

УДК 517.5+517.982

С. В. Асташкин

Системы случайных величин, эквивалентные по распределению системе Радемахера, и $\mathcal{H}$ -замкнутая представимость банаховых пар

В работе найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин (с.в.), определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , можно было выделить подсистему $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, эквивалентную по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$. В частности, это всегда возможно, если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – равномерно ограниченная и ортонормированная последовательность. Основную роль в доказательствах играет обнаруженная в работе связь между эквивалентностью по распределению систем с.в. и поведением L_p -норм соответствующих полиномов.

Приводится приложение полученных результатов к изучению $\mathcal{H}$ -замкнутой представимости некоторых банаховых пар.

Библиография: 26 названий.

Введение

Системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин (с.в.), определенных на вероятностных пространствах (Ω, Σ, P) и (Ω', Σ', P') соответственно, назовем *эквивалентными по распределению* (пишем: $\{f_n\} \overset{P}{\sim} \{g_n\}$), если существует $C > 0$ такое, что для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$) и $z > 0$

$$\begin{aligned} C^{-1} P \left\{ \left| \sum_{n=1}^m a_n f_n(\omega) \right| > Cz \right\} &\leq P' \left\{ \left| \sum_{n=1}^m a_n g_n(\omega') \right| > z \right\} \\ &\leq C P \left\{ \left| \sum_{n=1}^m a_n f_n(\omega) \right| > C^{-1} z \right\}. \end{aligned}$$

Если выполнена только левая часть этого соотношения, то будем говорить, что система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *мажорируется по распределению* системой $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогичным образом определяются эти понятия в случае конечных наборов $\{f_n\}_{n=1}^N$ и $\{g_n\}_{n=1}^N$.

В работе [1] показано, что из всякой равномерно ограниченной ортонормированной в L_2 последовательности с.в. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая мажорируется по распределению системой Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$r_n(x) = \text{sign} \sin(2^{n-1} \pi x) \quad (x \in [0, 1]).$$

Основная цель данной работы – доказать возможность выделения при тех же условиях подпоследовательности, которая не только мажорируется, но и эквивалентна системе $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Более того, будут найдены необходимые и достаточные

условия на систему с.в. такие, чтобы она содержала подсистему, эквивалентную по распределению системе Радемахера. В случае конечных наборов нас будет интересовать плотность их подсистем, обладающих аналогичным свойством.

Проблематика, связанная с выделением “почти независимых” подсистем (т.е. обладающих некоторым свойством, характерным для систем независимых функций), подробно рассматривается в известной статье В. Ф. Гапошкина “Лакунарные ряды и независимые функции” [2], на которую в дальнейшем мы не раз будем ссылаться. Напомним наиболее важные результаты, относящиеся к интегрируемости суммы ряда, построенного по данной системе функций, а также к его абсолютной сходимости.

Ввиду классического неравенства, доказанного А. Я. Хинчиным [3], сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ ($x \in [0, 1]$) принадлежит всем пространствам L_p ($p > 2$) при условии, что последовательность коэффициентов $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$. Для лакунарных тригонометрических рядов аналогичный результат был получен А. Зигмундом [4]. В связи с этим несколько позднее в работах С. Банаха и С. Сидона возникло понятие лакунарной системы порядка p , или, короче, S_p -системы. Последовательность с.в. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in L_p$ ($p > 2$), называется S_p -системой, если

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_p \leq K_p \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_2, \quad (0.1)$$

где константа $K_p > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$). Если $\{f_n\}$ является S_p -системой при любом $p > 2$, то ее называют S_{∞} -системой.

С. Банах доказал, что из всякой ортонормированной последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, такой, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p < \infty$, можно извлечь S_p -подсистему ([5] или [6; § 7.2]). Отсюда, в частности, следует возможность выделения S_{∞} -подсистемы из любой равномерно ограниченной ортонормированной системы функций. Приведем более точный результат, принадлежащий С. Б. Стечкину [2; теорема 1.3.1].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, измеримых на $[0, 1]$, и $p > 2$. Для того чтобы из $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно было извлечь S_p -подсистему, необходимо и достаточно существования подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$, для которой выполнены условия:

- 1) $\|f_{n_k}\|_p \leq D$ ($k = 1, 2, \dots$);
- 2) $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 .

Перейдем теперь к краткому обсуждению другого свойства лакунарных рядов — абсолютной сходимости. Для тригонометрических рядов хорошо известна классическая теорема Сидона об абсолютной сходимости лакунарного (в смысле Адамара) ряда Фурье ограниченной функции. А. Зигмунд доказал локальный вариант этой теоремы [7]. Позднее аналогичные результаты были получены для системы Радемахера и некоторых других конкретных лакунарных систем функций [8]. Как естественное обобщение этих результатов возникли следующие понятия. Последовательность с.в. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой Сидона*, если

$$\sum_{n=1}^m |a_n| \leq C \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_{\infty}, \quad (0.2)$$

где константа $C > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$).

Систему $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, измеримых на $[0, 1]$, называют *системой Сидона–Зигмунда*, если существует множество $E \subset [0, 1]$ с мерой Лебега $|E| > 0$ такое, что для всякого промежутка I , $|I \cap E| > 0$, из условия $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \in L_{\infty}(I)$ следует: $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1$. Если в этом определении можно взять $E = [0, 1]$, то говорят, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система Сидона–Зигмунда в узком смысле.

Широкие достаточные условия, обеспечивающие возможность выделения подсистем Сидона и Сидона–Зигмунда, были получены В. Ф. Гапошкиным [2; теоремы 1.4.1 и 1.4.2].

ТЕОРЕМА В. Пусть система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, измеримых на $[0, 1]$, обладает следующими свойствами:

- 1) $\|f_n\|_2 = 1$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 2) $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots$; $x \in [0, 1]$);
- 3) существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ такая, что $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 .

Тогда из $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подсистему Сидона.

ТЕОРЕМА В'. а) При выполнении условий теоремы В из системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подсистему Сидона–Зигмунда.

б) Если дополнительно подпоследовательность из условия 3) теоремы В удовлетворяет условию

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_F f_{n_k}^2(x) dx > 0 \quad \text{для любого } F \subset [0, 1], \quad |F| > 0, \quad (0.3)$$

то из системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подсистему Сидона–Зигмунда в узком смысле.

Из приведенных выше определений и свойств системы Радемахера следует, что если $\{f_n\} \overset{P}{\sim} \{r_n\}$, то:

- 1) $\{f_n\}$ – S_{∞} -система, причем константа K_p из неравенства (0.1) имеет такой же порядок роста по p при $p \rightarrow \infty$, как и для системы Радемахера, т.е. $K_p \asymp \sqrt{p}$;
- 2) $\{f_n\}$ – система Сидона.

Тем самым утверждения, доказанные ниже в § 3, обеспечивают “хорошие” свойства выделенной подсистемы в обоих отношениях, усиливая и дополняя приведенные результаты.

Наряду с вопросами выделения бесконечных подпоследовательностей, обладающих свойствами систем независимых функций, представляют интерес также задачи иного рода, речь в которых идет о конечных наборах с.в. Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^N$ – набор с.в. Требуется найти как можно большее $s = s(N)$ со следующим свойством: существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s \subset \{f_n\}_{n=1}^N$, удовлетворяющий некоторому условию лакуарности с константой, не зависящей от N . Приведем лишь один результат о плотности конечных подсистем Сидона, доказанный Б. С. Кашиным (см. [9] или [10; § 8.4, теорема 9]).

ТЕОРЕМА С. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^N$ – ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, \dots, N$; $x \in [0, 1]$). Тогда существует набор

$\{f_{n_i}\}_{i=1}^s \subset \{f_n\}_{n=1}^N$ ($1 \leq n_1 < \dots < n_s \leq N$) такой, что $s \geq \max\{\lceil \frac{1}{6} \log_2 N \rceil; 1\}$ и для любых $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, s$) выполнено:

$$D^{-1} \left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^s |a_i| \leq 4D \left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_{\infty}.$$

Здесь при тех же предположениях будет доказано утверждение о выделении подсистемы $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ такой же плотности, но удовлетворяющей более сильному условию: она эквивалентна системе $\{r_i\}_{i=1}^s$ с константой, зависящей только от D .

Работа состоит из пяти параграфов. В §1 собраны используемые в дальнейшем понятия теории интерполяции операторов (подробнее см. в [11]). Для полноты изложения здесь же приведено доказательство одной формулы для $\mathcal{K}$ -функционала, построенного по паре (l_1, l_2) , из работы [12]. В §2 доказан критерий эквивалентности по распределению произвольной последовательности с.в. системе Радемахера, получены следствия в некоторых конкретных случаях. Основные результаты статьи – о выделении подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера, – составляют содержание §3. Следующий параграф посвящен рассмотрению аналогичных вопросов в случае конечных наборов функций. И наконец, в §5 полученные результаты применяются к изучению $\mathcal{K}$ -замкнутой представимости банаховых пар.

В заключение приведем обозначения. Выражение вида $F_1 \asymp F_2$ в дальнейшем означает, что для некоторого $C > 0$ $C^{-1}F_1 \leq F_2 \leq CF_1$, причем константа C , как правило, не зависит от всех или части аргументов F_1 и F_2 . Если $1 \leq p \leq \infty$, $f = f(\omega)$ – с.в. на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , то

$$\|f\|_p = (E|f|^p)^{1/p} = \left\{ \int_{\Omega} |f(\omega)|^p dP(\omega) \right\}^{1/p};$$

если же $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность, то

$$\|a\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{1/p}$$

(с естественной модификацией формул при $p = \infty$). Как обычно, пространство L_p состоит из всех с.в. f , для которых $\|f\|_p < \infty$, а l_p – из всех последовательностей $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\|a\|_p < \infty$.

Через $|E|$ будет обозначаться мера Лебега множества $E \subset [0, 1]$.

