

Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p -пространств

© 2003. С. В. Асташкин

1. Введение. В 1951 г. Яно доказал, что всякий линейный оператор T , определенный на $\bigcup_{p>1} L_p[0, 1]$ и при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяющий неравенствам

$$\left(\int_0^1 |Tf(s)|^p ds \right)^{1/p} \leq \frac{C}{(p-1)^\alpha} \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{1/p}$$

для всех p из какой-то правой полуокрестности точки 1 ($C > 0$ не зависит от p), является ограниченным оператором из пространства Зигмунда $L(\log L)^\alpha$ в пространство L_1 [1; 2, с. 179–181]. Верно и двойственное утверждение: если линейный оператор T ограничен в L_p для всех достаточно больших p и $\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O(p^\alpha)$ ($p \rightarrow \infty$) при некотором $\alpha > 0$, то T является ограниченным оператором из L_∞ в пространство $\text{Exp } L^{1/\alpha}$.

Позднее, в 90-е годы прошлого века, Яверс и Мильман предложили общие подходы к рассмотрению аналогичных ситуаций, заложив тем самым основы абстрактной теории экстраполяции операторов [3–5]. Основная цель этой теории заключается в изучении естественных предельных пространств, ассоциированных со шкалами пространств, а также оценок норм операторов, действующих в них. Библиографию по теории экстраполяции и ее многочисленным приложениям в анализе см. также в [3–5].

Используя сумму и пересечение семейств банаховых пространств в качестве конструкций (экстраполяционных функторов), приводящих к построению предельных пространств, Яверс и Мильман доказали ряд соотношений, из которых вытекают экстраполяционные теоремы об операторах, действующих в соответствующих пространствах. В частности, они получили следующую характеристику экстраполяционных пространств, фигурирующих в теоремах Яно (см., например, [5, р. 22–23]):

$$\Delta_{1 < p < \infty}(p^{-\alpha} L_p) = \text{Exp } L^{1/\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad (1)$$

и

$$\Sigma_{1 < p < \infty}((p-1)^{-\alpha} L_p) = L(\log L)^\alpha \quad (\alpha > 0). \quad (2)$$

Основная цель данной заметки состоит в том, чтобы показать возможность восстановления, по крайней мере в случае шкалы L_p -пространств, не только отдельных предельных пространств, но и соответствующих их естественным параметрам интерполяционных функционалов. Благодаря этому удастся ввести класс экстраполяционных функторов, равносильный вещественному методу интерполяции. Одновременно получены соотношения, более общие, чем (1) и (2), а также дано новое описание симметричных пространств, «близких» к пространствам L_∞ и L_1 .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением пространств функций, определенных на $[0, 1]$. Обобщения и усиления теорем Яно в случае функций, заданных на пространстве с σ -конечной мерой, см. в работах [6, 7].

2. Экспоненциальные пространства Орлича и шкала L_p -пространств. Банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется симметричным, если из того, что $g^*(t) \leq f^*(t)$ и $f(t) \in X$, следует, что $g(t) \in X$ и $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. Здесь и далее $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(t)|$ [8, с. 83].

Для любого симметричного пространства X имеют место непрерывные вложения $L_\infty \subset X \subset L_1$, где, как обычно, норма в L_∞ — это $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{s \in [0,1]} |f(s)|$ [8, с. 124–126].

Важный пример симметричных пространств — пространства Орлича. Если $N(t)$ — функция Орлича, т. е. возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $N(0) = 0$, то норма в пространстве Орлича L_N определяется следующим образом:

$$\|f\|_{L_N} = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 N\left(\frac{|f(t)|}{u}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

В случае $N(t) = t^p$ ($1 \leq p < \infty$) мы получаем обычные L_p -пространства, $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p}$. В дальнейшем нас будут интересовать экспоненциальные пространства Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi = L_{N_\Phi}$, где $N_\Phi(u) = e^{\Phi(u)} - 1$, а $\Phi(u)$ — функция Орлича. Как известно [9, 10], норма в $\operatorname{Exp} L^\Phi$ эквивалентна норме в пространстве Марцинкевича $M(\varphi)$,

$$\|f\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\int_0^t f^*(s) ds}{\varphi(t)},$$

построенном по вогнутой функции $\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1 + 1/u))$. Отсюда, в частности, следует, что $\operatorname{Exp} L^\Phi = \Lambda(\varphi)^*$ [8, с. 152–154], где $\Lambda(\varphi)$ — пространство Лоренца, $\|f\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 f^*(s) d\varphi(s)$. Для $\Phi(u) = u^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) получаем хорошо известные пространства Зигмунда $\operatorname{Exp} L^\alpha$ и $L(\log L)^{1/\alpha}$ соответственно [11].

