



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ВЫДЕЛЕНИИ ПОДСИСТЕМ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СИСТЕМЕ РАДЕМАХЕРА

С. В. Асташкин

0. Введение. Назовем системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин, определенных на вероятностных пространствах $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ и $(\Omega', \Sigma', \mathbb{P}')$ соответственно, *эквивалентными по распределению* (пишем: $\{f_n\} \overset{\mathbb{P}}{\sim} \{g_n\}$), если существует $C > 0$ такое, что для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$) и $z > 0$

$$\begin{aligned} C^{-1} \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{n=1}^m a_n f_n(\omega) \right| > Cz \right\} &\leq \mathbb{P}' \left\{ \left| \sum_{n=1}^m a_n g_n(\omega') \right| > z \right\} \\ &\leq C \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{n=1}^m a_n f_n(\omega) \right| > C^{-1} z \right\}. \end{aligned}$$

Если выполнена только правая часть этого соотношения, то будем говорить, что система $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *мажорируется по распределению* системой $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогичным образом определяются эти понятия в случае конечных систем $\{f_n\}_{n=1}^N$ и $\{g_n\}_{n=1}^N$.

В работе [1] показано, что из всякой равномерно ограниченной ортонормированной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин (с.в.) можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая мажорируется по распределению системой Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n(x) = \text{sign} \sin(2^{n-1} \pi x)$ ($x \in [0, 1]$).

В этой заметке приводятся утверждения, связанные с возможностью выделения при тех же условиях подпоследовательности, которая эквивалентна системе $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Более того, будут найдены необходимые и достаточные условия на систему с.в., чтобы она содержала подсистему, эквивалентную по распределению системе Радемахера. В случае конечных систем нас будет интересовать плотность их подсистем, обладающих аналогичным свойством.

Проблематика, связанная с выделением "почти независимых" подсистем (т.е. обладающих некоторым свойством, характерным для систем независимых функций) подробно рассматривается в известной статье В. Ф. Гапошкина [2]. Напомним наиболее важные результаты, относящиеся к интегрируемости суммы ряда, построенного по данной системе функций, а также его абсолютной сходимости.

Ввиду классического неравенства, доказанного А. Я. Хинчиным [3], сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ ($x \in [0, 1]$) принадлежит всем пространствам L_p ($p > 2$) при условии, что последовательность коэффициентов $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$. Для лакунарных тригонометрических рядов аналогичный результат был получен А. Зигмундом [4]. В связи с этим несколько позднее в работах С. Банаха и С. Сидона возникло понятие S_p -системы. Последовательность с.в. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in L_p$ ($p > 2$), называется S_p -системой, если

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_p \leq K_p \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_2,$$

где константа $K_p > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, \dots, m$). Если $\{f_n\}$ является S_p -системой при любом $p > 2$, то ее называют S_∞ -системой. Классический результат о выделении S_p -подсистем принадлежит С. Банаху ([5] или [6, 7.2]). Из него, в частности, следует, что любая равномерно ограниченная ортонормированная система функций содержит S_∞ -подсистему. Более точный результат в этом направлении был доказан С. Б. Стечкиным [2, теорема 1.3.1]: последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ на $[0, 1]$ содержит S_p -подсистему ($p > 2$) тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\|f_{n_k}\|_p \leq D$ ($k = 1, 2, \dots$); 2) $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 .

Другое важное свойство лакунарных рядов: абсолютная сходимость. Для тригонометрических рядов хорошо известна классическая теорема Сидона об абсолютной сходимости лакунарного (в смысле Адамара) ряда Фурье ограниченной функции. А. Зигмунд доказал локальный вариант этой теоремы [7]. Позднее аналогичные результаты были получены для системы Радемахера и некоторых других конкретных лакунарных систем функций [8]. Как естественное обобщение возникло следующее понятие. Последовательность с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ называется системой Сидона, если

$$\sum_{n=1}^m |a_n| \leq C \left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_\infty,$$

где константа $C > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots, m$).

