

Коэффициенты Фурье-Радемахера**С.В.Асташкин, Е.М.Семенов**

Система Радемахера

$$r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t, \quad n = 1, 2, \dots$$

играет важную роль во многих разделах анализа. Каждой функции $x \in L_1[0, 1]$ можно поставить в соответствие последовательность коэффициентов Фурье-Радемахера

$$c_n(x) = \int_0^1 x(t) r_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Изучению оператора $R : x \rightarrow \{c_n(x)\}$ посвящены многие работы [1], гл.2. Достигнутый в последние годы прогресс в теории интерполяции линейных операторов [2], гл.3, позволил получить более точные, а иногда и окончательные результаты о свойствах оператора R и его сопряженного. Изложению этих результатов посвящена настоящая работа.

Приведем необходимые определения. Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется симметричным или перестановочно-инвариантным (r.i.), если

- 1) $|x(t)| \leq |y(t)|$ и $y \in E$ влекут $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
- 2) из равноизмеримости функций $x(t), y(t)$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Аналогичное понятие вводится для пространств последовательностей. Обозначим через $\chi_e(t)$ характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0, 1]$. Тогда $\|\chi_e\|_E$ зависит только от меры множества e и, следовательно, существует такая функция φ_E на $[0, 1]$, что $\|\chi_e\|_E = \varphi_E(\text{mes } e)$. Функция φ_E называется фундаментальной функцией E . В любом r.i. пространстве ограничено действует семейство операторов

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(1, \tau), \\ 0, & \min(1, \tau) < t \leq 1, \end{cases}$$

и $\|\sigma_\tau\|_E \leq \max(1, \tau)$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0} \ln \|\sigma_\tau\|_E / \ln \tau, \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \ln \|\sigma_\tau\|_E / \ln \tau$$

называются индексами Бойда пространства E . Всегда $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$.

Пространства Лоренца и Орлича являются наиболее важными классами г.и. пространств. Если $M(u)$ — четная, выпуклая, возрастающая на $[0, \infty)$ функция, $M(0) = 0$, то пространство Орлича L_M есть множество измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{L_M} = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_0^1 M(x(t)/\lambda) dt \leq 1 \right\} < \infty.$$

Обозначим через Ω множество возрастающих, вогнутых на $[0, 1]$ функций, $\varphi(0) = 0$. Всякая функция $\varphi \in \Omega$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t),$$

где $x^*(t)$ не возрастает на $[0, 1]$ и равноизмерима с $x(t)$. Обозначим через G замыкание множества ограниченных функций в пространстве Орлича L_M , где $M(u) = e^{u^2} - 1$, а через H — множество функций с нормой

$$\|x\|_H = \left(\int_0^1 x^{*2}(t) d\varphi_0(t) \right)^{1/2},$$

где $\varphi_0(t) = (\ln \frac{1}{t} + 2)^{-1}$.

Если A и B — функционалы, зависящие от одного или нескольких переменных, то $A \cong B$ означает существование такой константы $c > 0$, что $\frac{1}{c}A \leq B \leq cA$ для всех значений переменных.

Пусть E_0, E_1 — пара банаховых пространств, вложенных в отдельное пространство, $t > 0$. На сумме $E_0 + E_1$ определяется функционал

$$K(t, x, E_0, E_1) = \inf \{ \|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}, x_0 \in E_0, x_1 \in E_1, x_0 + x_1 = x \},$$

который играет важную роль в теории интерполяции линейных операторов (см. [2], гл.3). Если $E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1$ и всякий линейный

оператор, который ограничен в E_0 и E_1 , ограничен в E , то E называется интерполяционным пространством относительно пары (E_0, E_1) . Изложенные выше результаты об г.и. пространствах содержатся в [3], [4].

В силу теоремы Мерсера оператор R ограниченно действует из L_1 в c_0 . В [5] доказано, что норма ряда по системе Радемахера в г.и. пространстве E эквивалентна норме в ℓ_2 последовательности коэффициентов тогда и только тогда, когда $E \supset G$. По г.и. пространству E построим г.и. пространство последовательностей $q(E)$ с нормой $\|c\|_{q(E)} = \|f_c\|_E$, где $c = (c_1, c_2, \dots)$ и

$$f_c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* \mathfrak{a}_{(0,2^{-k+1})}(t).$$

Можно показать, что $q(H)$ и ℓ_2 совпадают с точностью до эквивалентности. В [5] было доказано, что для любого г.и. пространства E и любой последовательности $c \in \ell_2$ справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* \mathfrak{a}_{(0,2^{-k+1})} \right\|_E \leq 2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k \right\|_E.$$

Там же были найдены некоторые достаточные условия, гарантирующие выполнение противоположного неравенства.

Теорема 1. Пусть г.и. пространство E интерполяционно относительно пары (L_∞, G) . Для того, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k \right\|_E \cong \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* \mathfrak{a}_{(0,2^{-k+1})} \right\|_E, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы квазилинейный оператор

$$Qx(t) = \left(\frac{1}{\varphi_0(t)} \int_0^t x^2(s) d\varphi_0(s) \right)^{1/2}$$

был ограничен в E .

Для конкретных классов г.и. пространств этот критерий может быть сформулирован в более простой форме.