Пусть X_k ($k = 1, 2, \dots$) — банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Тогда их пересечением называют банахово пространство $\Delta_{k=1}^\infty X_k$, состоящее из всех $x \in \bigcap_{k=1}^\infty X_k$, для которых $\|x\| = \sup_{k=1,2,\dots} \|x\|_{X_k} < \infty$. Предположим дополнительно, что существует банахово пространство X_0 , вложенное в $\mathcal{T}$, со следующим свойством: $X_k \subset X_0$ ($k = 1, 2, \dots$) с константой 1. Тогда сумма $\sum_{k=1}^\infty X_k$ определяется как множество всех $x \in X_0$, представимых в виде $x = \sum_{k=1}^\infty x_k$ ($x_k \in X_k$), где $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{X_k} < \infty$. Это пространство становится банаховым, если ввести на нем норму $\|x\| = \inf \sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{X_k}$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям x . И наконец, если X — банахово пространство и $b > 0$, то bX — это пространство X с нормой $\|x\|_{bX} = b\|x\|_X$.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольной функции Орлича Φ справедливы следующие равенства (с эквивалентностью норм):

$$\Delta_{j=1}^\infty \left(\frac{1}{\Phi^{-1}(2^j)} L_{2^j} \right) = \operatorname{Exp} L^\Phi, \quad (3)$$

$$\Sigma_{j=1}^\infty (\Phi^{-1}(2^j) L_{1+2^{-j}}) = \Lambda(\varphi). \quad (4)$$

В случае $\Phi(u) = u^{1/\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) равенства (3) и (4) переходят в дискретные аналоги равенств (1) и (2) соответственно.

3. Выражение интерполяционных функционалов пар $(L_\infty, \text{Exp } L^\Phi)$ и $(L_1, \Lambda(\varphi))$ через L_p -нормы. В теории интерполяции операторов [8, 12, 13] важную роль играют $\mathcal{H}$ - и $\mathcal{J}$ -функционалы Петре, которые для произвольной пары (X_0, X_1) и $t > 0$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) &= \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}, \\ \mathcal{J}(t, x; X_0, X_1) &= \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\}.\end{aligned}$$

Соотношения (3) и (4) показывают, что пространства $\text{Exp } L^\Phi$ и $\Lambda(\varphi)$ являются предельными для шкалы L_p -пространств. То же можно сказать и о пространствах L_∞ и L_1 , так как

$$\Delta_{j=1}^\infty L_{2^j} = L_\infty \quad \text{и} \quad \Sigma_{j=1}^\infty L_{1+2^{-j}} = L_1. \quad (5)$$

Аналогичное экстраполяционное описание имеет место и для интерполяционных функционалов пар $(L_\infty, \text{Exp } L^\Phi)$ и $(L_1, \Lambda(\varphi))$ (символ $\asymp$ будет означать существование двусторонних неравенств с константами, зависящими только от функции Орлича Φ).

ТЕОРЕМА 2. Если Φ — произвольная функция Орлича, то для любых $f \in \text{Exp } L^\Phi$ и $k = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{H}(2^k, f; L_\infty, \text{Exp } L^\Phi) \asymp \|f\|_{\Delta_{j=k}^\infty(2^{k-j} L_{\Phi(2^j)})} = \sup_{j \geq k} (2^{k-j} \|f\|_{\Phi(2^j)}).$$

ТЕОРЕМА 3. Если Φ — произвольная функция Орлича, то $\mathcal{J}(2^{-k}, g; L_1, \Lambda(\varphi)) \asymp \|g\|_{U_k}$, где $U_k = \Sigma_{j \geq k} (2^{j-k} L_{r_j})$, $r_j = 1 + [\Phi(2^j)]^{-1}$, для любых $g \in \Lambda(\varphi)$ и $k = 1, 2, \dots$

Заметим, что ввиду вложений $L_\infty \subset \text{Exp } L^\Phi$ и $\Lambda(\varphi) \subset L_1$ с константой 1 имеют место равенства $\mathcal{H}(t, f; L_\infty, \text{Exp } L^\Phi) = t \|f\|_{\text{Exp } L^\Phi}$ ($0 < t \leq 1$) и $\mathcal{J}(t, g; L_1, \Lambda(\varphi)) = t \|g\|_{\Lambda(\varphi)}$ ($t \geq 1$).