§1. $\mathcal{K}$ -функционал Петре и вещественный метод интерполяции

Пусть (X_0, X_1) – банахова пара, $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$. Определим $\mathcal{K}$ -функционал Петре

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \},$$

играющий важную роль в теории интерполяции операторов.

Нетрудно показать, что при фиксированном $x \in X_0 + X_1$ $\mathcal{K}$ -функционал – непрерывная возрастающая вогнутая функция относительно переменной t [11; §3.1].

В дальнейшем нам будет нужен лишь функционал $\mathcal{K}_{1,2}(t, a) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$, построенный по банаховой паре (l_1, l_2) , две аппроксимации которого составляют содержание следующих лемм. Первая из них, принадлежащая С. Монтгомери-Смиту, будет существенно использована в доказательстве теоремы 4. Поэтому для полноты изложения мы приведем ее доказательство (см. [12]).

Для произвольных $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ и $t \in \mathbb{N}$ определим норму

$$\|a\|_{Q(t)} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad (1.1)$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\{A_j\}_{j=1}^t$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

ЛЕММА 1. Если $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$ и $t^2 \in \mathbb{N}$, то

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leq \mathcal{K}_{1,2}(t, a) \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)}. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $Q(t)$ следует, что

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leq \|a\|_1 \quad \text{и} \quad \|a\|_{Q(t^2)} \leq t \|a\|_2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1,2}(t, a) &= \inf \{ \|b\|_1 + t \|c\|_2 : b + c = a, b \in l_1, c \in l_2 \} \\ &\geq \inf \{ \|b\|_{Q(t^2)} + \|c\|_{Q(t^2)} : b + c = a, b \in l_1, c \in l_2 \} \geq \|a\|_{Q(t^2)} \end{aligned}$$

и левая часть (1.2) доказана.

Для доказательства правой части (1.2) прежде всего заметим, что

$$\mathcal{K}_{1,2}(t, a) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^\infty a_n b_n : b = (b_n)_{n=1}^\infty \in l_2, \mathcal{J}_{\infty,2}(t^{-1}, b) \leq 1 \right\},$$

где $\mathcal{J}_{\infty,2}(s, b) = \max \{ \|b\|_\infty; s \|b\|_2 \}$ (см. [11; § 2.7]).

Следовательно, для всякого $\delta > 0$ найдется последовательность $b \in l_2$ такая, что

$$(1 - \delta) \mathcal{K}_{1,2}(t, a) \leq \sum_{n=1}^\infty a_n b_n \quad \text{и} \quad \mathcal{J}_{\infty,2}(t^{-1}, b) = 1.$$

Выберем $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t^2} \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ по индукции следующим образом: если $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_m$ уже найдены, то

$$n_{m+1} = 1 + \sup \left\{ k : \sum_{n=n_m+1}^k b_n^2 \leq 1 \right\}.$$

Так как $\|b\|_\infty \leq 1$, то $\sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}} b_n^2 \leq 2$. Ввиду того, что $\|b\|_2 \leq t, n_{t^2} = \infty$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \mathcal{K}_{1,2}(t, a) &\leq \sum_{n=1}^\infty a_n b_n \\ &\leq \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} b_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} a_n^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)}. \end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для всех $\delta > 0$, то лемма доказана.

Другое соотношение – формула Т. Хольмстедта – хорошо известна (см. [13] или [11; § 5.7]).

ЛЕММА 2. Существует константа $\alpha > 0$, не зависящая от $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$ и $t > 0$, такая, что

$$\alpha^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^\infty (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\} \leq \mathcal{K}_{1,2}(t, a) \leq \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left[\sum_{i=[t^2]+1}^\infty (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (1.3)$$

где $(a_i^*)_{i=1}^\infty$ — убывающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^\infty$, $a[z]$ — целая часть числа z .

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $\kappa(t, a) = \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a)$ непрерывна и возрастает при $t \geq 0$. Для любой последовательности $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$:

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0+} \kappa(t, a) = 0$;
- 2) $\alpha^{-1} \|a\|_1 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa(t, a) \leq \|a\|_1$.

В заключение параграфа напомним определение вещественного метода интерполяции. Для произвольной банаховой пары (X_0, X_1) , $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ определим норму

$$\|x\|_{\theta, q} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^\infty [2^{-n\theta} \mathcal{K}(2^n, x; X_0, X_1)]^q \right\}^{1/q}, \quad x \in X_0 + X_1$$

(с естественной модификацией при $q = \infty$). Пространства $(X_0, X_1)_{\theta, q} = \{x \in X_0 + X_1 : \|x\|_{\theta, q} < \infty\}$ интерполяционны относительно пары (X_0, X_1) (т.е. любой линейный оператор, ограниченный в X_0 и в X_1 , ограничен в $(X_0, X_1)_{\theta, q}$) и называются *пространствами вещественного метода интерполяции*.

§ 2. Системы с.в., эквивалентные по распределению системе Радемахера

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{f_n\} \overset{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}$ ($\{r_n\}_{n=1}^\infty$ — система Радемахера на $[0, 1]$);
- 2) с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, \dots, m$),

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t \asymp \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t;$$

- 3) с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$ и $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$,

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty a_n f_n \right\|_t \asymp \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [14] доказано, что с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$ и $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_t \asymp \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (2.2)$$

(неявно это соотношение содержится уже в работе [12]). Поэтому эквивалентность $2) \Leftrightarrow 3)$ очевидна. Так как импликация $1) \Rightarrow 2)$ является следствием определения эквивалентности систем по распределению, то остается доказать лишь импликацию $3) \Rightarrow 1)$.

Зафиксируем $a = (a_n)_{n=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$ (не все a_n равны нулю), и покажем, что распределение модуля с.в.

$$f(\omega) = \sum_{n=1}^m a_n f_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

определяется поведением ее моментов $\|f\|_t$, а значит, по условию функцией $\kappa(t, a) = \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a)$ ($t \geq 1$).

Обозначив через $\beta \geq 1$ константу эквивалентности (2.1), ввиду неравенства Пэли–Зигмунда [15; § 1.6] и вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала для $t \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq (2\beta)^{-1} \kappa(t, a)\} &\geq \mathbb{P}\{|f(\omega)|^t \geq 2^{-t} \|f\|_t^t\} \\ &\geq (1 - 2^{-t})^2 \frac{\|f\|_t^{2t}}{\|f\|_{2t}^{2t}} \geq \beta^{-4t} (1 - 2^{-t})^2 \left\{ \frac{\kappa(t, a)}{\kappa(2t, a)} \right\}^{2t} \geq (2\beta)^{-4t}. \end{aligned}$$

Так как функция $\kappa(t, a)$ возрастает по t , то отсюда

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq (2\beta)^{-1} \kappa(t, a)\} \geq (2\beta)^{-4t-4} \quad (2.3)$$

уже для всех $t > 0$.

Наоборот, из неравенства Чебышёва и условия (2.1) получаем

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq \lambda \kappa(t, a)\} \leq \lambda^{-t} \left[\frac{\|f\|_t}{\kappa(t, a)} \right]^t \leq \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^t$$

для произвольных $t \geq 1$ и $\lambda > 0$. В частности, если $\lambda = \beta e$, то

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq \beta e \kappa(t, a)\} \leq e^{-t} \quad (t \geq 1)$$

или

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq \beta e \kappa(t, a)\} \leq e^{1-t} \quad (t > 0). \quad (2.4)$$

Следуя [14], определим функционалы

$$F(s) = \sup\{t > 0 : \kappa(t, a) \leq s\}, \quad G(s) = \inf\{t > 0 : \kappa(t, a) \geq s\}.$$

Если $0 < z < (4\alpha\beta)^{-1} \|a\|_1$, то по следствию 1 найдется $t > 0$ такое, что $\kappa(t, a) \geq 4z\beta$. Тогда из (2.3) следует, что

$$\mathbb{P}\{|f(\omega)| > z\} \geq \mathbb{P}\{|f(\omega)| \geq (2\beta)^{-1} \kappa(t, a)\} \geq (2\beta)^{-4t-4}.$$

Значит, по определению функционала G

$$\mathbf{P}\{|f(\omega)| > z\} \geq (2\beta)^{-4G(4\beta z)-4},$$

откуда

$$\mathbf{P}\{|f(\omega)| > z\} \geq C_1^{-1} e^{-C_2 G(4\beta z)} \quad (z < (4\alpha\beta)^{-1} \|a\|_1), \quad (2.5)$$

где $C_1 = (2\beta)^4$, $C_2 = 4 \ln(2\beta)$.

Покажем, что для $C_3 = 4\sqrt{2} C_2 \beta$ выполнено

$$C_2 G(4\beta z) \leq F(C_3 z) \quad (z > 0).$$

Действительно, ввиду вогнутости $\mathcal{H}$ -функционала и определения G

$$\kappa(C_2 G(4\beta z), a) \leq \sqrt{2} C_2 \kappa(2^{-1} G(4\beta z), a) \leq 4\sqrt{2} C_2 \beta z = C_3 z$$

и осталось воспользоваться определением функционала F . Таким образом, (2.5) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\{|f(\omega)| > z\} \geq C_1^{-1} e^{-F(C_3 z)} \quad (z < (4\alpha\beta)^{-1} \|a\|_1). \quad (2.6)$$

Заметим, что из (2.1) следует

$$\|f_n\|_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f_n\|_t \leq \beta,$$

и поэтому $\|f\|_\infty \leq \beta \|a\|_1$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{|f(\omega)| > z\} = 0 \quad (z \geq \beta \|a\|_1). \quad (2.7)$$

Далее, по следствию 1 можно найти $t' > 0$ такое, что $0 < \kappa(t', a) \leq (2\beta e)^{-1} z$. Тогда из (2.4) получаем

$$\mathbf{P}\{|f(\omega)| > z\} \leq \mathbf{P}\{|f(\omega)| \geq \beta e \kappa(t', a)\} \leq e^{1-t'},$$

и значит, по определению F

$$\mathbf{P}\{|f(\omega)| > z\} \leq e^{1-F(C_4^{-1} z)} \quad (z > 0), \quad (2.8)$$

где $C_4 = 2\beta e$.