Следствие 2. Пусть $\psi \in \Omega$. Для того, чтобы (1) было справедливо

для пространства $\Lambda(\psi)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\tau}^1 \frac{d\psi(t)}{\sqrt{\varphi_0(t)}} \leq C \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\varphi_0(\tau)}}$$

для некоторого $C > 0$ и всех $\tau \in (0, 1]$.

Для того, чтобы найти простые достаточные условия ограниченности оператора Q , рассмотрим оператор

$$Sx(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^t x(s) d\varphi_1(s),$$

где $\varphi_1(t) = \sqrt{\varphi_0(t)} = (\ln \frac{1}{t} + 2)^{-1/2}$. Можно показать, что $\|Q\|_E \leq \|S\|_E$ для любого г.и. пространства E . Поэтому ограниченность S в E достаточна для справедливости эквивалентности (1). Рассмотрим действующий в пространствах последовательностей оператор

$$(Ty)_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{y_k}{\sqrt{k}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad y = (y_1, y_2, \dots).$$

Теорема 3. Пусть E — г.и. пространство. Следующие условия эквивалентны:

- (i) оператор S ограничен в E ;
- (ii) оператор T ограничен в $q(E)$;
- (iii) $\alpha_{q(E)} > \frac{1}{2}$.

В доказательстве теоремы 3 используется следующее утверждение. Пусть $0 < \gamma < 1$ и

$$(U_{\gamma}y)_n = n^{-\gamma} \sum_{k=1}^n y_k k^{\gamma-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 4. Пусть F — г.и. пространство с дискретной мерой. Для того, чтобы оператор U_{γ} был ограничен в F , необходимо и достаточно, чтобы $\beta_F < \gamma$.

Теорема 4 распространяет аналогичное утверждение для г.и. пространств с непрерывной мерой (теорема Д.Бойда) [6], [3], 2.b.13, на пространства с дискретной мерой.

В доказательстве теоремы 1 используется также следующее утверждение.

Теорема 5. *Если $c \in \ell_2$, $t > 0$, то*

$$K(t, f_c, L_\infty, H) \cong K(t, c, \ell_1, \ell_2).$$

Функционал $K(t, c, \ell_1, \ell_2)$ вычислен в работе Т.Холмстеда [7] Из теоремы 5 вытекает, что $K(t, f_c, L_\infty, H) \cong K(t, g_c, L_\infty, G)$, где $g_c(t) = \sum c_n r_n(t)$. Отметим, что С.Монтгомери-Смит нашел в [8] функцию распределения ряда g_c .

Приведем еще одно достаточное условие ограниченности оператора S и, следовательно, справедливости (1). Построим по г.и. пространству E пространство $\tilde{E}$ — множество таких $x \in L_1$, для которых $\|x\|_{\tilde{E}} = \|x^*(\varphi_1)\|_E$. Заметим, что $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ может не быть нормой. Если $\tilde{E}$ есть г.и. пространство и $\beta_{\tilde{E}} < 1$, то оператор S ограничен в E .

Оператор $R : x \rightarrow \{c_n(x)\}$ действует из L_1 на c_0 и из G^* на ℓ_2 . Эти утверждения можно уточнить и усилить. Если E есть г.и. пространство, то обозначим $RE = \{y : y = \{c_n(x)\}, x \in E\}$.

Теорема 6. *Пусть E — г.и. пространство. Справедливы следующие утверждения.*

- (i) *Для того, чтобы $RE = c_0$, необходимо и достаточно, чтобы $E = L_1$.*
- (ii) *Для того, чтобы $RE = \ell_2$, необходимо и достаточно, чтобы $E \subset G^*$.*

Более того, обе части теоремы допускают количественную интерпретацию. Если $E \neq L_1$, то $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_E(t)/t = 0$. В этом случае оператор R ограниченно действует из E в г.и. пространство последовательностей F , такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_F(n) = \infty$.

Если $x \in G^*$, то

$$\|x\|_{G^*} \cong \sup \{ \|\{c_n(z)\}\|_{\ell_2} : z^* = x^* \}. \quad (2)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая неотрицательная невозрастающая функция $x \in G^*$, такая, что $\|x\|_{G^*} = 1$ и $\|\{c_n(x)\}\|_{\ell_2} < \varepsilon$. Это замечание говорит о том, что supremum в (2) не достигается на функции $z = x^*$.

Близким вопросам посвящена также статья [9].

Работа второго автора была частично поддержана РФФИ, грант 98-01-00044 и фондом "Университеты России", грант 3667.

Список литературы

- [1] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [2] Brudnyi Yu.A., Kruglyak N.Ya. Interpolation Functions and Interpolation Spaces. V.1. Amsterdam: North Holland, 1991.
- [3] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces. B: Springer, 1978.
- [4] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [5] Rodin V.A., Semyonov E.M. // Anal. Math. 1975. V.1, N.3, P.207-222.
- [6] Boyd D.W. // Canadian J. Math., 1969, V.21, P.1245-1254.
- [7] Holmsted T. // Math. Scand. 1970. V.26, N.1, P.177-179.
- [8] Montgomery-Smith S.J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V.109, N.2, P.517-522.
- [9] Асташкин С.В. // Функц. анализ и его прил. 1998. - Т.32, N.3. - С.62-65.

Самарский государственный университет
Воронежский государственный университет
FAX (0732) 789755

astashkn@ssu.samara.ru
root@func.vsu.ru