



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В L_p -ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Асташкин, Л. Малигранда

1. Введение. Пусть X – симметричное пространство (СП) функций, измеримых на $[0, 1]$. Если для некоторых $1 \leq p < q \leq \infty$ индексы Бойда пространства X удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{q} < \alpha(X) \leq \beta(X) < \frac{1}{p},$$

то X интерполяционно между пространствами L_p и L_q . Последнее означает, что любой линейный оператор T , ограниченно действующий в L_p и L_q , ограничен в пространстве X . Эта теорема была доказана Д. В. Бойдом [1] в 1967 году при дополнительном предположении, что X имеет свойство Фату (см. также [2] и [3, теорема 5.16]). В случае, когда пространство X сепарабельно или имеет свойство Фату, см. [4, теорема 2.b.11]. Комбинируя оценки для максимального оператора Кальдерона и лемму Е. М. Семенова [5, гл. 2, лемма 4.7], теорему Бойда можно доказать и для произвольных СП. Неявно этот результат содержится также в теореме 6.12 из [5, гл. 2].

В случае $q = \infty$ условие теоремы Бойда можно ослабить. А именно, интерполяционность пространства X между L_p и L_∞ является следствием лишь односторонней оценки:

$$\beta(X) < \frac{1}{p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

(см. [6, теорема 4.6], где это доказано даже для липшицевых операторов).

В связи с этим Семенов поставил вопрос, не верен ли аналогичный результат для другого конца шкалы СП, т.е. для интерполяции между пространствами L_1 и L_p :

Пусть X – СП на $[0, 1]$ со свойством Фату или абсолютно непрерывной нормой такое, что нижний индекс Бойда $\alpha(X) > 1/p$, $1 < p < \infty$. Следует ли отсюда, что X интерполяционно между L_1 и L_p ?

Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Удалось доказать даже более сильный результат. Если СП X интерполяционно между L_1 и L_∞ и $\alpha(X) > 1/p$, то X интерполяционно также между L_1 и L_p .

В последней части работы приведена новая интерполяционная теорема для операторов, имеющих сильный тип $(1, 1)$ и слабый тип (p, p) , $1 < p < \infty$.

Напомним сначала используемые в дальнейшем определения и обозначения.

Работа была поддержана грантом Королевской Шведской Академией наук по программе сотрудничества Швеции с республиками бывшего СССР, проект № 351156. Второй автор был частично поддержан грантом национального научного совета Швеции (NFR) M5105-20005228/2000. Первый автор благодарен математическому факультету технологического университета г. Лулео, Швеция, за гостеприимство во время его визита в Лулео.

2. Определения и обозначения. Банахово пространство X функций, измеримых на $[0, 1]$, называется *симметричным* (СП), если из условий $x^*(t) \leq y^*(t)$ для $t \in [0, 1]$ и $y \in X$ следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Здесь и далее x^* – невозрастающая перестановка функции $|x|$. Для любого СП X на $[0, 1]$ выполнены непрерывные вложения $L_\infty[0, 1] \subset X \subset L_1[0, 1]$.

Для каждого $s > 0$ в любом СП X определен и ограничен оператор *растяжения* $\sigma_s x(t) = x(t/s)\chi_{[0,1]}(t/s)$, $t \in [0, 1]$ (χ_E – характеристическая функция множества $E \subset [0, 1]$). Более того, $\|\sigma_s\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, s)$. Важной характеристикой СП X являются *нижний и верхний индексы Бойда*:

$$\alpha_X = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_s\|_{X \rightarrow X}}{\ln s}, \quad \beta_X = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_s\|_{X \rightarrow X}}{\ln s}.$$

СП X с нормой $\|\cdot\|_X$ имеет

- (а) *свойство Фату*, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ такой, что $x_n \geq 0$, $x_n \nearrow x$ и $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$, выполнено $x \in X$ и $\|x_n\|_X \nearrow \|x\|_X$;
- (б) *абсолютно непрерывную норму*, если для произвольного $x \in X$ и любой последовательности $\{x_n\}$ функций, измеримых на $[0, 1]$, таких, что $|x| \geq x_n \geq 0$ и $x_n \downarrow 0$, получаем $\|x_n\|_X \rightarrow 0$.

