



УДК 517.5+517.982

О ПРОСТРАНСТВЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ, ПОРОЖДЕННОМ СИСТЕМОЙ РАДЕМАХЕРА

С. В. Асташкин

В работе рассматривается пространство мультипликаторов симметричного пространства относительно системы Радемахера. Найдены достаточные условия, при которых оно совпадает с пространством L_∞ (с эквивалентностью норм). Условия формулируются в терминах теории интерполяции операторов и являются существенно более слабыми, нежели условия, полученные недавно при решении этой задачи другими авторами.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть X – симметричное пространство функций, измеримых на $[0, 1]$. Следуя работе [1], через $\Lambda(R, X)$ обозначим множество всех измеримых $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $fg \in X$ для всех функций вида $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t)$, где $r_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, – функции Радемахера, т.е.

$$r_k(t) = \text{sign} \sin(2^k \pi t) \quad (t \in [0, 1]).$$

Тогда $\Lambda(R, X)$ – банахова функциональная решетка относительно нормы

$$\|f\|_\Lambda = \sup \left\{ \|fg\|_X : g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k \in X, \quad \|g\|_X \leq 1 \right\}.$$

Иначе говоря, это пространство мультипликаторов в X , ограниченно действующих из замкнутой линейной оболочки $[r_k]_X$, натянутой на систему Радемахера, во все пространство.

В [1] было показано, что для широкого класса симметричных пространств X таких, что $[r_k]_X$ изоморфно l_2 (необходимые и достаточные условия, при которых это выполнено, были получены в работе [2]), пространство $\Lambda(R, X)$ не симметрично. Точнее, из принадлежности функции $f(t)$ к $\Lambda(R, X)$, вообще говоря, не следует, что к $\Lambda(R, X)$ принадлежит и невозрастающая перестановка ее модуля $f^*(t)$. В то же время оказалось, что при некоторых условиях $\Lambda(R, X) = L_\infty$ с эквивалентностью норм [3], [4]. Для формулировки этих условий нам понадобится следующий квазилинейный оператор, введенный ранее также при изучении системы Радемахера в работе [5].

На множестве всех измеримых функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определим оператор

$$Qf(t) = \left\{ \frac{1}{\theta(t)} \int_0^t (f^*(s))^2 d\theta(s) \right\}^{1/2}, \quad \text{где } \theta(t) = \ln^{-1} \frac{e}{t}. \quad (1)$$

Сформулируем теперь основное утверждение из работ [3], [4].

ТЕОРЕМА (Г. П. Курбера, В. А. Родин). *Если оператор Q ограниченно действует в симметричном пространстве X , то*

$$\Lambda(R, X) = L_\infty \quad (2)$$

с эквивалентностью норм.

Здесь равенство (2) будет доказано для пространств, интерполяционных относительно банаховой пары (L_∞, L_N) , где L_N – пространство Орлича, построенное по функции $N(u) = e^{u^2} - 1$ (теорема 1). В доказательстве мы используем описание подпространств вида $[r_k]_X$ для таких пространств, полученное ранее в работах автора [6], [7]. Условие интерполяционности относительно банаховой пары (L_∞, L_N) менее ограничительно, нежели ограниченность оператора Q (см. теорему 2 и замечание 1). Поэтому теорема 1 усиливает приведенную выше теорему Курбера и Родина.

2. Определения и обозначения. Подробное изложение теории симметричных функциональных пространств и теории интерполяции операторов можно найти, например, в монографиях [8]–[10].

Если функция $x = x(t)$ измерима на $[0, 1]$, то по определению

$$n_{|x|}(\tau) = \mu\{t \in [0, 1]: |x(t)| > \tau\} \quad \text{для } \tau > 0$$

(μ – мера Лебега). Функции $x(t)$ и $y(t)$ называются *равноизмеримыми*, если $n_{|x|}(\tau) = n_{|y|}(\tau)$, $\tau > 0$. В частности, любая функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей перестановкой

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0: n_{|x|}(\tau) < t\}.$$

Банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется *симметричным пространством* (СП), если выполнены следующие условия:

- а) из того, что $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$, следует, что $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$;
- б) если $y = y(t) \in X$ и функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ равноизмеримы, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$.