4. Экстраполяционные функторы на шкале L_p -пространств и вещественный метод интерполяции. Если E — банахова решетка двусторонних последовательностей вещественных чисел, то решетка $E(2^{-k})$ состоит из всех $a = (a_k)_{k=-\infty}^\infty$, таких, что $(a_k 2^{-k})_{k=-\infty}^\infty \in E$ и $\|a\|_{E(2^{-k})} = \|(a_k 2^{-k})\|_E$.

Далее, $\Delta(\vec{l}_\infty) = l_\infty \cap l_\infty(2^{-k})$, $\Sigma(\vec{l}_\infty) = l_\infty + l_\infty(2^{-k})$, $\Delta(\vec{l}_1) = l_1 \cap l_1(2^{-k})$, $\Sigma(\vec{l}_1) = l_1 + l_1(2^{-k})$ и $e^k = (e_j^k)$, $e_k^k = 1$, $e_j^k = 0$ ($j \neq k$), $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Φ — функция Орлича, а F — банахова решетка двусторонних последовательностей, $\Delta(\vec{l}_\infty) \subset F \subset \Sigma(\vec{l}_\infty)$. Тогда множество $\mathcal{L}_{\Phi, F}^\mathcal{H}$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций f , для которых последовательность $a_f = \Sigma_{k=0}^\infty \|f\|_{\Phi(2^k)} e^k$ принадлежит F .

Норма $\|f\|_{\mathcal{L}_{\Phi, F}^\mathcal{H}} = \|a_f\|_F$ превращает $\mathcal{L}_{\Phi, F}^\mathcal{H}$ в симметричное пространство. Так как ввиду (3) и первого равенства из (5) $\mathcal{L}_{\Phi, l_\infty}^\mathcal{H} = L_\infty$ и $\mathcal{L}_{\Phi, l_\infty(2^{-k})}^\mathcal{H} = \text{Exp } L^\Phi$, то $L_\infty \subset \mathcal{L}_{\Phi, F}^\mathcal{H} \subset \text{Exp } L^\Phi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Φ — функция Орлича, а G — банахова решетка двусторонних последовательностей, $\Delta(\vec{l}_1) \subset G \subset \Sigma(\vec{l}_1)$. Обозначим через $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$ множество всех измеримых на $[0, 1]$ функций g , таких, что существует представление $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ (сходимость в L_1), $g_k \in L_{r_k}$, $r_k = 1 + [\Phi(2^k)]^{-1}$, такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \in G$.

Тогда $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$ — симметричное пространство с нормой

$$\|g\|_{\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}} = \inf \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{r_k} e^{-k} \right\|_G,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям функции g указанного вида. Так как ввиду (4) и второго из равенств (5) $\mathcal{L}_{\Phi, l_1}^{\mathcal{J}} = L_1$ и $\mathcal{L}_{\Phi, l_1(2^{-k})}^{\mathcal{J}} = \Lambda(\varphi)$, то $\Lambda(\varphi) \subset \mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}} \subset L_1$.

Введенные конструкции пространств $\mathcal{L}_{\Phi, F}^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$ можно рассматривать как экстраполяционные функторы на шкале L_p -пространств [3–5], значения которых можно найти, рассматривая соответствующие функторы вещественного метода интерполяции. Пусть E — банахова решетка двусторонних числовых последовательностей. Если (X_0, X_1) — произвольная банахова пара, то пространство $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых $\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^j, x; X_0, X_1))_j\|_E < \infty$. В пространство $\mathcal{J}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ входят все $x \in X_0 + X_1$, допускающие представление $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j$ (сходимость в $X_0 + X_1$), где $u_j \in X_0 \cap X_1$. Нормы в $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ полагаются равной

$$\inf_{\{u_j\}} \|(\mathcal{J}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E,$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, для которых имеет место указанное представление.

