w_1(x)$ выполнено условие (*). Тогда $F_t = (0, w^{-1}(t^{-p}))$, где $w^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $w(x) = w_0(x)/w_1(x)$. Поэтому, рассуждая далее так же, как перед следствием 5, получаем еще одно утверждение.

Следствие 6. Пусть $p_0 = p_1 = p \in (1, \infty)$, $w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют условию (*), а α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции

$$k_4(t) = (w^{-1}(t^{-p}))^{(p-1)/p} w_0^{-1/p}(w^{-1}(t^{-p})),$$

$\beta_\infty \leq \alpha_0$. Тогда равенство (4.9) выполнено в том и только в том случае, если имеет место включение (2.1).

с) $p_0 = p_1 = 1$. В этом случае

$$k(t) = \mathcal{K}(t, 1; L_\infty(1/w_0), L_\infty(1/w_1)) = \sup_{x>0} \frac{1}{w_0(x)} \min\left(1, t \frac{w_0(x)}{w_1(x)}\right).$$

Если весовые функции удовлетворяют условию

$$w_0(x) \text{ возрастает, } w_1(x) \text{ убывает и } \lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{w(x)} = 0, \quad (4.10)$$

то

$$k(t) \asymp \frac{1}{w_0(w^{-1}(1/t))}.$$

Здесь, как и ранее, $w(x) := \frac{w_0(x)}{w_1(x)}$, а $w^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции $w(x)$.

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 4.

Теорема 6. Пусть весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют условию (4.10). Если α, β, α_0 и β_∞ — индексы растяжения функции $k_5(t) = \frac{1}{w_0(w^{-1}(1/t))}$, $\beta_\infty \leq \alpha_0$, то равенство

$$(L_1(w_0) \cap \text{Ker} \varphi, L_1(w_1) \cap \text{Ker} \varphi)_{\theta, q} = (L_1(w_0), L_1(w_1))_{\theta, q} \cap \text{Ker} \varphi \quad (4.11)$$

верно тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.1).

Получим одно интересное следствие предыдущей теоремы. Пусть a, b, c и d — четыре числа такие, что $0 \leq a \leq \min(b, c) \leq \max(b, c) \leq d \leq 1$. Тогда существует возрастающая вогнутая функция $\nu(x)$ на $(0, \infty)$ такая, что ее индексы растяжения $\alpha, \beta_\infty, \alpha_0$ и β совпадают соответственно с a, b, c и d .

Для того чтобы привести пример такой функции, возьмем двустороннюю монотонно возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ такую, что $x_0 = 1$ и $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \infty$.

Если $b > 0$, то функцию ν' определим следующим образом: $\nu'(1) = 1$,

$$\nu'(x) = \left(\frac{x}{x_{2k}}\right)^a \nu'(x_{2k}), \quad x_{2k} \leq x \leq x_{2k+1},$$

$$\nu'(x) = \left(\frac{x}{x_{2k+1}}\right)^b \nu'(x_{2k+1}), \quad x_{2k+1} \leq x \leq x_{2k+2}$$

для $k = 0, 1, 2, \dots$ и

$$\nu'(x) = \left(\frac{x}{x_{2k}}\right)^c \nu'(x_{2k}), \quad x_{2k-1} \leq x \leq x_{2k},$$

$$\nu'(x) = \left(\frac{x}{x_{2k-1}}\right)^d \nu'(x_{2k-1}), \quad x_{2k-2} \leq x \leq x_{2k-1}$$

для $k = 0, -1, -2, \dots$

Если $b = 0$, а $d > 0$, то на $(0, 1]$ функцию $\nu'(x)$ определяем так же, как и раньше, а для $x \in [1, \infty)$ положим $\nu'(x) = \ln ex$.

И наконец, если $d = 0$, то $\nu'(x) = \frac{1}{\ln e/x}$ для $x \in (0, 1]$ и $\nu'(x) = \ln ex$ для $x \in [1, \infty]$.

Легко проверить, что $\nu'(x)$ возрастает, $\nu'(x)/x$ убывает и область значений функции $\nu'(x)$ совпадает с $(0, \infty)$. Существует возрастающая вогнутая функция $\nu(x)$ такая, что $\nu'(x) \leq \nu(x) \leq 2\nu'(x)$ ($x > 0$) [17, теорема 2.1.1]. Ясно, что область значений функции $\nu(x)$ также совпадает с $(0, \infty)$. Из определения функции ν' сразу следует, что ее (а значит, и функции ν) индексы растяжения $\alpha, \beta_\infty, \alpha_0$ и β совпадают с a, b, c и d соответственно.