Фундаментальная функция СП X определяется равенством $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$, где, как обычно, $\chi_G(s) = 1$, если $s \in G$, и $\chi_G(s) = 0$, если $s \notin G$. Напомним, что для любого СП функция $\varphi_X(t)$ квазивогнута на $(0, 1]$ [8, с. 137], т.е. неотрицательна, возрастает, а функция $\varphi_X(t)/t$ убывает на этом отрезке. Как известно [8, с. 70], каждая квазивогнутая функция $f(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\tilde{f}(t)$, точнее,

$$f(t) \leq \tilde{f}(t) \leq 2f(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

В каждом СП X непрерывен оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)\chi_{[0,1]}(t/\tau)$, $\tau > 0$ [8, с. 131–133]. Более того, для всех $\tau > 0$

$$\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau). \quad (4)$$

Важным примером СП является пространство Орлича. Пусть $M(t)$ – возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{L_M} = \inf\left\{u > 0: \int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leq 1\right\}$$

конечна. В частном случае $M(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, получаем обычные L_p -пространства. Непосредственное вычисление показывает, что фундаментальная функция $\varphi_{L_M}(t) = 1/M^{-1}(1/t)$, где $M^{-1}(u)$ – функция, обратная к $M(u)$.

Пусть $\psi(t)$ – квазивогнутая функция на $[0, 1]$. *Пространство Марцинкевича* $M(\psi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\int_0^t x^*(s) ds}{\psi(t)} < \infty.$$

Заметим, что это пространство является сопряженным к пространству Лоренца $\Lambda(\tilde{\psi})$ [8, с. 152–154],

$$\|x\|_{\Lambda(\tilde{\psi})} = \int_0^1 x^*(s) d\tilde{\psi}(s).$$

Фундаментальная функция пространства $M(\psi)$ равна $t/\psi(t)$.

Пусть (X_0, X_1) – *банахова пара*, т.е. пара банаховых пространств, линейно и непрерывно вложенных в некоторое отделимое линейное топологическое пространство, $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$. Определим $\mathcal{H}$ -функционал Петре

$$\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, \quad x_0 \in X_0, \quad x_1 \in X_1 \}.$$

Этот функционал играет важную роль в теории интерполяции операторов и в некоторых других разделах анализа. При фиксированном $x \in X_0 + X_1$ $\mathcal{H}$ -функционал – возрастающая вогнутая функция относительно переменной t [9, гл. 3, лемма 3.1.1]. Если же зафиксировать $t > 0$, то $\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1)$ является нормой на сумме пространств $X_0 + tX_1$.

Банахово пространство X называется *интерполяционным относительно банаховой пары* (X_0, X_1) , если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и из ограниченности линейного оператора в пространствах X_0 и X_1 следует его ограниченность в X .

Одним из важнейших способов получения интерполяционных пространств является так называемый $\mathcal{H}$ -метод, основанный на использовании $\mathcal{H}$ -функционала Петре.

Пусть F – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей

$$a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty},$$

$F \supset l_{\infty} \cap l_{\infty}(2^{-k})$ (если $1 \leq p \leq \infty$ и $w_k > 0$, $k = 0, \pm 1, \dots$, то “весовое” пространство $l_p(w_k)$ состоит из всех $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ таких, что $(a_k w_k)_k \in l_p$ и $\|a\|_{l_p(w_k)} = \|(a_k w_k)\|_{l_p}$). Если (X_0, X_1) – произвольная банахова пара, то *пространство $\mathcal{H}$ -метода* $(X_0, X_1)_F^{\mathcal{H}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых последовательность

$$(\mathcal{H}(2^k, x; X_0, X_1))_k \in F,$$

а норма элемента в нем задается равенством

$$\|x\| = \|(\mathcal{H}(2^k, x; X_0, X_1))_k\|_F.$$

Нетрудно показать, что пространство $(X_0, X_1)_F^{\mathcal{H}}$ интерполяционно относительно пары (X_0, X_1) .