Ввиду (2.2) соотношения, аналогичные (2.6)–(2.8), справедливы и для системы Радемахера. А именно, если $\beta' \geq 1$ – константа эквивалентности (2.2), то для функции $r(x) = \sum_{n=1}^m a_n r_n(x)$ выполнено

$$|\{r(x) > z\}| \geq (C'_1)^{-1} e^{-F(C'_3 z)} \quad (z < (4\alpha\beta')^{-1} \|a\|_1), \quad (2.6')$$

$$|\{r(x) > z\}| = 0 \quad (z \geq \|a\|_1), \quad (2.7')$$

$$|\{r(x) > z\}| \leq e^{1-F((C'_4)^{-1} z)} \quad (z > 0). \quad (2.8')$$

Пусть

$$A = \max(C_1 e; C_3 C'_4; C'_1 e; C'_3 C_4; 4\alpha\beta\beta'). \quad (2.9)$$

Заметим, что ввиду универсальности констант α и β' зависимость константы A от системы $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ исчерпывается лишь ее зависимостью от β , константы эквивалентности (2.1).

Если $z < (4\alpha\beta)^{-1}\|a\|_1$, то ввиду соотношений (2.8') и (2.6), а также выбора константы A

$$\begin{aligned} |\{ |r(x)| > Az \}| &\leq e^{1-F((C'_4)^{-1}Az)} \leq e^{1-F(C_3z)} \\ &\leq C_1 e P\{|f(\omega)| > z\} \leq A P\{|f(\omega)| > z\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если же $z \geq (4\alpha\beta)^{-1}\|a\|_1$, то из (2.9) следует $Az \geq \|a\|_1$, и поэтому ввиду (2.7') $|\{ |r(x)| > Az \}| = 0$. Таким образом, неравенство (2.10) в этом случае также выполнено.

Наоборот, если $z/A < (4\alpha\beta')^{-1}\|a\|_1$, то из неравенств (2.8), (2.6') и выбора A следует, что

$$\begin{aligned} P\{|f(\omega)| > z\} &\leq e^{1-F(C_4^{-1}z)} \leq e^{1-F(C'_3(z/A))} \\ &\leq C'_1 e \left| \left\{ |r(x)| > \frac{z}{A} \right\} \right| \leq A \left| \left\{ |r(x)| > \frac{z}{A} \right\} \right|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае, когда $z/A \geq (4\alpha\beta')^{-1}\|a\|_1$, из (2.9) получаем: $z \geq \beta\|a\|_1$. Значит, ввиду (2.7) $P\{|f(\omega)| > z\} = 0$ и неравенство (2.11) снова выполнено.

Неравенства (2.10) и (2.11) означают, что $\{f_n\} \stackrel{P}{\sim} \{r_n\}$ и теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, и для конечных наборов с.в. При этом доказательство показывает, что константы эквивалентностей из условий 1)–3) теоремы 1 зависят лишь друг от друга. Так, например, если соотношение (2.1) выполнено для наборов $\{f_n\}_{n=1}^N$ с константой, не зависящей от $N = 1, 2, \dots$, то $\{f_n\}_{n=1}^N \stackrel{P}{\sim} \{r_n\}_{n=1}^N$ с константой, также не зависящей от $N = 1, 2, \dots$.

Применим доказанную теорему к двум более конкретным случаям.

Напомним, что система с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ называется *мультипликативной*, если для произвольных попарно различных $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($k \in \mathbb{N}$) выполнено

$$E(f_{n_1} f_{n_2} \cdots f_{n_k}) = 0.$$

Если дополнительно

$$E(f_{n_1} f_{n_2} \cdots f_{n_k} f_n^2) = 0$$

для любых попарно различных $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $n \neq n_s$ ($s = 1, 2, \dots, k$), то систему $\{f_n\}$ будем называть *сильно мультипликативной*. В случае конечных наборов определения совершенно аналогичны.

Приведем наиболее важные примеры таких систем [16].

ПРИМЕР 1. Пусть $f_n(x) = \sin(2\pi k_n x)$ ($x \in [0, 1]$). Если $k_{n+1}/k_n \geq 2$, то это мультипликативная, а если $k_{n+1}/k_n \geq 3$, – сильно мультипликативная система.

ПРИМЕР 2. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ независимых с.в. таких, что $f_n \in L_2$ и $E(f_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), – сильно мультипликативная система.

С. Квапень и Й. Якубовский доказали следующее утверждение [16].

ТЕОРЕМА D. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ – мультипликативная, а $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ – сильно мультипликативная системы с.в. Если для любого $n = 1, \dots, N$

$$\|\psi_n\|_\infty \|\varphi_n\|_\infty \leq E(\psi_n^2), \quad (2.12)$$

то существуют вероятностное пространство (Ω', Σ', P') , σ -подалгебра Σ_0 σ -алгебры Σ' и определенный на (Ω', Σ', P') случайный вектор $(\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_N)$ такой, что он равномерно распределен с вектором $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$, а вектор $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ равномерно распределен с условным математическим ожиданием $E((\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_N) \mid \Sigma_0)$.

В частности, для произвольной выпуклой функции $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(H(\varphi_1, \dots, \varphi_N)) \leq E(H(\psi_1, \dots, \psi_N)).$$

Из теорем D и 1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – сильно мультипликативная система с.в. такая, что $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots$; $\omega \in \Omega$) и $d = \inf_{n=1,2,\dots} E(f_n^2) > 0$. Тогда $\{f_n\} \stackrel{P}{\sim} \{r_n\}$, причем константа этой эквивалентности зависит только от D и d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (2.12) теоремы D выполнено для систем $\varphi_n = f_n/D$ и $\psi_n = r_n$. Поэтому при всех $t \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$)

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t \leq D \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t.$$

Наоборот, если $\varphi_n = (d/D)r_n$, $\psi_n = f_n$, то (2.12) опять выполнено и, значит,

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t \leq \frac{D}{d} \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t.$$

Для завершения доказательства осталось применить теорему 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Всякая последовательность независимых с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $f_n \in L_2$, $E(f_n) = 0$, $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots$; $\omega \in \Omega$) и $d = \inf_{n=1,2,\dots} E(f_n^2) > 0$, эквивалентна по распределению системе Радемахера.

Рассмотрим теперь иную ситуацию. Пусть G – компактная абелева группа, Γ – группа характеров, определенных на ней, μ – мера Хаара на G . В соответствии с ранее приведенным определением множество $F \subset \Gamma$ называют *множеством Сидона*, если при некотором $C = C(F)$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)| \leq C \|f\|_\infty$$

для всякой $f \in C(G)$ такой, что

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f \bar{\gamma} d\mu = 0 \quad (\gamma \notin F).$$

Ж. Пизье [17] доказал следующее утверждение (мы приведем формулировку лишь в скалярном случае).

ТЕОРЕМА Е. Если $F = \{\gamma_n\} \subset \Gamma$ – множество Сидона, то с константой, зависящей только от константы Сидона $C(F)$,

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n \gamma_n \right\|_t \asymp \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t \quad (t \geq 1).$$

Из теорем Е и 1 сразу получаем следующее утверждение, которое иным способом (но тоже с использованием теоремы Е) было доказано в [18].

ТЕОРЕМА 3. Всякая бесконечная система Сидона $F = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ характеров, определенных на компактной абелевой группе, эквивалентна по распределению системе Радемахера. Константа эквивалентности при этом зависит лишь от константы Сидона $C(F)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Последовательности

$$f_n(x) = \sin(2\pi k_n x) \quad \text{и} \quad g_n(x) = \cos(2\pi k_n x) \quad (x \in [0, 1])$$

при условии $k_{n+1}/k_n \geq \lambda > 1$ эквивалентны по распределению системе Радемахера.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим тот факт, что именно аналогия в поведении рядов Радемахера и лакунарных тригонометрических рядов (см. введение) послужила исходным пунктом для выявления более глубоких связей между ними, приведя в результате к изучению систем, эквивалентных по распределению “модельной” системе Радемахера. Из работ, посвященных этой тематике, кроме [16]–[18] упомянем также заметку В. А. Родина и А. С. Белова [19]. В ней авторы, используя теорему D, перенесли результаты работы [20] о поведении рядов Радемахера в симметричных пространствах функций на лакунарные тригонометрические ряды. Как сказано в этой заметке, в 1988 г. на Северо-Кавказской школе-конференции один из ее авторов докладывал о совпадении с точностью до эквивалентности норм полиномов по системе Радемахера и лакунарных тригонометрических полиномов для многих симметричных пространств. Следствие 3 показывает, что последнее справедливо не для многих, а для всех симметричных пространств, так как норма функции в таком пространстве определяется распределением ее модуля [21; § 2.4]. Это замечание позволяет, в частности, усилить некоторые результаты работы [19]. Так, например, в теореме 2 из нее, устанавливающей взаимно однозначные условия эквивалентности норм лакунарных тригонометрических полиномов в симметричном пространстве нормам последовательностей их коэффициентов в пространствах l_1 и l_2 , требование интерполяционности симметричного пространства относительно пары (L_1, L_{∞}) является излишним.

§ 3. Выделение подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера

ТЕОРЕМА 4. Пусть система с.в. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , содержит подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $|f_{n_k}(\omega)| \leq D$ ($k = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$);
- 2) $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 ;
- 3) $d = \inf_{k=1,2,\dots} \|f_{n_k}\|_2 > 0$.