Обозначим $w_0(x) = x$ и $w_1(x) = x\nu^{-1}(1/x)$ (ν^{-1} — функция, обратная к ν). Так как эти функции удовлетворяют условиям (4.10) и

$$\nu(x) = \frac{1}{w_0(w^{-1}(1/t))},$$

то, применяя теорему 6, мы получаем такой результат.

Следствие 7. Для произвольных чисел $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ существуют весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ такие, что равенство (4.11) верно тогда и только тогда, когда $\theta \in (0, a) \cup (b, c) \cup (d, 1)$.

Замечание 3. Последнее утверждение показывает, что уже в случае весовых L_1 -пространств реализуется любая из ситуаций, на возможность которых указывает теорема 1. Частные результаты в этом направлении были известны ранее [1, следствие 2].

Наиболее простые результаты получаются в случае степенных весовых функций. Если $w_0(x) = x^l$, а $w_1(x) = x^m$, то нетрудно проверить, что условие (*) выполнено, если (а) $l > p_0 - 1$ и $m \leq 0$ или (б) $l > p_0 - 1$, $l > m$ и $0 \leq m < p_1 - 1$.

Согласно соотношениям (4.2) и (4.7)

$$v(x) = x^{\frac{p_1 l - p_0 m}{p_1 - p_0}}, \quad s(t) \asymp t^{-\frac{r(p_1 - p_0)}{p_1 l - p_0 m + p_1 - p_0}}, \quad k_2(t) \asymp t^{\theta_0},$$

где $\theta_0 = \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1(l+1)-p_0(m+1)}$. Следовательно, $\alpha = \beta = \alpha_0 = \beta_\infty = \theta_0$, и, применяя предыдущие результаты, мы получаем такое утверждение.

Следствие 8. *Предположим, что для p_0, p_1 ($1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$), l и m выполнено хотя бы одно из условий (а) и (b). Тогда равенство*

$$(L_{p_0}(x^l) \cap \text{Ker} \varphi, L_{p_1}(x^m) \cap \text{Ker} \varphi)_{\theta, q} = (L_{p_0}(x^l), L_{p_1}(x^m))_{\theta, q} \cap \text{Ker} \varphi$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\theta \neq \frac{p_1(l-p_0+1)}{p_1(l+1)-p_0(m+1)}$.

Замечание 4. В случае $p_0 = p_1 = q$ последнее утверждение иным способом было доказано в [1, следствие 1].

Применим теперь результаты §3 к вычислению $\mathcal{K}$ -функционала на паре пересечений весовых L_p -пространств $(L_p(w_0) \cap \text{Ker} \varphi_g, L_p(w_1) \cap \text{Ker} \varphi_g)$, где $\varphi_g(f) = \int_0^\infty f(x)g(x) dx$. Рассмотрим два случая.

а) $p_0 = p_1 = p > 1$. Как и ранее, условие $\varphi_g \in (L_p(w_0) \cap L_p(w_1))^*$ эквивалентно тому, что

$$g \in L_{p'}(w_0^{-1/(p-1)}) + L_{p'}(w_1^{-1/(p-1)}) = L_{p'}(\max(w_0, w_1)^{-1/(p-1)}).$$

Тогда, как уже упоминалось [2, с. 150],

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t^{-1}, \varphi_g; L_p(w_0)^*, L_p(w_1)^*) \\ &= \mathcal{K}(t^{-1}, g; L_{p'}(w_0^{-1/(p-1)}), L_{p'}(w_1^{-1/(p-1)})) \\ &\asymp \left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'} \min(w_0^{-1/(p-1)}(x), t^{-p'} w_1^{-1/(p-1)}(x)) dx \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

и эта функция конечна при всех $t > 0$. Аналогичным образом

$$\mathcal{K}(t, f; L_p(w_0), L_p(w_1)) \asymp \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \min(w_0(x), t^p w_1(x)) dx \right)^{1/p}.$$

Поэтому, если предположить, что функция

$$\text{функция } w(x) := \frac{w_0(x)}{w_1(x)} \text{ монотонна и } \lim_{t \rightarrow 0} w(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{w(x)} = 0, \quad (4.12)$$

