



УДК 517.982.27

О ВЫДЕЛЕНИИ ПОДСИСТЕМ, “МАЖОРИРУЕМЫХ” СИСТЕМОЙ РАДЕМАХЕРА

С. В. Асташкин

В работе доказано, что из любой равномерно ограниченной ортонормированной системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , можно выделить подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, мажорируемую по распределению системой Радемахера на $[0, 1]$. Это означает, что

$$P\left\{\omega \in \Omega : \left|\sum_{i=1}^m a_i f_{n_i}(\omega)\right| > z\right\} \leq C \left|\left\{t \in [0, 1] : \left|\sum_{i=1}^m a_i r_i(t)\right| > \frac{z}{C}\right\}\right|,$$

где $C > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) и $z > 0$.

Библиография: 16 названий.

0. Введение. Пусть $r_i(t) = \text{sign} \sin 2^{i-1} \pi t$ ($i = 1, 2, \dots$) – система функций Радемахера на $[0, 1]$. В дальнейшем будем говорить, что система $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , *мажорируется по распределению системой Радемахера*, если существует $C > 0$ такое, что для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) и $z > 0$

$$P\left\{\omega \in \Omega : \left|\sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega)\right| > z\right\} \leq C \left|\left\{t \in [0, 1] : \left|\sum_{i=1}^m a_i r_i(t)\right| > \frac{z}{C}\right\}\right|$$

(здесь и далее, $|e|$ – мера Лебега множества $e \subset [0, 1]$).

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – равномерно ограниченная ортонормированная система случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) . Хорошо известно (см., например, [1, с. 287]), что из нее можно выделить подсистему $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, которая является S_p -системой сразу для всех $p < \infty$. Это означает, что

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i f_{n_i}\right\|_p \leq K_p \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2},$$

где $K_p > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$).

Основной результат работы является в определенном смысле усилением сформулированного утверждения. Будет доказано, что из любой равномерно ограниченной ортонормированной системы случайных величин можно выделить подсистему, которая мажорируется по распределению системой Радемахера.

Для доказательства нам потребуется ряд утверждений, представляющих также и самостоятельный интерес. Напомним сначала некоторые определения.

Если X – случайная величина, определенная на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , то $n_{|X|}(z) = P\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > z\}$, а $X^*(t)$ ($t \in [0, 1]$) – невозрастающая непрерывная слева перестановка функции $|X|$. Как известно [2, с. 83], $|X|$ и X^* равноизмеримы, т.е. для всех $z > 0$ $n_{|X|}(z) = n_{X^*}(z)$. Банахово пространство E случайных величин $X = X(\omega)$ на (Ω, Σ, P) будем называть *симметричным*, если

- 1) из того, что $|X| \leq |Y|$ почти всюду и $Y \in E$, следует $X \in E$ и $\|X\| \leq \|Y\|$;
- 2) из того, что $n_{|X|}(z) = n_{|Y|}(z)$ ($z > 0$) и $Y \in E$, следует $X \in E$ и $\|X\| = \|Y\|$.

Кроме L_p -пространств ($1 \leq p \leq \infty$) важные примеры симметричных пространств – пространство Орлича L_S :

$$\|x\|_S = \inf \left\{ u > 0 : \int_{\Omega} S\left(\frac{|X(\omega)|}{u}\right) dP(\omega) \leq 1 \right\},$$

пространство Марцинкевича $M(\varphi)$:

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t X^*(s) ds : 0 < t \leq 1 \right\}$$

и пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$:

$$\|x\|_{\varphi, p} = \left\{ \int_0^1 (X^*(s))^p d\varphi(s) \right\}^{1/p}.$$

Здесь $S(t) \geq 0$ – выпуклая непрерывная функция на $[0, \infty)$, $\varphi(t) \geq 0$ – вогнутая возрастающая функция на $(0, 1]$.

Важную роль в теории интерполяции операторов играет $\mathcal{H}$ -функционал Петре (см., например, [3]):

$$\mathcal{H}(t, x; E_0, E_1) = \inf \{ \|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in E_i \},$$

где E_0 и E_1 – симметричные пространства, $x \in E_0 + E_1$, $t > 0$. Нетрудно показать, что при фиксированном $x \in E_0 + E_1$ $\mathcal{H}$ -функционал – вогнутая возрастающая функция от t [3, с. 55].