Тогда существует подсистема $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$, для которой

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i \right\|_t \asymp \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (a = (a_i)_{i=1}^\infty \in l_2, \quad t \geq 1) \quad (3.1)$$

с константой, зависящей только от D и d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано В. Ф. Гапошкиным (см. [2; теорема 1.3.2], подробное доказательство приведено в работе [1]), при условиях 1) и 2) можно выделить последовательность $\{g_i\} \subset \{f_{n_k}\}$, для которой при некотором $C_1 = C_1(D)$ и всех $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in l_2$ и $t \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i g_i \right\|_t \leq C_1 \sqrt{t} \|a\|_2. \quad (3.2)$$

Тогда для произвольного разложения $(a_i) = (b_i) + (c_i)$, $(b_i) \in l_1$, $(c_i) \in l_2$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i g_i \right\|_t &\leq \left\| \sum_{i=1}^\infty b_i g_i \right\|_\infty + \left\| \sum_{i=1}^\infty c_i g_i \right\|_t \\ &\leq D \sum_{i=1}^\infty |b_i| + C_1 \sqrt{t} \left(\sum_{i=1}^\infty c_i^2 \right)^{1/2} \leq \max(C_1; D) (\|b\|_1 + \sqrt{t} \|c\|_2). \end{aligned}$$

Отсюда по определению $\mathcal{H}$ -функционала получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i g_i \right\|_t \leq \max(C_1; D) \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (a = (a_i)_{i=1}^\infty \in l_2, \quad t \geq 1). \quad (3.3)$$

В доказательстве противоположного неравенства мы используем эквивалентность $\mathcal{H}$ -функционала $\mathcal{H}_{1,2}(t, a)$ норме $Q(t^2)$ (см. (1.1) и (1.2)), а также оценку сверху L_q -норм ($q > 1$) модифицированных произведений Рисса (применение в аналогичных ситуациях классических произведений см. в [2; § 1.4] или [10; § 8.4]).

Прежде всего, так как из условий 1) и 3) теоремы следует: $0 < d \leq \|g_i\|_2 \leq D$ ($i = 1, 2, \dots$), то ввиду положительной однородности обеих частей соотношения (3.1) можно считать, что $\|g_i\|_2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots$).

Пусть числовая последовательность $(\varepsilon_i)_{i=1}^\infty$ такая, что

$$\varepsilon_i \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon_i < \frac{1}{16} \min(1; D), \quad \sum_{k=i+1}^\infty \varepsilon_k < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

По условиям теоремы последовательность g_i^2 слабо компактна в L_2 . Поэтому существует $\{h_k\} \subset \{g_i\}$ такая, что $h_k^2 \rightarrow h$ слабо в этом пространстве, где $0 \leq h(\omega) \leq D^2$ и $\mathbf{E}(h) = 1$. Вместе с $\{g_i\}$ последовательность $h_k \rightarrow 0$ слабо в L_2 . Следовательно, можно найти номер k_1 так, что для функции $\varphi_1 = h_{k_1}$ выполнено

$$|\mathbf{E}(\varphi_1)| + |\mathbf{E}(h\varphi_1)| + |\mathbf{E}(\varphi_1^2 - h)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2D}.$$

Предположим, что номера $k_1 < k_2 < \dots < k_{i-1}$ и функции $\varphi_1 = h_{k_1}, \varphi_2 = h_{k_2}, \dots, \varphi_{i-1} = h_{k_{i-1}}$ ($i \geq 2$) уже выбраны. Найдем $k_i > k_{i-1}$ так, чтобы для $\varphi_i = h_{k_i}$ выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} \sum \left\{ |\mathbf{E}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| + |\mathbf{E}(h \varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| + |\mathbf{E}[\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_s} (\varphi_i^2 - h)]| \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^s |\mathbf{E}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_{l-1}} \varphi_{j_l}^2 \varphi_{j_{l+1}} \dots \varphi_{j_s} \varphi_i)| \right\} \leq 2^{-i} D^{-1} \varepsilon_i, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где $\varphi_{j_0} = \varphi_{j_{s+1}} = 1$, а сумма берется по всем наборам индексов $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l < \dots < j_s \leq i-1$ ($s = 1, 2, \dots, i-1$).

Покажем, что для последовательности $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ и произвольного $t \geq 1$ справедливо соотношение (3.1).

Пусть сначала $t \in \mathbb{N}$, а $\{A_j\}_{j=1}^t$ — произвольное разбиение натурального ряда на t множеств. Для $N \in \mathbb{N}$ и $j = 1, 2, \dots, t$ определим множества $A_j^N = \{i = 1, \dots, N : i \in A_j\}$ (возможно, некоторые из них пусты). Образует произведение Рисса, состоящие из блоков, соответствующих множествам A_j^N :

$$R_N(\omega) = \prod_{i=1}^N (1 + b_i \varphi_i(\omega)) = \prod_{j=1}^t \prod_{i \in A_j^N} (1 + b_i \varphi_i(\omega)),$$

где $b_i \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{i \in A_j} b_i^2 \leq D^{-2}. \quad (3.6)$$

Следуя классическому методу Сидона, для произвольной функции

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^\infty a_i \varphi_i(\omega), \quad a = (a_i)_{i=1}^\infty \in l_2,$$

оценим снизу интеграл

$$I_N = \int_{\Omega} R_N(\omega) \varphi(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = \sum_{i=1}^\infty a_i \mathbf{E}(R_N \varphi_i) = \sum_{i=1}^\infty a_i \beta_{i,N}. \quad (3.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_{i,N} = \mathbf{E}(R_N \varphi_i) = \int_{\Omega} \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k \varphi_k(\omega) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq N} b_{k_1} b_{k_2} \varphi_{k_1}(\omega) \varphi_{k_2}(\omega) \right. \\ \left. + \dots + b_1 b_2 \dots b_N \varphi_1(\omega) \dots \varphi_N(\omega) \right] \varphi_i(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = b_i \alpha_{i,N} + \gamma_{i,N}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

где $\alpha_{i,N} = 1$ ($i \leq N$), $\alpha_{i,N} = 0$ ($i > N$), а

$$\begin{aligned} \gamma_{i,N} = \mathbf{E}(\varphi_i) + \sum_{k=1, k \neq i}^N b_k \mathbf{E}(\varphi_k \varphi_i) + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq N} b_{k_1} b_{k_2} \mathbf{E}(\varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \varphi_i) \\ + \dots + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq N} b_{k_1} \dots b_{k_s} \mathbf{E}(\varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_s} \varphi_i) + \dots + b_1 \dots b_N \mathbf{E}(\varphi_1 \dots \varphi_N \varphi_i). \end{aligned}$$

Тогда

$$\gamma_{i,N} = S_1^i + S_2^i + S_3^i, \quad (3.9)$$

где суммы S_k^i ($k = 1, 2, 3$) определяются следующим образом. Представляя

$$\mathbf{E}(\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_s} \varphi_i^2) = \mathbf{E}(\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_s} h) + \mathbf{E}[\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_s} (\varphi_i^2 - h)],$$

отнесем к S_1^i все слагаемые, содержащие интегралы вида $\mathbf{E}(\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_s} \varphi_i)$ или $\mathbf{E}[\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_s} (\varphi_i^2 - h)]$, где $k_1 < k_2 < \cdots < k_s < i$. В сумму S_2^i включим все слагаемые с интегралами вида $\mathbf{E}(\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_{l-1}} \varphi_i \varphi_{k_l} \cdots \varphi_{k_s})$, где $k_1 < k_2 < \cdots < k_{l-1} \leq i < k_l < \cdots < k_s$, $1 \leq l \leq s$, а в S_3^i — слагаемые с интегралами $\mathbf{E}(\varphi_{k_1} \cdots \varphi_{k_s} h)$.

Ввиду соотношений (3.5), (3.4) и (3.6) мы получим оценки

$$|S_1^i| \leq \frac{\varepsilon_i}{D}, \quad |S_2^i| \leq \frac{1}{D} \sum_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon_i}{D}. \quad (3.10)$$

Так как в каждое слагаемое суммы S_3^i входит множитель b_i , то из (3.4) получаем

$$|S_3^i| \leq \frac{|b_i|}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{|b_i|}{8} \quad (3.11)$$

(множитель 2^{-i} из (3.5) мы пока не используем). Кроме того, при $i > N$ суммы S_2^i и S_3^i в (3.9) отсутствуют, и поэтому

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_{i,N}| \leq \frac{1}{D} \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{1}{16D}. \quad (3.12)$$

Пусть теперь $1 \leq i \leq N$. Для каждого $j = 1, 2, \dots, t$ ввиду соотношений (3.9)–(3.11), (3.4) и (3.6)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in A_j^N} \gamma_{i,N}^2 \right)^{1/2} &\leq \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i \in A_j^N} (S_k^i)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{2}{D} \sum_{i \in A_j^N} \varepsilon_i + \frac{1}{8} \left(\sum_{i \in A_j^N} b_i^2 \right)^{1/2} \leq \frac{3}{8D}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Соотношения (3.7) и (3.8) показывают, что

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{i=1}^N a_i b_i + \sum_{i=1}^N a_i \gamma_{i,N} + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \gamma_{i,N} \\ &= \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i b_i \right) + \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i \gamma_{i,N} \right) + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \gamma_{i,N}. \end{aligned}$$

Для каждого $j = 1, 2, \dots, t$ выберем b_i ($i \in A_j^N$) так, чтобы выполнялись условия (3.6) и

$$\sum_{i \in A_j^N} a_i b_i = \frac{1}{D} \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2},$$

а также $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|a\|_2 \leq 2 \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right)^{1/2} \leq 2 \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда из предыдущего равенства и соотношений (3.12), (3.13) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} I_N &\geq \frac{1}{D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in A_j^N} \gamma_{i,N}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i| |\gamma_{i,N}| \\ &\geq \frac{5}{8D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \gamma_{i,N}^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{2D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j^N} a_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство показывает, что для каждого $t \in \mathbb{N}$ и произвольного разбиения $\{A_j\}_{j=1}^t$ натурального ряда найдутся достаточно большое N и числа b_i ($i = 1, 2, \dots, N$), удовлетворяющие условиям (3.6), такие, что

$$I_N = \int_{\Omega} R_N(\omega) \varphi(\omega) dP(\omega) \geq \frac{1}{3D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Следующая часть доказательства – оценка интеграла I_N сверху выражением $C \|\varphi\|_t$, где $C > 0$ – некоторая константа. Ввиду неравенства Гёльдера

$$|I_N| \leq \|R_N\|_{t'} \|\varphi\|_t, \quad t' = \frac{t}{t-1}, \quad (3.15)$$

и неотрицательности произведений Рисса для этого достаточно оценить сверху величину

$$L_N = \|R_N\|_{t'}^{t'} = \int_{\Omega} [R_N(\omega)]^{t'} dP(\omega) \quad (3.16)$$

(при доказательстве того, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – система Сидона, требуется лишь оценка L_1 -норм произведений Рисса [2; теорема 1.4.1]).