Заметим, что СП X сепарабельно тогда и только тогда, когда X имеет абсолютно непрерывную норму. Из теоремы Кальдерона–Митягина [5, гл. 2, теорема 4.3] следует, что СП X , которое имеет свойство Фату или сепарабельно, является *интерполяционным* между пространствами L_1 и L_∞ . Последнее означает, что любой линейный оператор T , ограниченный в L_1 и L_∞ , ограничен в X и $\|T\|_{X \rightarrow X} \leq C \max(\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1}, \|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty})$ для некоторого $C \geq 1$.

Наиболее важные примеры СП – пространства $L_{p,q}$, пространства Лоренца, Марцинкевича и Орлича – имеют свойство Фату. Типичными сепарабельными СП являются пространства M_φ^0 и E_Φ – замыкания L_∞ в пространстве Марцинкевича M_φ и пространстве Орлича L_Φ соответственно. Определения этих пространств, а также другие общие свойства СП см. в монографиях [3]–[5].

3. Интерполяционные пространства между L_1 и L_p , $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$. Если СП X интерполяционно между L_1 и L_∞ и $\alpha(X) > 1/p$, то X интерполяционно также между L_1 и L_p .

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Если $T: L_1 \rightarrow L_1$ – линейный ограниченный оператор такой, что $T = T|_{L_p}: L_p \rightarrow L_p$ тоже ограничен, то

$$K(t^{1-1/p}, Tx; L_1, L_p) \leq C_1 K(t^{1-1/p}, x; L_1, L_p) \leq C_1 K(t^{1-1/p}, x; L_1, L_{p,1})$$

для любого $x \in L_1$ и всех $0 < t \leq 1$, где $L_{p,1}$ – пространство Лоренца с нормой

$$\|x\|_{p,1} = \int_0^1 t^{1/p-1} x^*(t) dt.$$

Отсюда по формуле Хольмстедта [7, теорема 4.1 и 4.2] мы получаем оценку

$$\int_0^t (Tx)^*(s) ds \leq C_2 \left(\int_0^t x^*(s) ds + t^{1-1/p} \int_t^1 s^{1/p-1} x^*(s) ds \right) \quad (1)$$

для любого $x \in L_1$ и всех $0 < t \leq 1$. По теореме Фубини для линейного оператора

$$Mx(t) = t^{-1/p} \int_t^1 s^{1/p-1} x(s) ds, \quad 0 < t \leq 1, \quad (2)$$

находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^t (Mx^*)^*(s) ds &= \frac{p}{p-1} \left(\int_0^t x^*(u) du + t^{1-1/p} \int_t^1 u^{1/p-1} x^*(u) du \right) \\ &\approx K(t^{1-1/p}, x; L_1, L_{p,1}). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (1)

$$\int_0^t (Tx)^*(s) ds \leq C_3 \int_0^t (Mx^*)^*(s) ds \quad (3)$$

для всех $0 < t \leq 1$.

Затем мы доказываем, что

$$\|Mx^*\| \leq C_4 \|x\|, \quad x \in X, \quad (4)$$

для произвольного СП X такого, что $\alpha(X) > 1/p$. Заметим, что ранее оценка (4) была получена Бойдом (см. [8, теорема 1], [2, лемма 2] и [3, теорема 5.15]) в случае, когда СП X имеет свойство Фату. Он доказал, что оператор M ограничен в таком пространстве X , если и только если нижний индекс Бойда $\alpha(X) > 1/p$. Мы получаем (4) в общем случае.

Далее по теореме Кальдерона–Митягина [5, гл. 2, теорема 4.3] СП X интерполяционно между пространствами L_1 и L_∞ тогда и только тогда, когда для некоторой константы $B > 0$ выполнено условие: если $x \in X$, $y \in L_1$ и

$$\int_0^t y^*(s) ds \leq \int_0^t x^*(s) ds \quad \text{для всех } 0 < t \leq 1,$$

то $y \in X$ и $\|y\|_X \leq B\|x\|_X$. Поэтому из оценок (3), (4) следует: если $x \in X$, то $Tx \in X$ и $\|Tx\|_X \leq C_5\|x\|_X$. Таким образом, X интерполяционно между L_1 и L_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие интерполяционности пространства X между L_1 и L_∞ в теореме 1 не может быть опущено. Приведем пример, показывающий это.