В частности, для $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ получим классические пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathcal{H}}$. Свойства их подробно рассматриваются в монографии [9].

В заключение скажем несколько слов об обозначениях. Выражение вида $F_1 \asymp F_2$ в дальнейшем означает, что для некоторых $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ выполнены оценки $C_1 F_1 \leq F_2 \leq C_2 F_1$, причем константы C_1 и C_2 , как правило, не зависят от всех или части аргументов F_1 и F_2 .

3. Вспомогательные результаты. Получим сначала подходящее выражение для $\mathcal{H}$ -функционала $\mathcal{H}(t, f; L_\infty, L_N)$, где L_N – пространство Орлича, построенное по функции $N(u) = e^{u^2} - 1$.

Пусть $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ – две возрастающие вогнутые неотрицательные функции на $[0, 1]$. Ввиду [8, с. 165–166] норма пересечения $\Lambda(\psi) \cap t^{-1}\Lambda(\varphi)$, равная по определению $\max(\|f\|_{\Lambda(\psi)}, t^{-1}\|f\|_{\Lambda(\varphi)})$, эквивалентна норме пространства Лоренца $\Lambda(\max(\psi, t^{-1}\varphi))$. Поэтому, переходя к сопряженным пространствам [8, с. 27] и учитывая (3), получаем

$$\mathcal{H}(t, f; M(\psi), M(\varphi)) \asymp \sup_{0 < u \leq 1} \frac{\int_0^u f^*(s) ds}{\max(\psi(u), t^{-1}\varphi(u))} \quad (5)$$

с константами, не зависящими от $t > 0$ и $f \in M(\psi) + M(\varphi)$.

ЛЕММА 1. С константами, не зависящими от $t > 0$ и $f \in L_N$, выполнено

$$\mathcal{H}(t, f; L_\infty, L_N) \asymp t \sup_{0 < u \leq \min(1, 2^{1-t^2})} \left(f^*(u) \log_2^{-1/2} \frac{2}{u} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что пространство L_N одновременно является (с эквивалентностью норм) пространством Марцинкевича $M(\psi_1)$ для $\psi_1(u) = u \log_2^{1/2}(2/u)$ [11]. Кроме того, очевидно, $L_\infty = M(\psi_0)$, $\psi_0(u) = u$. Поэтому из соотношения (5) следует, что

$$\mathcal{H}(t, f; L_\infty, L_N) \asymp \|f\|_{M(\psi_t)}, \quad \text{где } \psi_t(u) = u \max \left\{ 1, t^{-1} \log_2^{1/2} \frac{2}{u} \right\}. \quad (6)$$

Пусть $\mathcal{M}_{\psi_t}(s)$ – функция растяжения функции ψ_t , т.е.

$$\mathcal{M}_{\psi_t}(s) = \sup_{0 < u \leq \min(1, 1/s)} \frac{\psi_t(su)}{\psi_t(u)}.$$

Представим

$$\mathcal{M}_{\psi_t} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sup_{0 < u \leq 1} F_t(u), \quad \text{где } F_t(u) = \frac{\max(1, t^{-1} \log_2^{1/2}(4/u))}{\max(1, t^{-1} \log_2^{1/2}(2/u))}.$$

Так как $\log_2^{1/2}(4/u) \leq \sqrt{2} \log_2^{1/2}(2/u)$, то $F_t(u) \leq \sqrt{2}$. Поэтому для любого $t > 0$ имеем $\mathcal{M}_{\psi_t}(1/2) \leq 1/\sqrt{2}$ и, значит,

$$\begin{aligned} \|f\|_{M(\psi_t)} &\asymp \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ f^*(u) \min \left(1, t \log_2^{-1/2} \frac{2}{u} \right) \right\} \\ &= t \sup_{0 < u \leq \min(1, 2^{1-t^2})} \left(f^*(u) \log_2^{-1/2} \frac{2}{u} \right) \end{aligned}$$

с константами, не зависящими от $t > 0$ и f [8, с. 156]. Следовательно, ввиду (6) лемма доказана.