Широкие достаточные условия, обеспечивающие возможность выделения подсистем Сидона, были получены В. Ф. Гапошкиным [2, теорема 1.4.1]: пусть система $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ функций, измеримых на $[0, 1]$, обладает свойствами: 1) $\|f_n\|_2 = 1$ ($n = 1, 2, \dots$); 2) $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots$; $x \in [0, 1]$); 3) существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ такая, что $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 ; тогда из $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подсистему Сидона.

Из приведенных выше определений и свойств системы Радемахера следует, что если $\{f_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}$, то: 1) $\{f_n\}$ – S_∞ -система, причем константа p -лакулярности имеет такой же порядок роста по p , что и для системы Радемахера, т.е. $K_p \asymp \sqrt{p}$; 2) $\{f_n\}$ – система Сидона.

В связи с этим утверждения, сформулированные далее в п. 2, обеспечивают “хорошие” свойства выделенной подсистемы в обоих отношениях, уточняя и усиливая упомянутые ранее результаты.

Наряду с вопросами выделения бесконечных подпоследовательностей представляют интерес также задачи иного рода, речь в которых идет о конечных системах с.в. Предположим, что $\{f_n\}_{n=1}^N$ – набор с.в. Требуется найти как можно большее $s = s(N)$ с следующим свойством: существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s \subset \{f_n\}_{n=1}^N$, удовлетворяющий некоторому условию лакулярности с константой, не зависящей от N . Упомянем здесь лишь один результат о плотности конечных подсистем Сидона, доказанный Б. С. Кашиным (см. [9] или [10, теорема 8.9]): если $\{f_n\}_{n=1}^N$ – ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, \dots, N$; $x \in [0, 1]$), то существует подсистема $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($1 \leq n_1 < \dots < n_s \leq N$) такая, что $s \geq \max\{[1/6 \log_2 N], 1\}$ и для любых $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, s$) выполнено:

$$D^{-1} \left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^s |a_i| \leq 4D \left\| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i} \right\|_\infty.$$

В п. 3 будет приведено аналогичное утверждение о выделении подсистемы $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ тоже “логарифмической” плотности, но удовлетворяющей более сильному условию: она эквивалентна системе $\{r_i\}_{i=1}^s$ с константой, зависящей только от D .

Выражение вида $F_1 \asymp F_2$ в дальнейшем означает, что для некоторого $C > 0$ $C^{-1}F_1 \leq F_2 \leq CF_1$, причем константа C , как правило, не зависит от всех или части аргументов F_1 и F_2 . Если $1 \leq p \leq \infty$, $f = f(\omega)$ – с.в. на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ – числовая последовательность, то обозначения $\mathbb{E}(f)$, $\|f\|_p$, $\|a\|_p$ (соответственно L_p , l_p) понимаются стандартным образом, $|E|$ – мера Лебега множества $E \subset [0, 1]$.

1. Системы с.в., эквивалентные по распределению системе Радемахера. Здесь мы сформулируем критерий эквивалентности по распределению произвольной системы с.в. системе Радемахера, а также приведем его следствия.

Важную роль в дальнейшем играет $\mathcal{K}$ -функционал Петре из теории интерполяции операторов [11]. Если (X_0, X_1) – банахова пара, $x \in X_0 + X_1$, $t > 0$, то по определению

$$K(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \}.$$

В дальнейшем нам понадобится только функционал $\mathcal{K}_{1,2}(t, a) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$, построенный по банаховой паре (l_1, l_2) .

В работе [12] доказано, что с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$, и $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$ $\|\sum_{n=1}^\infty a_n r_n\|_t \asymp \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a)$ (неявно это соотношение содержится уже в работе [13]). Следующее утверждение показывает, что соотношение, аналогичное приведенному, определяет системы с.в., эквивалентные по распределению системе Радемахера.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{f_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}$;
- 2) с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, \dots, m$)

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n f_n \right\|_t \asymp \left\| \sum_{n=1}^m a_n r_n \right\|_t ;$$

- 3) с константой, не зависящей от $t \in [1, \infty)$, и $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in l_2$

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty a_n f_n \right\|_t \asymp \mathcal{K}_{1,2}(\sqrt{t}, a).$$

Применим эту теорему к двум более конкретным случаям.

