

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982

О дополняемости подпространств,
порожденных сжатиями и сдвигами функций

С.В. Асташкин, Л. Малигранда, Е.М. Семенов

Пусть E — г.и. пространство на $[0, 1]$ (определение см. ниже), $a \in E$, $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$. Положим

$$a_{n,k}(t) = \begin{cases} a(2^n t - k + 1), & \frac{k-1}{2^n} \leq t \leq \frac{k}{2^n}, \\ 0, & \text{для остальных } t \in [0, 1], \end{cases}$$

и $Q_{n,a} = \text{span} \{a_{n,k}, 1 \leq k \leq 2^n\}$. Множество тех $a \in E$, для которых $Q_{n,a}$ равномерно дополняемо в E , т.е. существуют такие проекторы P_n из E на $Q_{n,a}$, что $\sup_n \|P_n\| < \infty$, обозначим через $\mathfrak{N}(E)$. Настоящая работа посвящена изучению множества $\mathfrak{N}(E)$ и класса г.и. пространств E , совпадающих с $\mathfrak{N}(E)$. Оказалось, что $\mathfrak{N}(E)$ тесно связано с пространством тензорных мультипликаторов, действующих в E .

Приведем необходимые определения.

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется симметричным или перестановочно-инвариантным (г.и.), если:

- 1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функций x и y и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Следуя [1], мы будем предполагать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству.

Примерами г.и. пространств могут служить пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича. Обозначим через Ω множество возрастающих, вогнутых на $[0, 1]$ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(0) = \varphi(+0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Всякая функция $\varphi \in \Omega$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ с нормами

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t),$$

Самарский государственный университет
Технологический университет Лулеа, Швеция
Воронежский государственный университет

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{1}{\varphi(s)} \int_0^s x^*(t) dt,$$

где $x^*(t)$ — перестановка $|x(t)|$ в убывающем порядке. Пространство $\Lambda(\varphi)$ сепарабельно и $(\Lambda(\varphi))^* = M(\varphi)$.

Если $\Phi(t)$ — выпуклая четная функция, $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t)/t = \lim_{t \rightarrow \infty} t/\Phi(t) = 0$, то пространством Орлича L_Φ называется множество функций, для которых

$$\|x\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0 \int_0^1 \Phi \left(\frac{|x(t)|}{\lambda} \right) dt \leq 1 \right\} < \infty.$$

Условие $\Phi \in \Delta_2$ означает, что $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$ для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \geq 1$.

В любом г.и. пространстве E непрерывно действует семейство операторов

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(1, \tau), \\ 0, & \min(1, \tau) < t \leq 1. \end{cases}$$

Числа

$$\alpha_E = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln \|\sigma_s\|_E}{\ln s}, \quad \beta_E = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_s\|_E}{\ln s}$$

называются индексами Бойда пространства E . Всегда $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$. Мы будем использовать конструкцию Кальдерона-Лозановского [2]. Если E_0, E_1 — г.и. пространства и $0 < \theta < 1$, то через $E_0^{1-\theta} E_1^\theta$ обозначается пространство функций с нормой

$$\|x\| = \inf_{\|x_0\|_{E_0} = \|x_1\|_{E_1} = 1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|x(t)|}{|x_0(t)|^{1-\theta} |x_1(t)|^\theta}.$$

Для любого г.и. пространства E справедливы непрерывные вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$. Если E — г.и. пространство, то через E^0 мы обозначим замыкание L_∞ в E . Если E сепарабельно, то $E^0 = E$; если $E \neq L_\infty$, то E^0 сепарабельно. Равенство двух г.и. пространств означает совпадение их как множеств. Тогда по теореме о замкнутом графике их нормы эквивалентны. Через E' обозначается пространство функций, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \int_0^1 x(t)y(t) dt < \infty.$$

Пространство E' изометрично вложено в E^* . Если E сепарабельно, то $E' = E^*$ с равенством норм.

Так как существует взаимно-однозначное сохраняющее меру отображение $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$, то для любого г.и. пространства E на $[0, 1]$ существует изометричное ему пространство функций на квадрате, порожденное сохраняющим меру отображением. Это пространство функций на квадрате мы также будем обозначать через E . Это позволяет рассматривать тензорный мультипликатор $(x \otimes y)(t, s) = x(t)y(s)$ как билинейный оператор в L_p , $1 \leq p \leq \infty$. Всякое г.и. пространство E порождает пространство тензорных мультипликаторов $\mathfrak{M}(E)$ с нормой

$$\|x\|_{\mathfrak{M}(E)} = \sup_{\|y\|_E \leq 1} \|x \otimes y\|_E.$$

Очевидно, справедливы вложения $L_\infty \subset \mathfrak{M}(E) \subset E$. Тензорные мультипликаторы изучались в работах [3–5] и др. Подробнее об г.и. пространствах см. [1, 6]. Подпространства, порожденные сдвигами одной функции из г.и. пространства на $[0, \infty)$, изучались в [7].