Далее нам понадобится следующее соотношение для $\mathcal{K}$ -функционала $\mathcal{K}_{1,2}(t, a) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$, построенного по банаховой паре (l_1, l_2) , с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $t > 0$ [11]:

$$c \left(\sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^\infty (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right) \leq \mathcal{K}_{1,2}(t, a) \leq \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^\infty (a_i^*)^2 \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где $(a_i^*)_{i=1}^\infty$ – убывающая перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^\infty$, а $[z]$ – целая часть числа z .

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $b_n = (1/n) \sum_{k=1}^n e_k$, где e_k – стандартные орты в пространстве числовых последовательностей.

ЛЕММА 2. *С константами, не зависящими от $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{K}_{1,2}(t, b_n) \asymp \min \left(1, \frac{t}{\sqrt{n}} \right). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $t \in \mathbb{N}$. Тогда, если $t^2 \geq n$, то (8) – непосредственное следствие соотношения (7). Пусть теперь $t^2 < n$. Тогда ввиду (7)

$$c(v^2 + v(1 - v^2)^{1/2}) \leq \mathcal{K}_{1,2}(t, b_n) \leq v^2 + v(1 - v^2)^{1/2},$$

где $v = t/\sqrt{n} < 1$. В случае $v \leq 1/\sqrt{2}$ отсюда следует

$$\frac{c}{\sqrt{2}}v \leq \mathcal{K}_{1,2}(t, b_n) \leq v^2 + v \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) v.$$

Если же $1/\sqrt{2} < v < 1$, то опять

$$\frac{c}{\sqrt{2}}v \leq cv^2 \leq \mathcal{K}_{1,2}(t, b_n) \leq 2v.$$

Тем самым (8) доказано для натуральных, а значит, и для всех $t \geq 1$ ввиду квазивогнутости $\mathcal{K}$ -функционала по t . Осталось заметить, что при $0 < t \leq 1$ по определению $\mathcal{K}$ -функционала

$$\mathcal{K}_{1,2}(t, b_n) = t \|b_n\|_{l_2} = v.$$

Лемма доказана.

4. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Если X – пространство, интерполяционное относительно банаховой пары (L_∞, L_N) , то $\Lambda(R, X) = L_\infty$ (с эквивалентностью норм).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_n(t) = \chi_{[0, 2^{-n}]}(t)$, $n \in \mathbb{N}$. По лемме 1 с константами, не зависящими от $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\mathcal{K}(2^k, h_n; L_\infty, L_N) \asymp 2^k \min\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2^k}\right).$$

Следовательно, если, как и ранее, $b_n = (1/n) \sum_{i=1}^n e_i$, то ввиду леммы 2

$$\mathcal{K}(2^k, h_n; L_\infty, L_N) \asymp \mathcal{K}_{1,2}(2^k, b_n) \quad (9)$$

с константами, не зависящими от $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

По условию пространство X – интерполяционное пространство относительно банаховой пары (L_∞, L_N) и, значит,

$$X = (L_\infty, L_N)_F^{\mathcal{K}}$$

для некоторой банаховой решетки F двусторонних числовых последовательностей [6], [7]. Поэтому если $\varphi_X(t)$ – фундаментальная функция X , то из (9) следует

$$\varphi_X(2^{-n}) \asymp \|(\mathcal{K}(2^k, h_n; L_\infty, L_N))_k\|_F \asymp \|(\mathcal{K}_{1,2}(2^k, b_n))_k\|_F.$$

С другой стороны [6], [7],

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \right\|_X \asymp \|(\mathcal{K}_{1,2}(2^k, b_n))_k\|_F.$$