Пусть $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$. По-прежнему $\{A_j\}_{j=1}^t$ – разбиение $\mathbb{N}$, $A_j^N = \{i = 1, \dots, N : i \in A_j\}$, числа b_i удовлетворяют соотношениям (3.6).

Из элементарного неравенства $(1+x)^y \leq 1+yx$ ($x \geq 1$, $0 < y \leq 1$) следует, что

$$\begin{aligned} [R_N(\omega)]^{t'} &\leq \prod_{i=1}^N (1 + b_i \varphi_i(\omega)) [1 + (t-1)^{-1} b_i \varphi_i(\omega)] \\ &\leq \prod_{i=1}^N \left[1 + \frac{D^2}{t-1} b_i^2 + \frac{t}{t-1} b_i \varphi_i(\omega) \right] \\ &= \prod_{j=1}^t \prod_{i \in A_j^N} \left[1 + \frac{D^2}{t-1} b_i^2 + \frac{t}{t-1} b_i \varphi_i(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Пусть $m(B)$ – количество элементов множества $B \subset \mathbb{N}$. Тогда внутреннее произведение в последнем выражении будет равно сумме

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{D^2}{t-1} \sum_{i \in A_j^N} b_i^2 + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^2 \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ i_1, i_2 \in A_j^N}} b_{i_1}^2 b_{i_2}^2 + \cdots + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^{m(A_j^N)} \prod_{i \in A_j^N} b_i^2 \right\} \\ & + \sum_{C_j \subset A_j^N} \left[1 + \left(\frac{D^2}{t-1} \right)^{m(A_j^N) - m(C_j)} \prod_{i \in A_j^N \setminus C_j} b_i^2 \right] \left(\frac{t}{t-1} \right)^{m(C_j)} \prod_{i \in C_j} b_i \varphi_i(\omega), \end{aligned}$$

где последняя сумма берется по всем непустым подмножествам C_j множества A_j^N . Ввиду неравенств (3.6) при $t \geq 3$ выражение в фигурных скобках не превосходит $(t-1)/(t-2)$. Поэтому из соотношений (3.16), (3.17) и опять (3.6) следует:

$$\begin{aligned} L_N & \leq \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^t + \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-1} \sum_{j=1}^t \sum_{C_j \subset A_j^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{m(C_j)+1} \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i \in C_j} \varphi_i(\omega) \right] \right| \\ & + \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq t} \sum_{C_{j_1} \subset A_{j_1}^N} \sum_{C_{j_2} \subset A_{j_2}^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{m(C_{j_1}) + m(C_{j_2}) + 2} \\ & \quad \times \left| \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^2 \prod_{i \in C_{j_k}} \varphi_i(\omega) \right] \right| \\ & + \cdots + \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-s} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq t} \sum_{C_{j_1} \subset A_{j_1}^N} \cdots \sum_{C_{j_s} \subset A_{j_s}^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\sum_{k=1}^s m(C_{j_k}) + s} \\ & \quad \times \left| \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^s \prod_{i \in C_{j_k}} \varphi_i(\omega) \right] \right| \\ & + \cdots + \sum_{C_1 \subset A_1^N} \cdots \sum_{C_t \subset A_t^N} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{\sum_{j=1}^t m(C_j) + t} \left| \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^t \prod_{i \in C_j} \varphi_i(\omega) \right] \right|. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Если $t \geq 3$, то

$$\frac{t}{t-1} \leq 2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^{t-s} \left(\frac{t}{t-1} \right)^s \leq 4e \quad (s = 0, 1, \dots, t). \quad (3.19)$$

Кроме того, так как множества A_j^N ($j = 1, 2, \dots, t$) попарно не пересекаются, то под интегралами в последнем выражении стоят различные произведения попарно различных функций φ_i ($i = 1, 2, \dots, N$). При этом число их равно $m(C_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) для слагаемых первой, $m(C_{j_1}) + m(C_{j_2})$ ($1 \leq j_1 < j_2 \leq t$) – для слагаемых второй, $\dots$, $\sum_{j=1}^t m(C_j)$ – для слагаемых последней суммы. Следовательно, максимальный из индексов функций φ_i в каждом подынтегральном произведении не меньше, чем $m(C_j)$, $m(C_{j_1}) + m(C_{j_2})$, $\dots$, $\sum_{j=1}^t m(C_j)$ соответственно. В итоге из (3.18) и (3.19) получаем

$$L_N \leq 4e \left\{ \sum_{i=1}^N 2^i \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq i-1} |\mathbb{E}(\varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_s} \varphi_i)| \right\}, \quad (3.20)$$

где внутренняя сумма берется по всем наборам индексов $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq i-1$. Поэтому из соотношений (3.4) и (3.5) следует, что

$$L_N \leq \frac{4e}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < 2,$$

откуда ввиду (3.15) и (3.16) для всех $N \in \mathbb{N}$

$$|I_N| \leq 2\|\varphi\|_t.$$

Учитывая соотношение (3.14), из последнего неравенства получаем

$$\sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} \leq 6D\|\varphi\|_t.$$

Таким образом, по лемме 1 для натуральных $t \geq 3$ и произвольных $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2$ выполнено неравенство

$$\mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \leq 6\sqrt{2}D\|\varphi\|_t. \quad (3.21)$$

Проверим его справедливость для $t = 1, 2$.

Покажем, что построенная нами система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – базисная последовательность Рисса, т.е.

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \right\|_2 \asymp \|(a_i)\|_2. \quad (3.22)$$

Действительно, так как мы считаем, что $\|\varphi_i\|_2 = 1$, то ввиду (3.5) для произвольного $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_i a_j \mathbb{E}(\varphi_i \varphi_j) \\ &\geq \sum_{i=1}^m a_i^2 \left\{ 1 - 2 \left[\sum_{1 \leq i < j \leq m} (\mathbb{E}(\varphi_i \varphi_j))^2 \right]^{1/2} \right\} \geq \frac{1}{2} \|(a_i)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Аналогично

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_2^2 \leq \frac{3}{2} \|(a_i)\|_2^2$$

и (3.22) доказано.

Соотношение (3.2) показывает, что $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, а значит, и $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – S_p -система для любого $p < \infty$. Поэтому она является системой Банаха [2; следствие 1.3.1], т.е. с некоторым $M = M(D)$

$$\|a\|_2 \leq M \left\| \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i \right\|_1 \quad (a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2). \quad (3.24)$$

Так как $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$, то $\mathcal{K}(1, a; l_1, l_2) = \|a\|_2$. Следовательно, ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала из соотношений (3.23) и (3.24) получаем

$$\mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{2}, a) \leq \sqrt{2} \mathcal{K}_{1,2}(1, a) \leq 2\|\varphi\|_2 \quad (3.25)$$

и

$$\mathcal{H}_{1,2}(1, a) \leq M \|\varphi\|_1. \quad (3.26)$$

Для произвольного $t \geq 1$ найдем натуральное t_0 такое, что $t_0 \leq t < t_0 + 1$. Тогда опять ввиду вогнутости $\mathcal{H}$ -функционала, а также соотношений (3.21), (3.25) и (3.26)

$$\mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \leq \sqrt{t/t_0} \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{t_0}, a) \leq \sqrt{2} \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{t_0}, a) \leq C \|\varphi\|_t,$$

где $C = \sqrt{2} \max(2; M; 6\sqrt{2} D)$ зависит только от D .

Так как соотношение (3.3) выполнено и для системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, то доказательство теоремы закончено.

Следующие два утверждения – непосредственные следствия теорем 1 и 4.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы из системы $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ с.в., определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , можно было выделить подсистему $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентную по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$, необходимо и достаточно существование подпоследовательности $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, удовлетворяющей условиям:*

- 1) $|f_{n_k}(\omega)| \leq D$ ($k = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$);
- 2) $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 ;
- 3) $d = \inf_{k=1,2,\dots} \|f_{n_k}\|_2 > 0$.

При этом константа эквивалентности зависит лишь от D и d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 выделим подпоследовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$, для которой выполнено (3.1). Но тогда по теореме 1 $\{\varphi_i\} \overset{P}{\sim} \{r_n\}$ и достаточность доказана.

Необходимость условий 1) и 3) следует из определения эквивалентности по распределению и того, что аналогичными свойствами обладает система Радемахера. Как отмечалось во введении, система Радемахера является S_p -системой для любого $p < \infty$. Следовательно, это же свойство имеет и система, эквивалентная ей по распределению. Тем самым необходимость условия 2) следует из теоремы А, сформулированной во введении.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В связи с теоремой 5 напомним о следующей проблеме, поставленной Г. Алексичем [22; § 3.2]. Из любой ли полной ортогональной системы функций можно выделить бесконечную мультипликативную или даже строго мультипликативную подсистему? Утверждение теоремы 5 дает положительный ответ на близкий вопрос: из любой системы с.в., обладающей свойствами 1)–3), можно выделить подсистему, эквивалентную по распределению строго мультипликативной (и даже состоящей из независимых функций) системе Радемахера.