Рассмотрим модификацию пространства Руссу (см. [9, теорема 1] или [5, гл. 2, лемма 5.5]). Пусть ψ – возрастающая вогнутая функция на $(0, 1]$ такая, что

$$\psi(0^+) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$$

и ее верхний показатель растяжения

$$\delta_\psi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \bar{\psi}(t)}{\ln t} = 0,$$

где $\bar{\psi}(t) = \sup_{0 < s \leq 1, 0 < st \leq 1} \psi(st)/\psi(s)$. Этим условиям удовлетворяет, например, функция $\psi(t) = \ln^{-1}(e^2/t)$.

В пространстве Марцинкевича M_ψ ,

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds$$

рассмотрим линейное подпространство

$$\tilde{G} = \left\{ x \in L_1 : \sup_{0 < t \leq 1} \frac{x^*(t)}{\psi'(t)} < \infty \right\}$$

и через G обозначим замыкание $\tilde{G}$ в M_ψ . Нетрудно проверить, что G – СП на $[0, 1]$. Так как $\|\sigma_t\|_{G \rightarrow G} = \|\sigma_t\|_{M_\psi \rightarrow M_\psi} = t\psi(1/t)$, то $\alpha(G) = \alpha(M_\psi) = 1 - \delta_\psi = 1 > 1/p$ для любого $1 < p < \infty$. Однако пространство G не интерполяционно между L_1 и L_∞ (см. [9, теорема 2] или [5, гл. 2, лемма 5.5]) и, тем более, между L_1 и L_p .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, можно получить и более общий результат. Пусть $1 \leq r < p < \infty$. Если X – интерполяционное пространство между L_r и L_∞ и $\alpha(X) > 1/p$, то X интерполяционно между L_r и L_p . Дополнительно нужно лишь проверить, что для некоторой константы $B > 0$, не зависящей от $x \in L_r$ и $0 < t \leq 1$, выполнено

$$\int_0^t (Tx)^*(s)^r ds \leq B \left[\int_0^t x^*(s)^r ds + t Mx^*(t)^r \right] \leq B \int_0^t [x^*(s) + Mx^*(s)]^r ds,$$

а затем использовать К-монотонность пары (L_r, L_∞) [10, теорема 2].

4. Интерполяция операторов сильного типа $(1, 1)$ и слабого типа (p, p) . Линейный оператор T , определенный на $L_1[0, 1]$, называется оператором *слабого типа* (p, p) , $1 \leq p < \infty$, если T ограниченно действует из $L_{p,1}$ в $L_{p,\infty}$, где пространство Марцинкевича $L_{p,\infty}$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, для которых конечна квазинорма

$$\|x\|_{p,\infty} = \sup_{t \in [0,1]} t^{1/p} x^*(t).$$

Ограниченный линейный оператор $T: L_p \rightarrow L_p$ называется оператором *сильного типа* (p, p) . Легко видеть, что каждый оператор сильного типа (p, p) имеет также слабый тип (p, p) , но обратное не верно, так как $L_{p,1} \subset L_p \subset L_{p,\infty}$.

В 1969 году Бойд [2] доказал, что для того, чтобы любой линейный оператор T слабого типа (p, p) и (q, q) , $1 \leq p < q < \infty$, был ограничен в СП X , необходимо и достаточно выполнение условия: $1/q < \alpha(X) \leq \beta(X) < 1/p$. Он получил этот результат при дополнительном предположении, что X имеет свойство Фату (см. также [3, теорема 5.16], [4, теорема 2.b.11 и 2.b.13]). Тем не менее теорема Бойда остается верной и для произвольных СП (см. введение или теорему 6.12 в [5, гл. 2]). В случае $q = \infty$, т.е. когда рассматривается класс всех линейных операторов T сильного типа (∞, ∞) и слабого типа (p, p) , $1 \leq p < \infty$, ограниченность любого такого оператора в X эквивалентна односторонней оценке $\beta(X) < 1/p$ (см. [6, теорема 4.6], а также [11, замечание 5.9(a)]). Аналогичный результат можно доказать и для класса линейных операторов, ограниченных в L_1 и имеющих слабый тип (p, p) , $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$. Для того, чтобы любой линейный оператор T сильного типа $(1, 1)$ и слабого типа (p, p) одновременно был ограничен в СП X , необходимо и достаточно выполнение условий: X интерполяционно между L_1 и L_∞ и $\alpha(X) > 1/p$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Достаточность следует из доказательства теоремы 1, так как оценка (1) по-прежнему верна. Нужно только дополнительно проверить, что при условии $\alpha(X) > 1/p$ выполнено $L_{p,\infty} \subset X$.

