

спектра вытекает из компактности предельного «симметризованного оператора» $R_{\mu 0}^s(0)$.

Обозначим через $D_\mu(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(F_\mu(0))$, определитель Фредгольма оператора $I - R_{\mu 0}(z)$.

ЛЕММА 4. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(F_\mu(0))$ является собственным значением оператора $F_\mu(0)$ тогда и только тогда, когда $D_\mu(z) = 0$.

Если $\mu > \mu_1$, то левый край существенного спектра оператора $F_\mu(0)$ совпадает с $E_\mu^{(1)}(0) < 0$.

ЛЕММА 5. Существует $\delta > 0$, такое, что для функции $D_\mu(z)$ имеет место разложение

$$D_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\mu)(z - E_\mu^{(1)}(0))^{n/2}, \quad z \in V_\delta(E_\mu^{(1)}(0)). \quad (8)$$

Теперь утверждение о конечности числа собственных значений в случае $\mu > \mu_1$ выводится из разложения (8) и леммы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. Мир, М., 1982.
2. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. Наука, М., 1985.
3. Цикон Х., Фрези Р., Кириш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера. Мир, М., 1990.
4. Жислин Г. М. ДАН СССР, **207**, №1, 25–28 (1972).
5. Жислин Г. М. ТМФ, **21**, 60–73 (1974).
6. Яфаев Д. Р. Изв. АН СССР, сер. матем., **40**, №4, 908–948, (1976).
7. Шмидт Э., Цигельман Х. Проблемы трех тел в квантовой механике. Наука, М., 1979.
8. Mattis D. C. Rev. Modern. Phys., **58**, No. 2, 361–379 (1986).
9. Лакаев С. Н. Функциональный анализ и его прил., **27**, вып. 3, 15–28 (1993).
10. Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. ТМФ, **111**, №1. 94–108 (1997).
11. Лакаев С. Н., Абдуллаев Ж. И. УМН, **53**, вып. 3, 201–202 (1998).

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn
Самаркандский университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
20 марта 2000 г.

УДК 517.982.27

О точной $\mathcal{K}$ -монотонности банаховых пар

© 2002. С. В. Асташкин

1. Введение. Для банаховой пары (X_0, X_1) , $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$ -функционал Петре

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i \}.$$

Пару (X_0, X_1) называют $\mathcal{K}$ -монотонной (парой Кальдерона–Митягина), если для некоторого $C > 0$ и всех $x, y \in X_0 + X_1$ из неравенства

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0) \quad (1)$$

вытекает существование линейного оператора $T: X_0 + X_1 \rightarrow X_0 + X_1$, такого, что $y = Tx$ и $\max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow X_i} \leq C$. Если последнее выполнено при $C = 1$,

то (X_0, X_1) называется точной $\mathcal{H}$ -монотонной парой. Если пара $\mathcal{H}$ -монотонна, то все пространства, интерполяционные относительно нее, описываются как пространства вещественного $\mathcal{H}$ -метода [1].

В середине 60-х годов А. П. Кальдерон [2] и независимо от него Б. С. Митягин [3] получили первый важный пример точной $\mathcal{H}$ -монотонной пары, а именно $(L_1(0, \infty), L_\infty(0, \infty))$. Затем А. А. Седаев и Е. М. Семенов доказали, что тем же свойством обладает любая пара $(L_1(w_0), L_1(w_1))$ «весовых» L_1 -пространств [4]; позднее А. А. Седаев обобщил этот результат на случай пар $(L_p(w_0), L_p(w_1))$ $(1 \leq p \leq \infty)$ [5] (для $p = \infty$ аналогичный вопрос был еще раньше рассмотрен Я. Петре [6]). Наконец, в 1978 г. Г. Спарр получил наиболее общий результат о точной $\mathcal{H}$ -монотонности произвольной пары пространств вида $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))$ $(1 \leq p_0, p_1 \leq \infty)$ [7].

Наряду с этим в работе [4] был приведен пример пары пространств размерности 3, не обладающей свойством точной $\mathcal{H}$ -монотонности. Для его описания, а также для формулировки рассматриваемых здесь задач приведем необходимые определения.

Пусть $v = (v_i)_{i=1}^n$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $(n \in \mathbb{N}$ или $n = \infty)$. Тогда координатное пространство Лоренца $\lambda^n(v)$ состоит из всех $x = (x_i)_{i=1}^n$, для которых $\|x\|_v = \sum_{i=1}^n v_i x_i^* < \infty$ ((x_i^*) — перестановка последовательности $(|x_i|)_{i=1}^n$ в убывающем порядке). Соответствующее функциональное пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ (φ — неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$) — это множество всех измеримых на $(0, \infty)$ функций $x = x(t)$, таких, что $\|x\|_\varphi = \int_0^\infty x^*(t) d\varphi(t) < \infty$ ($x^*(t)$ — невозрастающая перестановка $|x(t)|$). Через l_∞^n (соответственно L_∞), как обычно, будет обозначаться пространство всех ограниченных последовательностей $x = (x_i)_{i=1}^n$ (существенно ограниченных функций $x = x(t)$) с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$ (соответственно $\|x\|_\infty = \text{ess sup}_{t>0} |x(t)|$).