ТЕОРЕМА 6. *Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$), то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентную по распределению системе Радемахера. Константа этой эквивалентности зависит только от D .*

Ясно, что последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющая условию (3.1), является системой Сидона (как и S_p -системой для всех $p < \infty$ с константой $K_p \asymp \sqrt{p}$). Как оказывается, ее “сидоновость” является в определенном смысле усиленной.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Предположим, что из системы с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющую условиям 1)–3) теоремы 5. Тогда $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ содержит подсистему $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что для некоторых констант $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, зависящих лишь от D и d , и для любого полинома*

$$T(\omega) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(\omega)$$

существует множество $E = E(T) \subset \Omega$, $P(E) > \alpha_1 2^{-m}$ такое, что

$$|T(\omega)| \geq \alpha_2 \|T\|_\infty \geq \alpha_3 \sum_{i=1}^m |a_i| \quad (\omega \in E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5 существует подпоследовательность $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$ такая, что при некотором $C > 0$ и всех $z > 0$

$$C^{-1} |\{|\tilde{T}(x)| > Cz\}| \leq P\{|T(\omega)| > z\} \leq C |\{|\tilde{T}(x)| > C^{-1}z\}|,$$

где $\tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^m a_i r_i(x)$ ($x \in [0, 1]$). В частности, отсюда получаем

$$C^{-1} \|T\|_\infty \leq \|\tilde{T}\|_\infty \leq C \|T\|_\infty.$$

Поэтому из определения функций Радемахера следует

$$\begin{aligned} P\{|T(\omega)| > (2C^2)^{-1} \|T\|_\infty\} &\geq P\{|T(\omega)| > (2C)^{-1} \|\tilde{T}\|_\infty\} \\ &\geq C^{-1} |\{|\tilde{T}(x)| > 2^{-1} \|\tilde{T}\|_\infty\}| \geq C^{-1} 2^{-m}. \end{aligned}$$

Положим $\alpha_1 = C^{-1}$, $\alpha_2 = (2C^2)^{-1}$ и $E = E(T) = \{\omega \in \Omega : |T(\omega)| > \alpha_2 \|T\|_\infty\}$. Тогда для $\omega \in E$

$$|T(\omega)| > \alpha_2 \|T\|_\infty \geq \alpha_2 C^{-1} \|\tilde{T}\|_\infty = \alpha_3 \sum_{i=1}^m |a_i|,$$

где $\alpha_3 = \alpha_2 C^{-1}$.

Как уже отмечалось во введении (см. теорему В'), при тех же условиях на последовательность функций, измеримых на $[0, 1]$, что и в теореме В, из нее можно выделить подсистему, обладающую свойством Сидона–Зигмунда, а при дополнительном условии (0.3) – свойством Сидона–Зигмунда в узком смысле. Как показывают два следующих результата, справедливы и несколько более сильные утверждения.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ функций, измеримых на $[0, 1]$, можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющую условиям 1)–3) теоремы 5. Тогда существует подсистема $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$ со следующим свойством:*

для некоторого множества $E \subset [0, 1]$, $|E| > 0$, и любого промежутка $I \subset [0, 1]$, $|I \cap E| > 0$, найдется номер $k_0 = k_0(I)$ такой, что последовательность $\{\varphi_i \chi_I\}_{i=k_0}^\infty$ ($\chi_I(x) = 1$, $x \in I$, и $\chi_I(x) = 0$, $x \notin I$) эквивалентна по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$. Константа этой эквивалентности зависит от D , d и промежутка I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 достаточно найти подсистему $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$ и множество $E \subset [0, 1]$, $|E| > 0$, такие, что для всякого промежутка $I \subset [0, 1]$, $|I \cap E| > 0$, существует номер $k_0 = k_0(I)$ такой, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{k_0+i-1} \chi_I \right\|_t \asymp \mathcal{H}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (a = (a_i)_{i=1}^{\infty}, t \geq 1)$$

(константа эквивалентности зависит от D , d и I).

Рассуждения, приводящие к последнему соотношению, в основном аналогичны тем, что использовались в доказательстве теоремы 4. Сделаем лишь несколько замечаний.

Прежде всего, неравенство (3.2) остается, конечно, справедливым, если функции g_i заменить на функции $g_i \chi_I$ (I – произвольный промежуток из $[0, 1]$).

Далее, как и в доказательстве теоремы 1.4.2 из [2], подпоследовательность $\{\varphi_i\} \subset \{g_i\}$ можно выделить так, что соотношения типа (3.5) выполняются для интегралов по любому промежутку $I \subset [0, 1]$.

И наконец, по известной лемме Марцинкевича [2; лемма 1.2.5] можно считать, что для некоторого множества $E \subset [0, 1]$, $|E| > 0$, при любом $F \subset E$, $|F| > 0$, выполнено

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \int_F \varphi_i^2(x) dx > 0. \quad (3.27)$$

После этого фактически повторяется доказательство теоремы 4, только интегралы по $[0, 1]$ нужно заменить интегралами по промежутку I такому, что $|I \cap E| > 0$.

ТЕОРЕМА 8. *Предположим, что из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций, измеримых на $[0, 1]$, можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющую условиям 1) и 2) теоремы 5, а также условию (0.3).*

Тогда существует подсистема $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$ такая, что для всякого промежутка $I \subset [0, 1]$, $|I| > 0$, найдется номер $k_0 = k_0(I)$, при котором последовательность $\{\varphi_i \chi_I\}_{i=k_0}^{\infty}$ эквивалентна по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$.

Доказательство теоремы 8 совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы, так как ввиду условия (0.3) можно считать, что выделенная подсистема $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет соотношению (3.27) для любого множества $F \subset [0, 1]$ положительной меры.

§ 4. Плотность подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера

Рассмотрим задачу выделения подсистем из конечных равномерно ограниченных ортонормированных наборов $\{f_n\}_{n=1}^N$ функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Мы покажем, что любой такой набор содержит подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ “логарифмической плотности” (т.е. $s \geq C \log_2 N$), эквивалентную по распределению системе первых s функций Радемахера с константой, не зависящей от s . Этот результат является усилением теоремы С из введения, доказанной Б. С. Кашиным [9].

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^N$ – ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Тогда существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N$), где $s \geq \max\{\lfloor \frac{1}{6} \log_2 N \rfloor; 1\}$, такой, что*

для некоторого $C > 0$, зависящего только от D , всех $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $z > 0$

$$C^{-1} \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^s a_i r_i(x) \right| > Cz \right\} \right| \leq \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i}(x) \right| > z \right\} \right| \leq C \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^s a_i r_i(x) \right| > C^{-1}z \right\} \right|.$$

Для доказательства нам понадобятся две леммы. Первая из них хорошо известна [10; лемма 8.4.1].

ЛЕММА 3. Из любого набора функций $\{f_n\}_{n=1}^N$ ($\log_2 N \geq 6$), удовлетворяющего условиям теоремы 9, можно выбрать функции $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N$), где $s \geq [\frac{1}{6} \log_2 N]$, для которых выполнено соотношение

$$\sum_{\theta \in \mathcal{A}_s} \left\{ \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^s \left(\frac{f_{n_i}(x)}{D} \right)^{\theta_i} \right] \right\}^2 \leq 10^{-s}, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{A}_s$ – совокупность всевозможных наборов $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s$, таких, что

$$\text{а) } \theta_i = 0, 1 \text{ или } 2; \quad \text{б) } \sum_{i: \theta_i=1} 1 \geq 1; \quad \text{с) } \sum_{i: \theta_i=2} 1 \leq 1.$$

Вторая лемма позволяет при определенных условиях продолжить равномерно ограниченный набор функций, определенных на $[0, 1]$, на более широкое множество так, чтобы он стал мультипликативным, оставшись при этом равномерно ограниченным. Аналогичные результаты о продолжении до ортогонального набора см. в [10; § 7.1].

ЛЕММА 4. Пусть $\{g_i\}_{i=1}^s$ – набор функций на $[0, 1]$, $|g_i(x)| \leq D$ ($i = 1, 2, \dots, s$; $x \in [0, 1]$) и

$$\max_{\theta \in \mathcal{A}'_s} \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^s \left(\frac{g_i(x)}{D} \right)^{\theta_i} \right] \right| < 2^{-s}, \quad (4.2)$$

где $\mathcal{A}'_s$ – совокупность всех наборов $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s \in \mathcal{A}_s$ таких, что $\theta_i = 0$ или 1 .

Существует мультипликативный набор $\{h_i\}_{i=1}^s$ функций на отрезке $[0, 2]$ такой, что $h_i(x)\chi_{[0,1]}(x) = g_i(x)$ и $\|h_i\|_{L_\infty[0,2]} \leq D$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим:

$$[1, 2) = \bigcup_{k=1}^{2^s} \Delta_k, \quad \Delta_k = [a_{k-1}, a_k), \quad a_k = 1 + k2^{-s} \quad (k = 1, 2, \dots, 2^s).$$

Произвольным образом установим взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{A}'_s$ и семейством промежутков $\{\Delta_k\}_{k=1}^{2^s-1}$. Определим функции h_i на каждом промежутке Δ_k из этого семейства.

Пусть $\theta = (\theta_i)_{i=1}^s$ – соответствующий Δ_k элемент множества $\mathcal{A}'_s$. Обозначим $\{i_j\}_{j=1}^m = \{i = 1, 2, \dots, s : \theta_i = 1\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ ($m = 1, 2, \dots, s$).