Центральным результатом настоящей работы является

Теорема 1. Пусть E — г.и. пространство. Тогда

$$\mathfrak{N}(E^0) \subset \mathfrak{M}(E) \subset \mathfrak{N}(E).$$

Теорема 1 решает задачу о нахождении $\mathfrak{N}(E)$ для сепарабельных г.и. пространств. В этом случае $\mathfrak{N}(E)$ совпадает с $\mathfrak{M}(E)$. Используя результаты об описании $\mathfrak{M}(E)$ [3–5], мы получаем

Следствие 2. (i) Если $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, то $\mathfrak{N}(L_{p,q}) = L_{p, \min(p,q)}$, $\mathfrak{N}(L_{p,\infty}^0) = L_p$;

(ii) Если $\varphi \in \Omega$, то $\mathfrak{N}(\Lambda(\varphi)) = \Lambda(\tilde{\varphi})$, где $\tilde{\varphi}(t) = \sup_{0 < s < 1} \varphi(ts)/\varphi(s)$.

(iii) Если $\Phi \in \Delta_2$, то $\mathfrak{N}(L_\Phi) = L_\Phi$ тогда и только тогда, когда Φ полумультипликативна, т.е. существует такое $C > 0$, что $\Phi(uv) \leq C\Phi(u)\Phi(v)$ для всех $u, v \geq 1$.

(iv) Если E — сепарабельное г.и. пространство, то $\mathfrak{N}(E) = L_\infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha_E = 0$.

Для несепарабельных г.и. пространств E множество $\mathfrak{N}(E)$ может не совпадать с $\mathfrak{M}(E)$ и задача об описании $\mathfrak{N}(E)$ становится более сложной.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in \Omega$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(2t)/\varphi(t) = 2$. Для того, чтобы $a \in M(\varphi)$ принадлежала $\mathfrak{N}(M(\varphi))$ необходимо и достаточно, чтобы

$a \in L_\infty$ или $a \notin M^0(\varphi)$, т.е.

$$\mathfrak{N}(M(\varphi)) = L_\infty \cup (M(\varphi) \setminus M^0(\varphi)).$$

Теорема 3 показывает, что множество $\mathfrak{N}(E)$ может быть нелинейным, если E несепарабельно.

Теорема 4. Пусть $\varphi \in \Omega$ и $\sup_{0 < t \leq 1} \varphi(t)/\varphi(t^2) < \infty$. Тогда

$$\mathfrak{N}(M(\varphi)) = \mathfrak{M}(M(\varphi)) = M(\varphi).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество г.и. пространств E , совпадающих с $\mathfrak{N}(E)$. Теорема 4 показывает, что некоторые несепарабельные г.и. пространства принадлежат классу $\mathfrak{N}$. Класс $\mathfrak{N}$ обладает свойством устойчивости относительно комплексного метода интерполяции.

Теорема 5. Пусть E_0, E_1 — сепарабельные г.и. пространства, $E_0, E_1 \in \mathfrak{N}$, $0 < \theta < 1$. Тогда $E_0^{1-\theta} E_1^\theta \in \mathfrak{N}$.

Следствие 2 (i) показывает, что класс $\mathfrak{N}$ не обладает свойством устойчивости относительно вещественного метода интерполяции. Приведем еще одно описание класса $\mathfrak{N}$.

Теорема 6. Пусть E — г.и. пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mathfrak{M}(E) = E$.
- (ii) $\mathfrak{N}(E) = E$.
- (iii) Существует константа $C > 0$ такая, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k} \right\|_E \leq C \|a\|_E \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \mathcal{X}_{n,k} \right\|_E$$

для всех $a \in E$ и всех $c_{n,k} \in \mathbb{R}^1$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, \dots$, где $\mathcal{X}_{n,k}$ — характеристическая функция интервала $((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$.

В терминах класса $\mathfrak{N}$ найдено характеристическое свойство пространств L_p .

Теорема 7. Пусть E — г.и. пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mathfrak{N}(E) = E$ и $\mathfrak{N}(E') = E'$.
- (ii) Оператор тензорного произведения $\otimes$ ограничен из $E \times E$ в E и из $E' \times E'$ в E' .
- (iii) Существует такое $p \in [1, \infty]$, что $E = L_p$.

Таким образом, если г.и. пространство $E \neq L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, то из двух пространств E и E' классу $\mathfrak{N}$ принадлежит не более одного.

Задача об описании $\mathfrak{N}(L_{p,\infty})$ ($1 < p < \infty$) осталась нерешенной. Ясно лишь, что $\mathfrak{N}(L_{p,\infty}) \cap L_{p,\infty}^0 = L_p$.

Работа была поддержана грантом Королевской Шведской Академии наук по программе сотрудничества Швеции с республиками бывшего СССР, проект 35147. Второй автор был частично поддержан грантом национального научного совета Швеции (NFR) M5105-20005228/2000. Третий автор был частично поддержан грантами РФФИ, 02-01-00146 и фонда “Университеты России”, УР 04.01.051. Первый и третий авторы благодарны математическому факультету технологического университета Лuleа, Швеция за гостеприимство во время их визитов в Лuleа.

Список литературы

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces. В.: Springer. 1978.
2. Maligranda L. Lulea University of Technology, Dep. of math., Research Report. 2001, N 11. P. 1–17.
3. O’Neil R.// J. Analyse Math. 1968. V. 21. P. 1–276.
4. Milman M.// Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83. P. 743–746.
5. Асташкин С.В.// Функц. анализ. и его прил. 1966. Т. 30, N 4. С. 58–60.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
7. Hernandez F.L., Semenov E.M.// J. Func. Anal. 1999. V. 169. P. 52–80.