Предположим, что $E \supset \Delta(\vec{l}_{\infty})$ (соответственно $\{0\} \neq E \subset \Sigma(\vec{l}_1)$). Тогда отображение $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ (соответственно $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$) определяет интерполяционный функтор [13]. В частности, отсюда следует, что пространство $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ интерполяционно относительно банаховой пары (X_0, X_1) (т.е. любой линейный оператор, ограниченный в X_0 и X_1 , ограничен также в $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$) (аналогичное утверждение справедливо для $\mathcal{J}$ -метода). Совокупность всех таких функторов называется вещественным $\mathcal{K}$ - (соответственно $\mathcal{J}$ -)методом интерполяции. Важно отметить, что в случае $\mathcal{K}$ - (соответственно $\mathcal{J}$ -)метода решетку E можно всегда считать интерполяционной относительно пары $\vec{l}_{\infty} = (l_{\infty}, l_{\infty}(2^{-k}))$ (соответственно $\vec{l}_1 = (l_1, l_1(2^{-k}))$) [13, Corollaries 3.3.10, 3.4.6]. Будем называть E в таком случае параметром $\mathcal{K}$ - (соответственно $\mathcal{J}$ -)метода интерполяции.

ТЕОРЕМА 4. Для произвольной функции Орлича Φ и любого параметра $\mathcal{K}$ -метода F $\mathcal{L}_{\Phi, F}^{\mathcal{K}} = (L_{\infty}, \text{Exp } L^{\Phi})_F^{\mathcal{K}}$ (с эквивалентностью норм).

Как уже говорилось во введении, $\text{Exp } L^{\Phi} = M(\varphi)$, где $\varphi(u) = u\Phi^{-1}(\ln(1+1/u))$. Поэтому интерполяция в паре $(L_{\infty}, \text{Exp } L^{\Phi})$ описывается $\mathcal{K}$ -методом [14]. Это

означает, что всякое пространство X , интерполяционное относительно нее, представимо в виде $X = (L_\infty, \text{Exp } L^\Phi)_F^{\mathcal{K}}$ для некоторого параметра $\mathcal{K}$ -метода F . Тем самым мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Φ — функция Орлича. Если X интерполяционно относительно пары $(L_\infty, \text{Exp } L^\Phi)$, то существует параметр $\mathcal{K}$ -метода F , такой, что $X = \mathcal{L}_{\Phi, F}^{\mathcal{K}}$.

Аналогичные результаты справедливы и в двойственной ситуации: для фуктора $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$ и пары $(L_1, \Lambda(\varphi))$.

ТЕОРЕМА 5. Для произвольной функции Орлича Φ и любого параметра $\mathcal{J}$ -метода G $\mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}} = (L_1, \Lambda(\varphi))_G^{\mathcal{J}}$ (с эквивалентностью норм).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Φ — функция Орлича. Если Y интерполяционно относительно пары $(L_1, \Lambda(\varphi))$, то существует параметр $\mathcal{J}$ -метода G , такой, что $Y = \mathcal{L}_{\Phi, G}^{\mathcal{J}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yano S. J. Math. Soc. Japan, **3**, 296–305 (1951).
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. Мир, М., 1965.
3. Jawerth B., Milman M. Extrapolation Spaces with Applications. Mem. Amer. Math. Soc., **89**, No. 44 (1991).
4. Jawerth B., Milman M. In: Israel Math. Conference Proc., Vol. 5, 81–105 (1992).
5. Milman M. Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis. Lect. Notes in Math., Vol. 1580, Springer-Verlag, 1994.
6. Carro M. J. J. Funct. Anal., **174**, 155–166 (2000).
7. Carro M. J., Martin J. In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics. Proc. of the Intern. Conf. in honor of J. Peetre, Lund, Aug. 17–22, 2000, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2002, pp. 241–248.
8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
9. Рутецкий Я. Б. УМН, **20**, вып. 4, 205–208 (1965).
10. Lorentz G. G. Proc. Amer. Math. Soc., **12**, 127–132 (1961).
11. Bennett C., Rudnick K. Diss. Math., **175**, 5–67 (1980).
12. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.
13. Brudnyi Yu. A., Krugliak N. Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. North Holland Publish., 1991.
14. Cwikel M., Nilsson P. Math. Scand., **56**, 29–42 (1985).

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
23 октября 2002 г.

УДК 517.913

Аналитическое доказательство неинтегрируемости АВС-течения при $A = B = C$

© 2003. С. Л. Зиглин

В работе продолжается исследование вопроса о существовании (непостоянно-го) первого интеграла у системы

$$\dot{x} = A \sin z + C \cos y, \quad \dot{y} = B \sin x + A \cos z, \quad \dot{z} = C \sin y + B \cos x, \quad (1)$$