Упомянутый выше пример не точной $\mathcal{H}$ -монотонной пары — это пара $(\lambda^3(v), l_\infty^3)$, где $v_1 = v_2 = 1$, $v_3 = 0$ [4]. В связи с этим А. А. Седаевым был поставлен вопрос о (точной) $\mathcal{H}$ -монотонности пар вида $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$ и $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$. В 1981 г. М. Цвикель доказал, что любая такая пара $\mathcal{H}$ -монотонна с константой 4 [8], дав тем самым частичный положительный ответ на этот вопрос.

Здесь рассматривается задача о точной $\mathcal{H}$ -монотонности пар указанного вида. Получены необходимые и достаточные условия на последовательность $v = (v_i)_{i=1}^n$ (функцию φ), при которых данным свойством обладает пара $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$ (соответственно $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$).

2. Крайние точки $\mathcal{H}$ -орбиты в паре $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $v_1 \geq \dots \geq v_n \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{V}_x$ $\mathcal{H}$ -орбиту вектора $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ($x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$) в паре $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$. Это множество всех $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, таких, что для $X_0 = \lambda^n(v)$ и $X_1 = l_\infty^n$ выполнено соотношение (1).

Функция $\mathcal{H}(t, z) = \mathcal{H}(t, z; \lambda^n(v), l_\infty^n)$ для каждого $z = (z_i)_{i=1}^n$ кусочно-линейна и имеет точки излома при $t = t_k = \sum_{i=1}^k v_i$ ($k = 1, \dots, n$). Кроме того, $\mathcal{H}(0, z) = 0$, $\mathcal{H}(t_k, z) = \sum_{i=1}^k v_i z_i^*$ ($k = 1, \dots, n$) и $\mathcal{H}(t, z) = \mathcal{H}(t_n, z)$ ($t \geq t_n$). Поэтому неравенство (1) эквивалентно системе неравенств

$$\sum_{i=1}^k v_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^k v_i x_i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Если $1 \leq a \leq b \leq n$ ($a, b \in \mathbb{N}$), то $[a, b] = \{k \in \mathbb{N} : a \leq k \leq b\}$. Назовем такой промежуток $\delta = [a, b]$ допустимым относительно последовательности $v = (v_i)_{i=1}^n$, если либо $a = b$ и $v_a \neq 0$, либо существует $k \in \delta$, такое, что $k+1 \in \delta$ и $v_k > v_{k+1}$.

Пусть $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^m$ — система допустимых промежутков, являющаяся разбиением всего отрезка $[1, n]$, т. е. $[1, n] = \bigcup_{k=1}^m \delta_k$ и $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Обозначим через E_Δ множество всех $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, таких, что для всех $k = 1, \dots, m$

$$y_i^* = \frac{\sum_{j \in \delta_k} v_j x_j}{\sum_{j \in \delta_k} v_j}, \quad \text{если } i \in \delta_k.$$

ТЕОРЕМА 1. *Множество крайних точек $\mathcal{H}$ -орбиты $\mathcal{V}_x$, определенной системой неравенств (2), совпадает с $\bigcup_\Delta E_\Delta$, где объединение берется по всем разбиениям Δ отрезка $[1, n]$ на допустимые промежутки.*

Пусть $\text{conv } F$ — выпуклая оболочка множества F . Так как $\mathcal{V}_x$ — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, то имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. $\mathcal{V}_x = \text{conv}(\bigcup_\Delta E_\Delta)$.

В случае $v_1 = \dots = v_n > 0$ единственное разбиение отрезка $[1, n]$ на допустимые промежутки состоит из одноэлементных множеств. Получаем хорошо известную теорему А. С. Маркуса: множество крайних точек $\mathcal{H}$ -орбиты $\mathcal{V}_x$ состоит из всех последовательностей $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, в которых y_i представимы в виде $y_i = \varepsilon_i x_{\pi(i)}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, а π — перестановка отрезка $[1, n]$ (см. [9–11]).

3. Пространства последовательностей. Пусть либо $n \in \mathbb{N}$, либо $n = \infty$.