Для $\alpha \in \Delta_k$ определим функцию

$$u_\alpha(x) = \chi_{[a_{k-1}, \alpha)}(x) - \chi_{[\alpha, a_k]}(x) \quad (x \in \Delta_k).$$

Тогда величина

$$v(\alpha) = \int_{\Delta_k} u_\alpha(x) dx = 2\alpha - a_{k-1} - a_k \quad (a_{k-1} \leq \alpha \leq a_k)$$

принимает все значения из отрезка $[-2^{-s}, 2^{-s}]$. Так как по условию (4.2) для функций $\bar{g}_i(x) = g_i(x)/D$ выполнено: $|\mathbf{E}(\bar{g}_{i_1} \bar{g}_{i_2} \cdots \bar{g}_{i_m})| < 2^{-s}$, то найдется $\alpha_k \in (a_{k-1}, a_k)$ такое, что

$$v(\alpha_k) = -\mathbf{E}(\bar{g}_{i_1} \bar{g}_{i_2} \cdots \bar{g}_{i_m}). \quad (4.3)$$

Пусть сначала $m \geq 2$. Возьмем систему кусочно постоянных функций $d_j(x)$, $x \in [a_{k-1}, \alpha_k]$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$), со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) & \quad |d_j(x)| \equiv 1; \\ 2) & \quad \int_{a_{k-1}}^{\alpha_k} d_{j_1} d_{j_2} \cdots d_{j_l} dx = 0 \quad (1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq m-1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

(такую систему можно построить, например, перенеся на промежуток $[a_{k-1}, \alpha_k]$ с отрезка $[0, 1]$ функции Радемахера). Через $c_j(x)$, $x \in [\alpha_k, a_k]$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$), обозначим аналогичную систему, но построенную на промежутке $[\alpha_k, a_k]$.

Тогда если $x \in \Delta_k$, то

$$\begin{aligned} h_i(x) & \equiv 0 \quad (i \neq i_j, \quad j = 1, 2, \dots, m), \\ h_{i_j}(x) & = D[d_j(x)\chi_{[a_{k-1}, \alpha_k]}(x) + c_j(x)\chi_{[\alpha_k, a_k]}(x)] \quad (j = 1, 2, \dots, m-1) \end{aligned}$$

и

$$h_{i_m}(x) = D \left[\prod_{j=1}^{m-1} d_j(x)\chi_{[a_{k-1}, \alpha_k]}(x) - \prod_{j=1}^{m-1} c_j(x)\chi_{[\alpha_k, a_k]}(x) \right].$$

Ввиду соотношений (4.4) и (4.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} dx & = D^m \int_{\Delta_k} u_{\alpha_k}(x) dx \\ & = D^m v(\alpha_k) = -\mathbf{E}(g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В то же время для любого другого набора индексов $1 \leq i'_1 < \cdots < i'_k \leq s$ из определения функций h_i ($i = 1, 2, \dots, s$), а также из (4.4) следует

$$\int_{\Delta_k} h_{i'_1} h_{i'_2} \cdots h_{i'_l} dx = 0. \quad (4.6)$$

Если же $m = 1$, то положим

$$h_i(x) \equiv 0 \quad (i \neq i_1), \quad h_{i_1}(x) = Du_{\alpha_k}(x)$$

и соотношения (4.5) и (4.6) опять выполнены.

Доопределим функции $h_i(x)$ на всем отрезке $[0, 2]$: $h_i(x) = g_i(x)$ ($x \in [0, 1]$), $h_i(x) = 0$ ($x \in \Delta_{2^s}$). Тогда ввиду (4.5) и (4.6) набор $\{h_i\}_{i=1}^s$ — мультипликативный на отрезке $[0, 2]$ и $|h_i(x)| \leq D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Ввиду теоремы 1 и замечания 1 после нее достаточно показать, что существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$, $s \geq \max\{\lfloor \frac{1}{6} \log_2 N \rfloor; 1\}$, такой, что с некоторой константой, зависящей только от D ,

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_t \asymp \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (t \geq 1, \quad a = (a_i)_{i=1}^s), \quad (4.7)$$

где по-прежнему $\mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) = \mathcal{K}(\sqrt{t}, a; l_1, l_2)$.

С помощью леммы 3 выделим подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($s \geq \max\{\lfloor \frac{1}{6} \log_2 N \rfloor; 1\}$) так, чтобы она удовлетворяла условию (4.1). Так как $\mathcal{A}'_s \subset \mathcal{A}_s$, то одновременно для $g_i = f_{n_i}$ выполнено и соотношение (4.2). Поэтому по лемме 4 набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ можно продолжить до мультипликативного набора $\{h_i\}_{i=1}^s$ на $[0, 2]$, $|h_i(x)| \leq D$. Но тогда функции $h'_i(x) = h_i(2x)$ образуют мультипликативную систему уже на $[0, 1]$, $|h'_i(x)| \leq D$, и поэтому по следствию 3 из [16] для произвольных $t \geq 1$ и $a = (a_i)_{i=1}^s$

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i h'_i \right\|_{L_t[0,1]} \leq C_1 \sqrt{t} \|a\|_2,$$

где $C_1 > 0$ зависит лишь от D . Следовательно,

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_t \leq 2C_1 \sqrt{t} \|a\|_2, \quad (4.8)$$

откуда точно так же, как при доказательстве теоремы 4 (см. неравенство (3.20)), получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_t \leq C \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (t \geq 1), \quad (4.9)$$

где $C = \max(D; 2C_1)$ зависит только от D .

Для доказательства противоположного неравенства обозначим

$$a = (a_i)_{i=1}^s \quad \text{и} \quad P(x) = \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i}(x).$$

Пусть сначала $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$. Тогда если $s \leq 16D^2$, то по определению $\mathcal{K}$ -функционала

$$\|P\|_t \geq \|P\|_2 = \|a\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s |a_i| \geq \frac{1}{4D} \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a). \quad (4.10)$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда

$$s > 16D^2. \quad (4.11)$$

Образует произведения Рисса

$$R_s(x) = \prod_{i=1}^s \left(1 + \frac{b_i}{D} f_{n_i}(x) \right).$$

Для произвольного разбиения $\{A_j\}_{j=1}^t$ множества $\{1, 2, \dots, s\}$ на t непересекающихся подмножеств (возможно, некоторые из них пусты) потребуем, чтобы

$$\sum_{i \in A_j} b_i^2 \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, t). \quad (4.12)$$

Оценим снизу интеграл

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^1 P(x) R_s(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^s a_i \int_0^1 f_{n_i}(x) dx + \sum_{i=1}^s a_i \int_0^1 f_{n_i}(x) \sum_{\theta \in \mathcal{A}'_s} \prod_{k=1}^s \left[\frac{b_k}{D} f_{n_k}(x) \right]^{\theta_k} dx. \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$I_s = D^{-1} \sum_{i=1}^s a_i b_i + \sum_{i=1}^s a_i \gamma_i, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \int_0^1 f_{n_i}(x) dx + \int_0^1 f_{n_i}(x) \sum_{\theta \in \mathcal{A}'_s(i)} \prod_{k=1}^s \left[\frac{b_k}{D} f_{n_k}(x) \right]^{\theta_k} dx, \\ \mathcal{A}'_s(i) &= \mathcal{A}'_s \setminus \{\theta^i\}, \quad \theta^i = (\theta_j^i), \quad \theta_i^i = 1, \quad \theta_j^i = 0 \quad (j \neq i). \end{aligned}$$

Ввиду условия (4.1) и того, что $|b_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$), после применения неравенства Коши–Буняковского получим

$$\sum_{i=1}^s |\gamma_i| \leq D \sum_{\theta \in \mathcal{A}_s} \left| \int_0^1 \prod_{k=1}^s \left[\frac{f_{n_k}(x)}{D} \right]^{\theta_k} dx \right| \leq D(s2^s)^{1/2} 10^{-s/2} = D(s5^{-s})^{1/2}.$$

Так как из-за (4.11) $(s5^{-s})^{1/2} \leq 8/s < 2^{-1}D^{-2}$, то отсюда

$$\sum_{i=1}^s |\gamma_i| \leq \frac{1}{2D}. \quad (4.14)$$

Выберем для каждого $j = 1, 2, \dots, t$ числа b_i ($i \in A_j$) так, чтобы выполнялось (4.12) и

$$\sum_{i \in A_j} a_i b_i = \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда из (4.13) и (4.14) получаем

$$\begin{aligned} I_s &\geq \frac{1}{D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^t \left| \sum_{i \in A_j} a_i \gamma_i \right| \\ &\geq \frac{1}{D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in A_j} |\gamma_i| \right) \\ &\geq \frac{1}{2D} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{i \in A_j} a_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как разбиение $\{A_j\}_{j=1}^t$ произвольно, то в итоге по лемме 1

$$I_s \geq \frac{1}{2\sqrt{2}D} \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (t \in \mathbb{N}, \ t \geq 3). \quad (4.15)$$

Оценим теперь интеграл I_s сверху. По неравенству Гёльдера

$$|I_s| \leq \|R_s\|_{t'} \|P\|_t, \quad t' = \frac{t}{t-1}.$$

Точно так же, как в доказательстве теоремы 4, можно показать, что для $t \geq 3$

$$\|R_s\|_{t'} \leq 4e2^s \sum_{\theta \in \mathcal{A}'_s} \left| \mathbb{E} \left\{ \prod_{i=1}^s \left[\frac{f_{n_i}(x)}{D} \right]^{\theta_i} \right\} \right|,$$

откуда ввиду (4.1), вложения $\mathcal{A}'_s \subset \mathcal{A}_s$ и неравенства Коши–Буняковского получаем: $\|R_s\|_{t'} \leq 4e$. Поэтому $|I_s| \leq 4e\|P\|_t$ и из (4.15) следует

$$\mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \leq 8\sqrt{2}eD\|P\|_t \quad (t \in \mathbb{N}, \ t \geq 3). \quad (4.16)$$

Аналогичные соотношения имеют место также для $t = 2$ и $t = 1$. Действительно, так как система $\{f_n\}_{n=1}^N$ ортонормирована и $\mathcal{K}_{1,2}(1, a) = \|a\|_2$, то

$$\mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{2}, a) \leq \sqrt{2} \mathcal{K}_{1,2}(1, a) = \sqrt{2} \|P\|_2. \quad (4.17)$$

Если же $t = 1$, то ввиду (4.8), как и в доказательстве теоремы 4, можно применить [2; следствие 1.3.1] и, значит,

$$\mathcal{K}_{1,2}(1, a) = \|a\|_2 \leq M\|P\|_1, \quad (4.18)$$

где $M > 0$ зависит только от D .