Таким образом,

$$\left\| \sum_{i=1}^n r_i \right\|_X \asymp n \varphi_X(2^{-n}). \quad (10)$$

Пусть теперь $G \subset [0, 1]$ – произвольное измеримое множество, $\mu(G) > 0$. Так как почти все точки измеримого множества – точки плотности относительно меры Лебега, можно найти двоичный интервал I такой, что

$$\mu(G \cap I) \geq \frac{1}{2} \mu(I). \quad (11)$$

Предположим, что ранг I равен n , т.е. $I = [(i-1)2^{-n}, i2^{-n}]$ для некоторого $i = 1, 2, \dots, 2^n$. Выберем $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, так, что при всех $t \in I$ выполнено $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i r_i(t) = n$. Тогда, если $K = \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i r_i \right\|_X$, то из определения $\Lambda(R, X)$, симметричности X , неравенства $\|\sigma_\tau\|^{-1} \leq \|\sigma_{\tau-1}\|$, а также из соотношений (4) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \|\chi_G\|_\Lambda &\geq \|\chi_{G \cap I}\|_\Lambda \geq \frac{1}{K} \left\| \chi_{G \cap I} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i r_i \right\|_X \\ &\geq \frac{1}{K} \|\sigma_2\|_{X \rightarrow X}^{-1} \left\| \chi_I \sum_{i=1}^n \varepsilon_i r_i \right\|_X \geq \frac{n}{2K} \varphi_X(2^{-n}). \end{aligned}$$

В силу определения функций Радемахера и симметричности пространства X

$$K = \left\| \sum_{i=1}^n r_i \right\|_X.$$

Поэтому из последнего неравенства и (10) следует

$$\|\chi_G\|_{\Lambda(R, X)} \geq c_0, \quad (12)$$

где константа $c_0 > 0$ не зависит от множества G .

Так как $L_\infty \subset \Lambda(R, X)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что пространство мультипликаторов $\Lambda(R, X)$ не содержит ни одной неограниченной функции. Предположим, что $f \in \Lambda(R, X)$ и неограничена. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ мера множества

$$G_n = \{t \in [0, 1]: |f(t)| \geq n\}$$

положительна. Поэтому, так как $\Lambda(R, X)$ – банахова решетка, из (12) следует

$$\|f\|_\Lambda \geq n \|\chi_{G_n}\|_\Lambda \geq n c_0 \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Последнее противоречит тому, что $f \in \Lambda(R, X)$. Теорема доказана.

При изучении вопросов, связанных с системой Радемахера в СП (см. [3]–[5]) весьма полезным оказался квазилинейный оператор Q , определенный соотношением (1).

В [4] показано, что если оператор Q ограниченно действует в СП X , то $L_\infty \subset X \subset L_N$. Здесь мы докажем более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Если оператор Q ограниченно действует в СП X , то пространство X интерполяционно относительно банаховой пары (L_∞, L_N) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем пространство Лоренца $\Lambda_2(\theta)$ с нормой

$$\|f\|_{\Lambda_2(\theta)} = \left\{ \int_0^1 (f^*(s))^2 d\theta(s) \right\}^{1/2}, \quad \theta(t) = \ln^{-1} \frac{e}{t},$$

а также класс Σ всех линейных операторов, ограниченных из L_∞ в L_∞ и из $\Lambda_2(\theta)$ в L_N . Покажем, что линейный оператор $T \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что при всех $f \in \Lambda_2(\theta)$ и $0 < t \leq 1$

$$(Tf)^*(t) \leq C \mathcal{K} \left(\log_2^{1/2} \frac{2}{t}, f; L_\infty, \Lambda_2(\theta) \right). \quad (13)$$

Как уже говорилось в доказательстве леммы 1, пространство L_N совпадает с пространством Марцинкевича $M(\psi_1)$, $\psi_1(u) = u \log_2^{1/2}(2/u)$. Более того (см. [8, с. 156] или лемму 1),

$$\|f\|_{L_N} \asymp \sup_{0 < s \leq 1} \left(f^*(s) \log_2^{-1/2} \frac{2}{s} \right). \quad (14)$$

Предположим, что $T \in \Sigma$. Представим $f \in \Lambda_2(\theta)$ в виде

$$f = f_0 + f_1, \quad \text{где } f_0 \in L_\infty, \quad f_1 \in \Lambda_2(\theta). \quad (15)$$