то

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, f; L_p(w_0), L_p(w_1)) \\ & \asymp \left(\int_0^{w^{-1}(t^p)} |f(x)|^p w_0(x) dx + t^p \int_{w^{-1}(t^p)}^\infty |f(x)|^p w_1(x) dx \right)^{1/p} \\ & = (\|f_0^t\|_{L_p(w_0)}^p + t^p \|f_1^t\|_{L_p(w_1)}^p)^{1/p} \asymp \|f_0^t\|_{L_p(w_0)} + t \|f_1^t\|_{L_p(w_1)}, \end{aligned}$$

где $f_0^t(x) = f(x)\chi_{(0, w^{-1}(t^p))}(x)$ и $f_1^t(x) = f(x)\chi_{(w^{-1}(t^p), \infty)}(x)$. Последнее соотношение показывает, что разложение $f = f_0^t + f_1^t$ оптимально (см. (3.2)). Кроме того, если $f \in L_p(w_0) \cap \text{Ker} \varphi_g + L_p(w_1) \cap \text{Ker} \varphi_g$, то f_0^t принадлежит области определения D_g функционала φ_g для каждого $t > 0$. Таким образом, из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 7. *Предположим, что $p \in (1, \infty)$, функция $w(x) = \frac{w_0(x)}{w_1(x)}$ удовлетворяет условию (4.12) и $g \in L_{p'}(\max(w_0, w_1)^{-1/(p-1)})$. Тогда*

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, f; L_p(w_0) \cap \text{Ker} \varphi_g, L_p(w_1) \cap \text{Ker} \varphi_g) \\ & \asymp \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \min(w_0(x), t^p w_1(x)) dx \right)^{1/p} \\ & \quad + \frac{|\int_0^{w^{-1}(t^p)} g(x) f(x) dx|}{G_p(t)}, \end{aligned}$$

где

$$G_p(t) = \left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'} \min(w_0^{-1/(p-1)}(x), t^{-p'} w_1^{-1/(p-1)}(x)) dx \right)^{1/p'}.$$

В случае, когда $g(x) \equiv 1$, при определенных условиях на $p \in (1, \infty)$ и весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ формула для $\mathcal{K}$ -функционала на паре пересечений, полученная в последней теореме, упрощается. А именно пусть

(***) $w_0(x)$ возрастает и

$$\int_x^\infty w_0(s)^{\frac{1}{1-p}} ds \leq C_1 x w_0(x)^{\frac{1}{1-p}} \quad (x > 0),$$

а $w_1(x)$ либо убывает и $w_1(x) \leq C_2 w_1(2x)$ ($x > 0$), либо возрастает, но так, что функция $w(x) = \frac{w_0(x)}{w_1(x)}$ возрастает, и

$$\int_0^x w_1(s)^{\frac{1}{1-p}} ds \leq C_3 x w_1(x)^{\frac{1}{1-p}} \quad (x > 0).$$

Рассуждая точно так же, как перед следствием 6, нетрудно получить следующее утверждение, которое иначе, на основе непосредственных оценок, было получено в [1, теорема 3].

Следствие 9. Пусть $p \in (1, \infty)$, $w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют условиям (***). Тогда

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, f; L_p(w_0) \cap \text{Ker} \varphi, L_p(w_1) \cap \text{Ker} \varphi) \\ & \asymp \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \min(w_0(x), t^p w_1(x)) dx \right)^{1/p} \\ & + (w^{-1}(t^p))^{1/p-1} w_0^{1/p}(w^{-1}(t^p)) \left| \int_0^{w^{-1}(t^p)} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

б) $p_0 = p_1 = 1$. В этом случае возникает условие $\varphi_g \in (L_1(w_0) \cap L_1(w_1))^*$, которое эквивалентно тому, что

$$g \in L_\infty(1/w_0) + L_\infty(1/w_1) = L_\infty(1/\max(w_0, w_1)).$$

Тогда при всех $t > 0$ конечна функция

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, \varphi_g; L_1(w_0)^*, L_1(w_1)^*) \\ & = \mathcal{K}(t, g; L_\infty(1/w_0), L_\infty(1/w_1)) \\ & = \sup_{x>0} \left(|g(x)| \min\left(\frac{1}{w_0(x)}, \frac{t}{w_1(x)}\right) \right). \end{aligned}$$

Как и в случае $p > 1$, если выполнено условие (4.12), то

$$\mathcal{K}(t, f; L_1(w_0), L_1(w_1)) = \|f_0^t\|_{L_1(w_0)} + t \|f_1^t\|_{L_1(w_1)},$$

где $f_0^t(x) = f(x)\chi_{(0, w^{-1}(t))}(x)$ и $f_1^t(x) = f(x)\chi_{(w^{-1}(t), \infty)}(x)$. Тем самым разложение $f = f_0^t + f_1^t$ оптимально. Кроме того, если $f \in L_1(w_0) \cap \text{Ker} \varphi_g + L_1(w_1) \cap \text{Ker} \varphi_g$, то $f_0^t \in D_g$ для каждого $t > 0$. Поэтому из теоремы 3 следует еще одна теорема.