Наконец, переходя стандартным образом от натуральных (см. (4.16)–(4.18)) к произвольным $t \geq 1$, получаем

$$\mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a) \leq C\|P\|_t,$$

где константа $C = \sqrt{2} \max(M; \sqrt{2}; 8\sqrt{2}eD)$ зависит лишь от D . Поэтому ввиду (4.9) эквивалентность (4.7) выполняется с константой, зависящей только от D , и доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пример тригонометрической системы показывает, что теорема 9 (точно так же, как и теорема С из введения) по порядку не улучшаема. Действительно, как доказал С.Б. Стечкин [23], если последовательность $\{\sqrt{2} \cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^\infty$ ($x \in [0, 1]$) является системой Сидона, то

$$\sum_{k: n_k < N} 1 \leq C \ln N \quad (N = 2, 3, \dots).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Доказанные в этом параграфе теоремы о выделении как бесконечных, так и конечных подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера, окончательны в том смысле, что дальнейшее “прореживание” не может улучшить распределений соответствующих полиномов. Как легко проверить, для любой подпоследовательности $\{r_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ системы Радемахера и произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $z > 0$

$$\left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^m a_i r_{n_i}(x) \right| > z \right\} \right| = \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^m a_i r_i(x) \right| > z \right\} \right|.$$

§ 5. $\mathcal{K}$ -замкнутая представимость банаховых пар

Назовем банахову пару (X_0, X_1) $\mathcal{K}$ -замкнуто представимой в банаховой паре (Y_0, Y_1) , если существует линейный оператор $T: X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ такой, что

- а) оператор T ограниченно и инъективно действует из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 ;
- б) с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$,

$$\mathcal{K}(t, Tx; Y_0, Y_1) \asymp \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1).$$

В [24] (см. также [25]) показано, что пара (l_1, l_2) $\mathcal{K}$ -замкнуто представима в паре (L_∞, G) пространств функций, измеримых на $[0, 1]$. Через G здесь обозначается замыкание пространства L_∞ в пространстве Орлича L_N , $N(u) = e^{u^2} - 1$. При этом оператор T можно определить следующим образом:

$$Ta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \quad (a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2).$$

Здесь, как и выше, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система Радемахера на $[0, 1]$.

Предположим, что последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, измеримых на $[0, 1]$, удовлетворяет свойствам 1)–3) теоремы 5. Тогда из нее можно выделить подсистему $\{\varphi_i\}$, эквивалентную по распределению системе Радемахера. Так как в [24] все доказательства используют лишь оценки распределений модулей полиномов по системе Радемахера, то все результаты этой работы будут справедливы и для $\{\varphi_i\}$. В частности, оператор

$$T_\varphi a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) \quad (a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2)$$

также осуществляет $\mathcal{K}$ -замкнутую представимость пары (l_1, l_2) в паре (L_∞, G) .

Докажем теперь одно отрицательное утверждение о $\mathcal{K}$ -замкнутой представимости пар, тесно связанное с предыдущим примером.

ТЕОРЕМА 10. *Пара (l_1, l_2) не является $\mathcal{K}$ -замкнуто представимой в паре (L_∞, L_2) пространств с.в., определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что, напротив, существует линейный оператор $T: l_2 \rightarrow L_2$, для которого

$$\|Ta\|_\infty \asymp \|a\|_1 \quad (a \in l_1), \quad \|Ta\|_2 \asymp \|a\|_2 \quad (a \in l_2) \quad (5.1)$$

и при некотором $C_1 > 0$

$$C_1^{-1} \mathcal{K}_{1,2}(t, a) \leq \mathcal{K}(t, Ta; L_\infty, L_2) \leq C_1 \mathcal{K}_{1,2}(t, a) \quad (a \in l_2, t > 0), \quad (5.2)$$

где по-прежнему $\mathcal{K}_{1,2}(t, a) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$.

Обозначим $f_n = Te_n$, где $e_n = (\delta_n^j)$, $\delta_n^n = 1$, $\delta_n^j = 0$ ($j \neq n$). Тогда из (5.1) получаем, что для некоторых $D > 0$ и $d > 0$

$$D^{-1} \|a\|_1 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_\infty \leq D \|a\|_1 \quad (a \in l_1)$$

и

$$d\|a\|_2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_2 \leq d^{-1}\|a\|_2 \quad (a \in l_2). \quad (5.3)$$

Отсюда, в частности,

$$|f_n(\omega)| \leq D \quad (n = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega) \quad \text{и} \quad \|f_n\|_2 \geq d. \quad (5.4)$$

Кроме того, из (5.3) следует, что $f_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и для любых $k, m \in \mathbb{N}$, $k \leq m$,

$$\left\| \sum_{n=1}^k a_n f_n \right\|_2 \leq d^{-2} \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_2.$$

Следовательно, система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в замкнутой по норме L_2 линейной оболочке Z этой системы [26; part I, § 1]. Иначе говоря, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базисная последовательность Рисса, откуда для $g \in Z$ $E(gf_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ [2; § 1.1]. Если $g \in L_2$ произвольна, то $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in Z$, $g_2 \in Z^\perp$ ($Z^\perp$ – ортогональное дополнение к Z) и $E(gf_n) = E(g_1 f_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$f_n \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } L_2 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5.5)$$

Соотношения (5.4) и (5.5) показывают, что для системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены условия 1)–3) теоремы 5. Значит, существует подпоследовательность $\{\varphi_i\} \subset \{f_n\}$, эквивалентная по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$. Отсюда и из неравенства Хинчина (см. [3] или [6; § 4.5]) получаем:

$$C_2^{-1}\|a\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \right\|_p \leq C_2\|a\|_2 \quad (a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in l_2), \quad (5.6)$$

где константа $C_2 > 0$ зависит лишь от D , d и $p \in [1, \infty)$.

В то же время из (5.2) следует

$$C_1^{-1}\mathcal{K}_{1,2}(t, a) \leq \mathcal{K}\left(t, \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i; L_\infty, L_2\right) \leq C_1\mathcal{K}_{1,2}(t, a) \quad (a \in l_2, \quad t > 0).$$

Поэтому, применяя к парам (L_∞, L_2) и (l_1, l_2) интерполяционный функтор $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$ с параметрами $0 < \theta < 1$, $p = 2/\theta$ (см. § 1), ввиду [11; теорема 5.2.1] получим, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \right\|_p \asymp \|a\|_{r, p} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^*)^p i^{p/r-1} \right\}^{1/p},$$

где $r = 2/(2 - \theta) < 2$ (константа последней эквивалентности зависит только от C_1 и θ). Так как $\|a\|_{r, p} \neq \|a\|_2$, то последнее соотношение противоречит неравенствам (5.6) при $p = 2/\theta$.

Автор выражает благодарность Б. С. Кашину за постановку задачи, решение которой составляет содержание § 4.

Список литературы

1. Асташкин С. В. О выделении подсистем, “мажорируемых” системой Радемахера // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 4. С. 483–495.
2. Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции // УМН. 1966. Т. 21. № 6. С. 3–82.
3. Khintchine A. Über dyadische Brüche // Math. Z. 1923. V. 18. P. 109–116.
4. Zygmund A. Sur les séries trigonométriques lacunaires // J. Lond. Math. Soc. (2). 1930. V. 5. № 2. P. 138–145.
5. Banach S. Sur les séries lacunaires // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A. 1933. № 4/8. P. 149–154.
6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
7. Zygmund A. On lacunary trigonometric series // Trans. Amer. Math. Soc. 1932. V. 34. № 3. P. 435–446.
8. Kaczmarz S., Steinhaus G. Le système orthogonal de M. Rademacher // Studia Math. 1930. V. 2. P. 231–247.
9. Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.
10. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
11. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
12. Montgomery-Smith S. J. The distribution of Rademacher sums // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. № 2. P. 517–522.
13. Holmstedt T. Interpolation of quasi-normed spaces // Math. Scand. 1970. V. 26. P. 177–199.
14. Gluskin E. D., Kwapień S. Tail and moment estimates for sums of independent random variables with logarithmically concave tails // Studia Math. 1995. V. 114. № 3. P. 303–309.
15. Казан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
16. Jakubowski J., Kwapień S. On multiplicative systems of functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1979. V. 27. № 9. P. 689–694.
17. Pisier G. Les inégalités de Khintchine-Kahane d’après C. Borell // Semin. Geom. des Espaces de Banach, Ec. polytech., Cent. Math., 1977–1978. Exposé № 7, 1978. P. 1–14.
18. Aamar N. H., Montgomery-Smith S. On the distribution of Sidon series // Ark. Mat. 1993. V. 31. № 1. P. 13–26.
19. Белов А. С., Родин В. А. Нормы лакунарных полиномов в функциональных пространствах // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 3. С. 137–139.
20. Rodin V. A., Semyonov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. V. 1. № 3. P. 207–222.
21. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
22. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963.
23. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 385–412.
24. Асташкин С. В. Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАН. Сер. МММИУ. 1997. Т. 1. № 1. С. 18–35.
25. Асташкин С. В. О рядах по системе Радемахера, “близких” к L_∞ // Функци. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. № 3. С. 62–65.
26. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

Самарский государственный университет
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию
12.08.1999