Напомним, что система с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ называется *мультипликативной*, если для произвольных попарно различных $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($k \in \mathbb{N}$) $\mathbb{E}(f_{n_1} f_{n_2} \dots f_{n_k}) = 0$. Если дополнительно для таких же $n_1, n_2, \dots, n_k$ и $n \neq n_s$ ($s = 1, \dots, k$) выполнено: $\mathbb{E}(f_{n_1} f_{n_2} \dots f_{n_k} f_n^2) = 0$, то систему $\{f_n\}$ называют *сильно мультипликативной*.

Важный пример сильно мультипликативной системы – последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ независимых с.в. таких, что $f_n \in L_2$ и $\mathbb{E}(f_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Из результатов работы [14] и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – сильно мультипликативная система с.в. такая, что $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$) и $d = \inf_{n=1,2,\dots} \mathbb{E}(f_n^2) > 0$. Тогда $\{f_n\} \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \{r_n\}$, причем константа этой эквивалентности зависит только от D и d .

СЛЕДСТВИЕ 1. Всякая последовательность независимых с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, такая, что $f_n \in L_2$, $\mathbb{E}(f_n) = 0$, $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$) и $d = \inf_{n=1,2,\dots} \mathbb{E}(f_n^2) > 0$, эквивалентна по распределению системе Радемахера.

Рассмотрим теперь иную ситуацию. Пусть G – компактная абелева группа, Γ – группа характеров, определенных на ней, μ – мера Хаара на G . В соответствии с ранее приведенным определением (см. п. 0) множество $F \subset \Gamma$ называют *множеством Сидона*, если при некотором $C = C(F)$ $\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)| \leq C \|f\|_\infty$ для всякой $f \in C(G)$ такой, что $\int_G f(\gamma) \gamma d\mu = 0$ ($\gamma \notin F$).

Ж. Пизье доказал, что для произвольного множества Сидона $F = \{\gamma_n\} \subset \Gamma$ выполнено: $\|\sum_{n=1}^m a_n \gamma_n\|_t \asymp \|\sum_{n=1}^m a_n r_n\|_t$ ($t \geq 1$) (константа эквивалентности зависит только от константы Сидона $C(F)$) [15]. Отсюда и из теоремы 1 сразу получаем следующее утверждение, которое иным способом (но тоже с использованием теоремы Ж. Пизье) было доказано в [16].

ТЕОРЕМА 3. Всякая бесконечная система Сидона $F = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ характеров, определенных на компактной абелевой группе, эквивалентна по распределению системе Радемахера. Константа эквивалентности при этом зависит лишь от константы Сидона $C(F)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Последовательности $f_n(x) = \sin(2\pi k_n x)$ и $g_n(x) = \cos(2\pi k_n x)$ ($x \in [0, 1]$) при условии $k_{n+1}/k_n \geq \lambda > 1$ эквивалентны по распределению системе Радемахера.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что именно аналогия в поведении рядов Радемахера и лакунарных тригонометрических рядов (см. п. 0) послужила исходным пунктом для выявления более глубоких связей между ними, приведя в результате к изучению систем, эквивалентных по распределению “модельной” системе Радемахера.

2. Выделение подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера. Основная роль в доказательстве возможности выделения подсистем, эквивалентных по распределению системе Радемахера, принадлежит следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4. Пусть система с.в. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, содержит подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющую условиям: 1) $|f_{n_k}(\omega)| \leq D$ ($k = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$); 2) $d = \inf_{k=1,2,\dots} \|f_{n_k}\|_2 > 0$; 3) $f_{n_k} \rightarrow 0$ слабо в L_2 .

Тогда существует подсистема $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$, для которой

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \right\|_t \asymp K_{1,2}(\sqrt{t}, a) \quad (a = (a_i)_{i=1}^\infty \in l_2, \quad t \geq 1)$$

с константой, зависящей только от D и d .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существенный момент доказательства заключается в оценке сверху L_q -норм ($q > 1$) модифицированных произведений Рисса (при выделении системы Сидона достаточно оценить L_1 -норму [2, т. 1.4.1]). Последние имеют блочную структуру в связи с применением одной аппроксимационной формулы для $\mathcal{K}$ -функционала $K_{1,2}(t, a)$, принадлежащей С. Монтгомери-Смиту [13].