Теорема 8. Если выполнено условие (4.12) и $g \in L_\infty(1/\max(w_0, w_1))$, то

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, f; L_1(w_0) \cap \text{Ker} \varphi_g, L_1(w_1) \cap \text{Ker} \varphi_g) \\ & \asymp \left(\int_0^\infty |f(x)| \min(w_0(x), t w_1(x)) dx \right) + \frac{|\int_0^{w^{-1}(t)} g(x) f(x) dx|}{G_1(t)}, \end{aligned}$$

где

$$G_1(t) = \sup_{x>0} \left(|g(x)| \min\left(\frac{1}{w_0(x)}, \frac{1}{t w_1(x)}\right) \right).$$

В случае, когда $g(x) \equiv 1$, а весовые функции достаточно регулярны, выражение для $\mathcal{K}$ -функционала на паре пересечений несколько упрощается.

Следствие 10. Если функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$ удовлетворяют условию (4.10), то

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t, f; L_1(w_0) \cap \text{Ker} \varphi, L_1(w_1) \cap \text{Ker} \varphi) \\ & \asymp \left(\int_0^\infty |f(x)| \min(w_0(x), tw_1(x)) dx \right) + w_0(w^{-1}(t)) \left| \int_0^{w^{-1}(t)} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Замечание 5. При дополнительном условии $w_1(x/2) \leq Aw_1(x)$ ($x > 0$) следствие 10 было доказано иным способом в работе [1] (см. теорему 3).

Автор выражает благодарность проф. Л. Малигранде за полезное обсуждение некоторых вопросов, связанных с доказательством теоремы 2.

Список литературы

- [1] Krugljak N., Maligranda L., Persson L.-E., *The failure of the Hardy inequality and interpolation of intersections*, Ark. Mat. **37** (1999), 323–344.
- [2] Берг Й., Лефстрем Й., *Интерполяционные пространства: Введение*, Мир, М., 1980.
- [3] Ivanov S., Kalton N., *Interpolation of subspaces and applications to exponential bases*, Алгебра и анализ **13** (2001), №2, 93–115.
- [4] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.
- [5] Triebel H., *Eine Bemerkung zur nicht-kommutativen Interpolation*, Math. Nachr. **69** (1975), 57–60.
- [6] Трибель Х., *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [7] Maligranda L., *On commutativity of interpolation with intersection*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 10 (1985), 113–118 (1986).
- [8] Wallsten R., *Remarks on interpolation of subspaces*, Function Spaces and Applications (Lund, 1986), Lecture Notes in Math. vol. 1302, Springer, Berlin, 1988, pp. 410–419.
- [9] Pisier G., *Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations*. I, Pacific J. Math. **155** (1992), 341–368.
- [10] Janson S., *Interpolation of subcouple and quotient couple*, Ark. Mat. **31** (1993), 307–338.
- [11] Кисляков С. В., Куанхуа Шу, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы*, Алгебра и анализ **8** (1996), №4, 75–109.
- [12] Löfström J., *Interpolation of subspaces*, Techn. Rep. no. 10, Univ. of Göteborg, 1997, 63 pp.
- [13] Astashkin S. V., *About interpolation of subspaces of rearrangement invariant spaces generated by Rademacher system*, Int. J. Math. Math. Sci. **25** (2001), no. 7, 451–465.
- [14] Kaijser S., Sunehag P., *Interpolation of subspaces and the unit problem*, Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics (Lund, 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 345–353.
- [15] Astashkin S. V., Semenov E. M., Sukochev F. A., *The Banach-Saks p -property* (предложено к опубликованию).
- [16] Brudnyi Yu. A., Krugljak N. Ya., *Interpolation functors and interpolation spaces*. Vol. 1, North-Holland Math. Library, vol. 47, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1991.

- [17] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

Самарский государственный университет
443011, Самара
ул. Академика Павлова, 1
Россия
E-mail: `astashkn@ssu.samara.ru`

Поступило ???