ТЕОРЕМА 3. *Банахова пара $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$ является точной $\mathcal{H}$ -монотонной парой тогда и только тогда, когда $v_k = v_1 q^{k-1}$ ($k = 1, \dots, n$), где $v_1 > 0$, а $q \in [0, 1]$.*

В случае $q = 0$ имеем $\lambda^n(v) = v_1 l_\infty^n$ (если X — банахово пространство, а $a > 0$, то пространство aX состоит из тех же элементов, что и X , а $\|x\|_{aX} = a\|x\|_X$). Если же $q = 1$, то $\lambda^n(v) = v_1 l_1^n$ и пара $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$ является точной $\mathcal{H}$ -монотонной по теореме Кальдерона–Митягина [2, 3].

При доказательстве необходимости в теореме 3 в случае конечного n и $v_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) рассматриваются операторы

$$Q_k(z_i) = \sum_{i \neq k-1, k} z_i e_i + \frac{z_{k-1} v_{k-1} + z_k v_k}{v_{k-1} + v_k} (e_{k-1} + e_k) \quad (k = 2, \dots, n),$$

где e_i — стандартные орты пространства $\mathbb{R}^n$. Легко видеть, что $\|Q_k\|_{l_\infty^n \rightarrow l_\infty^n} = 1$. Что же касается нормы операторов Q_k в пространстве Лоренца, то справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $(\lambda^n(v), l_\infty^n)$ — точная $\mathcal{H}$ -монотонная пара, то $\|Q_k\|_{\lambda^n(v) \rightarrow \lambda^n(v)} = 1$ для всех $k = 2, \dots, n$.*

4. Пространства функций.

ТЕОРЕМА 5. *Пара $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$ пространств на полуоси $(0, \infty)$ является точной $\mathcal{H}$ -монотонной парой тогда и только тогда, когда $\varphi(t) = af(t)$ ($a > 0$), где либо $f(t) = 1$, либо $f(t) = t$, либо $f(t) = 1 - q^t$ ($0 < q < 1$).*

Если $\varphi(t) = a$, то $\Lambda(\varphi) = aL_\infty$, а если $\varphi(t) = at$, то $\Lambda(\varphi) = aL_1$. В нетривиальном случае $\varphi(t) = a(1 - q^t)$ ввиду равенств

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t)/t = a \ln(1/q), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a$$

пространство $\Lambda(\varphi)$ — это $L_1 + L_\infty$, причем

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = a \ln(1/q) \int_0^\infty x^*(t) q^t dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. ДАН СССР, **256**, №1, 14–17 (1981).
2. Calderon A. P. Studia Math., **26**, No. 3, 273–299 (1966).
3. Митягин Б. С. Матем. сб., **66**, вып. 4, 473–482 (1965).
4. Седаев А. А., Семенов Е. М. Оптимизация, вып. 4 (21), 98–114 (1971).
5. Седаев А. А. ДАН СССР, **209**, №4, 798–800 (1973).
6. Peetre J. Banach Couples. Technical report, Lund, 1971.
7. Sparr G. Studia Math., **62**, 229–271 (1978).
8. Cwikel M. Ark. Mat., **19**, No. 1, 123–136 (1981).
9. Маркус А. С. ДАН СССР, **146**, 11–14 (1962).
10. Маркус А. С. УМН, **19**, вып. 4, 93–123 (1964).
11. Митягин Б. С. Изв. АН СССР, **28**, 819–832 (1964).

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
19 марта 2001 г.

УДК 517.67

Особенности семейств хорд*

© 2002. П. Гиблин, В. М. Закалюкин

1. Введение. Для заданной гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ аффинного пространства *хордой* будем называть прямую, проходящую через пару точек из M , в которых касательные гиперплоскости параллельны. Такие пары будем называть *параллельными*.

Огибающая семейства хорд для центрально симметричных гиперповерхностей M совпадает с центром симметрии. Поэтому в общем случае она называется *множеством центральной симметрии (МЦС)* гиперповерхности M . Изучение особенностей общего положения МЦС было начато в работах [6, 2] для случая $n = 2$. МЦС является *аффинным* инвариантом гиперповерхности, встречающимся в ряде приложений [5] в физике и дифференциальных уравнениях. Так, например, особенности МЦС связаны с особенностями семейств эквидистант в финслеровой геометрии.

Здесь мы показываем, что особенности МЦС являются особенностями специальных лагранжевых и лежандровых отображений [1, 7], и классифицируем все особенности общего положения в трехмерном пространстве.

Все конструкции являются локальными, а все объекты — бесконечно гладкими.

Классификация особенностей различна в следующих ситуациях:

1. Трансверсальный случай отвечает системе хорд, порожденной ростками (M, a_0) и (N, b_0) двух различных гиперповерхностей в окрестности параллельной пары a_0, b_0 , состоящей из различных точек, причем проходящая через них хорда трансверсальна гиперповерхностям. Приходится выделять два подслучая: когда отмеченные точки не являются параболическими и когда хотя бы одна из них параболическая.

*При поддержке грантов INTAS (000259), NWO и РФФИ (02010099).