Необходимость. Оператор M имеет сильный тип $(1, 1)$ и слабый тип (p, p) . Значит, по предположению M ограничен в X . Если $0 < \varepsilon < 1/\|M\|_{X \rightarrow X}$, то оператор $(I_X - \varepsilon M)^{-1}$ существует и тоже ограничен в X (I_X – тождественный оператор). Кроме того,

$$(I_X - \varepsilon M)^{-1} x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n M^n x(t),$$

где ряд сходится в операторной норме и M^n обозначает n -ю степень M . Так как

$$M^n x(t) = t^{-1/p} \int_t^1 s^{1/p-1} \frac{\ln^{n-1}(s/t)}{(n-1)!} x(s) ds,$$

то оператор $\widetilde{M}x(t) = M(I_X - \varepsilon M)^{-1}x(t)$, также ограниченный в X , имеет следующий вид:

$$\widetilde{M}x(t) = t^{-1/p} \int_t^1 s^{1/p-1} \left(\frac{s}{t}\right)^\varepsilon x(s) ds.$$

Тогда

$$\widetilde{M}x^*(t) \geq \sigma_\tau x^*(t) \frac{p}{1+\varepsilon p} \tau^{-1/p-\varepsilon} (1 - \tau^{1/p+\varepsilon}).$$

Поэтому

$$\|\sigma_\tau x\| \leq \left(\frac{1}{p} + \varepsilon\right) \frac{\tau^{1/p+\varepsilon}}{1 - \tau^{1/p+\varepsilon}} \|\widetilde{M}\|_{X \rightarrow X} \|x\|,$$

откуда

$$\alpha(X) \geq \frac{1}{p} + \varepsilon > \frac{1}{p}.$$

Осталось показать, что СП X интерполяционно между L_1 и L_∞ . Если линейный оператор $T: L_1 \rightarrow L_1$ и $T = T|_{L_\infty}: L_\infty \rightarrow L_\infty$, то по теореме Рисса–Торина T имеет сильный, а значит, и слабый тип (p, p) . Но тогда по условию T ограничен в X , и доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 2 может быть обобщена следующим образом (см. замечание 2). Пусть $1 \leq r < p < \infty$. Для того, чтобы любой линейный оператор T , имеющий сильный тип (r, r) и слабый тип (p, p) одновременно, был ограничен в СП X , необходимо и достаточно выполнение условий: X интерполяционно между L_r и L_∞ и $\alpha(X) > 1/p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теоремы 1 и 2 справедливы также для СП на полуоси $(0, \infty)$. В этом случае необходимо лишь дополнительно проверить, что из условия $\alpha(X) > 1/p$ следует $L_1 \cap L_{p,\infty} \subset X \subset L_1 + L_{p,1}$. Кроме того, теоремы 1 и 2 верны для квазилинейных операторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boyd D. W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. P. 215–219.
2. Boyd D. W. // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1245–1254.
3. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. Boston: Academic Press, 1988.
4. Lindenstrauss Y., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, II. Function Spaces. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1979.
5. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
6. Maligranda L. // Studia Math. 1981. V. 71. P. 69–83.
7. Holmstedt T. // Math. Scand. 1970. V. 26. P. 177–199.
8. Boyd D. W. // Pacific J. Math. 1968. V. 24. P. 19–28.
9. Руссу Г. И. // Матем. исследования. 1969. Т. 4. С. 82–93.
10. Lorentz G. G., Shimogaki T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 159. P. 207–221.
11. Maligranda L. // Dissertationes Math. 1985. V. 234. P. 1–54.

(С. В. Асташкин) Самарский государственный университет,
(Л. Малигранда) Технологический университет г. Лулео, Швеция
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru, lech@sm.luth.se

Поступило
16.12.2002