Учитывая (4) и (14), для каждого $t > 0$ получаем

$$\begin{aligned} (Tf)^*(t) &\leq (|Tf_0| + |Tf_1|)^*(t) \leq (Tf_0)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tf_1)^*\left(\frac{t}{2}\right) \\ &\leq C_1 \max(\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty}, \|T\|_{\Lambda_2(\theta) \rightarrow L_N}) \left(\|f_0\|_{L_\infty} + \left(\log_2^{1/2} \frac{2}{t}\right) \|f_1\|_{\Lambda_2(\theta)} \right). \end{aligned}$$

После перехода к точной нижней грани по всем представлениям (15) приходим к (13) с подходящей константой. Обратное утверждение следует сразу из того, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\left(\log_2^{1/2} \frac{2}{t}, f; L_\infty, \Lambda_2(\theta)\right) &\leq \|f\|_{L_\infty}, \quad f \in L_\infty, \\ \mathcal{K}\left(\log_2^{1/2} \frac{2}{t}, f; L_\infty, \Lambda_2(\theta)\right) &\leq \left(\log_2^{1/2} \frac{2}{t}\right) \|f\|_{L_N}, \quad f \in L_N. \end{aligned}$$

Стандартные рассуждения (см., например, [9, гл. 5, теорема 5.2.1]) показывают, что

$$\mathcal{K}(t, f; L_\infty, \Lambda_2(\theta)) \asymp t \left\{ \int_0^{2^{1-t^2}} (f^*(s))^2 d\theta(s) \right\}^{1/2}.$$

Поэтому ввиду (1) неравенство (13) эквивалентно следующему неравенству:

$$(Tf)^*(t) \leq CQf(t). \quad (16)$$

Заметим, что фундаментальная функция $\varphi_{\Lambda_2(\theta)}(t) = \theta^{1/2}(t) \asymp t/\psi_1(t)$. Следовательно [8, с. 160–162], выполнены непрерывные вложения

$$\Lambda\left(\frac{t}{\psi_1(t)}\right) \subset \Lambda_2(\theta) \subset M(\psi_1) = L_N. \quad (17)$$

Предположим теперь, что оператор Q ограничен в СП X . Если T – линейный оператор, ограниченный в L_∞ и L_N , то ввиду вложений (17) $T \in \Sigma$, и значит, из неравенства (16) следует ограниченность T в X . Таким образом, пространство X интерполяционно относительно пары (L_∞, L_N) .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение, обратное к только что доказанному, неверно. Например, пространство $X = L_N$, разумеется, интерполяционно относительно банаховой пары (L_∞, L_N) , но, как нетрудно проверить [4], оператор Q не ограничен в нем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 2 показывает, что теорема 1, доказанная в этой работе, является усилением теоремы Курберы и Родина [3], [4], сформулированной во введении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Curbera G. P. A note on function spaces generated by Rademacher series // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1997. V. 40. P. 119–126.
- [2] Rodin V. A., Semenov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Analysis Math. 1975. V. 1. №3. P. 207–222.
- [3] Курбера Г. П., Родин В. А. О мультипликаторах на множестве рядов Радемахера // Тезисы 5-ой Казанской межд. школы-конференции. Казань, 2001. С. 148–149.
- [4] Curbera G. P., Rodin V. A. Multiplication operators on the space of Rademacher series in rearrangement invariant spaces // Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear).
- [5] Асташкин С. В., Семенов Е. М. Коэффициенты Фурье–Радемахера // Докл. РАН. 2000. Т. 175. №1. С. 7–9.
- [6] Асташкин С. В. О рядах по системе Радемахера, “близких” к L_∞ // Функцион. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. №3. С. 62–65.
- [7] Асташкин С. В. Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. №1. С. 18–35.
- [8] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [9] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [10] Lorentz G. G. Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
- [11] Holmstedt T. Interpolation of quasi-normed spaces // Math. Scand. 1970. V. 26. P. 177–199.

Самарский государственный университет

Поступило
05.07.2002