Следующие два утверждения – непосредственные следствия теорем 1 и 4.

ТЕОРЕМА 5. Для того чтобы из системы $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ с.в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, можно было выделить подсистему $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентную по распределению системе Радемахера на $[0, 1]$, необходимо и достаточно существование подпоследовательности $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, удовлетворяющей условиям 1)–3) теоремы 4. При этом константа эквивалентности зависит лишь от D и d .

ТЕОРЕМА 6. Если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная последовательность с. в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, $|f_n(\omega)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots; \omega \in \Omega$), то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$, эквивалентную по распределению системе Радемахера. Константа этой эквивалентности зависит только от D .

3. Плотность подсистем, эквивалентных системе Радемахера. Рассмотрим задачу выделения подсистем из конечных равномерно ограниченных ортонормированных наборов $\{f_n\}_{n=1}^N$ функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Смысл результата, формулируемого ниже, состоит в том, что любой такой набор содержит подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ “логарифмической” плотности (т.е. $s \geq C \log_2 N$), эквивалентную по распределению системе первых s функций Радемахера с константой, не зависящей от s .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^N$ – ортонормированный набор функций, определенных на $[0, 1]$, $|f_n(x)| \leq D$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Тогда существует набор $\{f_{n_i}\}_{i=1}^s$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s \leq N$), где $s \geq \max\{[1/6 \log_2 N], 1\}$, такой, что для некоторого $C > 0$, зависящего только от D , всех $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и $z > 0$

$$\begin{aligned} C^{-1} \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^s a_i r_i(x) \right| > Cz \right\} \right| &\leq \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^s a_i f_{n_i}(x) \right| > z \right\} \right| \\ &\leq C \left| \left\{ \left| \sum_{i=1}^s a_i r_i(x) \right| > C^{-1} z \right\} \right|. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пример тригонометрической системы показывает, что теорема 7 (точно так же, как и упоминавшаяся в п. 0 теорема Б. С. Кашина) по порядку неулучшаема. Действительно, как доказал С. Б. Стечкин [18], если последовательность $\{\sqrt{2} \cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^\infty$ ($x \in [0, 1]$) является системой Сидона, то $\sum_{k: n_k < N} 1 \leq C \ln N$ ($N = 2, 3, \dots$).

Автор выражает благодарность Б. С. Кашину за постановку задачи, решение которой приведено в п. 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асташкин С. В. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 4. С. 483–495. 2. Гапошкин В. Ф. // УМН. 1966. Т. 21. № 6. С. 3–82. 3. Khintchine A. // Math. Zeitschr. 1923. V. 18. P. 109–116. 4. Zygmund A. // J. Lond. Math. Soc. 1930. V. 5. № 2. P. 138–145. 5. Banach S. // Bull. Acad. Polon. 1933. P. 149–154. 6. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 7. Zygmund A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1932. V. 34. № 3. P. 435–446. 8. Kaczmarz S., Steinhaus G. // Studia Math. 1930. V. 2. P. 231–247. 9. Кашин Б. С. // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116. 10. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 11. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980. 12. Gluskin E. D., Kwapien S. // Studia Math. 1995. V. 114. № 3. P. 303–309. 13. Montgomery-Smith S. // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. № 2. P. 517–522. 14. Jakubowski J., Kwapien S. // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1979. V. 27. № 9. P. 689–694. 15. Pisier G. Les inégalités de Kahane–Khintchin d'après C. Borell // Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach. Exposé № 7. 1977–1978. 16. Asmar N. H., Montgomery-Smith S. // Arkiv. Math. 1993. V. 31. № 1. P. 13–26. École Polytechnique, Palaiseau. 17. Стечкин С. Б. // Изв. АН СССР. 1956. Т. 20. С. 385–412.