Выражение $F_1 \asymp F_2$ в дальнейшем означает, что для некоторого $C > 0$ $C^{-1}F_2 \leq F_1 \leq CF_2$, причем константа C , как правило, не зависит от всех или части аргументов F_1 и F_2 . Если $1 \leq p < \infty$, X – случайная величина на (Ω, Σ, P) , то

$$\|X\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |X(\omega)|^p dP(\omega) \right\}^{1/p};$$

если же $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$, то

$$\|a\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right\}^{1/p}.$$

1. $\mathcal{H}$ -функционал на суммах Радемахера. В работе [4] (см. также [5]) показано, что для функций вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(t), \quad a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2, \quad (1)$$

выполнено

$$\mathcal{H}(t, x; L_{\infty}, G) \asymp \mathcal{H}(t, a; \ell_1, \ell_2),$$

где G – замыкание L_{∞} в пространстве Орлича L_N , $N(t) = e^{t^2} - 1$. Получим аналогичное соотношение для $\mathcal{H}$ -функционала $\mathcal{H}(t, x; L_1, L_{\infty})$.

ТЕОРЕМА 1. *С константами, не зависящими от $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ и $0 < u \leq 1$,*

$$\mathcal{H}(u, \sum a_i r_i; L_1, L_{\infty}) \asymp u \mathcal{H}\left(\ln^{1/2} \frac{3}{u}, a; \ell_1, \ell_2\right). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$ положим $\varphi_a(t) = \mathcal{H}(t, a; \ell_1, \ell_2)$. В работе [6] показано, что для функций вида (1)

$$n_{|x|}(\varphi_a(t)) \leq 2e^{-t^2/2}, \quad (3)$$

$$n_{|x|}(A^{-1}\varphi_a(t)) \geq A^{-1}e^{-At^2}, \quad (4)$$

где $A > 1$ не зависит от a и $t > 0$.

Из неравенства (3) по определению перестановки $x^*(3e^{-t^2/2}) \leq \varphi_a(t)$ или после замены $s = 3e^{-t^2/2}$ имеет место

$$x^*(s) \leq \sqrt{2}\varphi_a\left(\ln^{1/2} \frac{3}{s}\right), \quad 0 < s \leq 1.$$

Отсюда

$$\int_0^u x^*(s) ds \leq \sqrt{2} \int_0^u \varphi_a\left(\ln^{1/2} \frac{3}{s}\right) ds, \quad 0 < u \leq 1.$$

С другой стороны, из неравенства (4) следует

$$x^*(s) \geq A^{-1}\varphi_a(A^{-1/2} \ln^{1/2}(A^{-1}s^{-1})), \quad 0 < s < A^{-1}.$$

Так как функция $\varphi_a(u)$ вогнута, выполнено

$$x^*\left(\frac{t}{3A}\right) \geq A^{-3/2}\varphi_a\left(\ln^{1/2} \frac{3}{t}\right), \quad 0 < t < 1.$$

Следовательно, для всех $0 < u \leq 1$

$$\int_0^u x^*(s) ds \geq \int_0^{u/(3A)} x^*(s) ds \geq 3^{-1}A^{-5/2} \int_0^u \varphi_a\left(\ln^{1/2} \frac{3}{t}\right) dt.$$

Таким образом, с константой, не зависящей от $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ и $0 < u \leq 1$,

$$\int_0^u x^*(s) ds \asymp \int_0^u \varphi_a\left(\ln^{1/2} \frac{3}{s}\right) ds. \quad (5)$$

Докажем теперь, что

$$\int_0^u \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{s} \right) ds \asymp u \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{u} \right). \quad (6)$$

Пусть сначала $u = 3^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ввиду вогнутости $\varphi_a(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^{3^{-k}} \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{s} \right) ds &= \sum_{i=k}^{\infty} \int_{3^{-i-1}}^{3^{-i}} \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{s} \right) ds \\ &\asymp \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_a(\sqrt{i \ln 3}) 3^{-i} \asymp \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_a(\sqrt{i}) 3^{-i}. \end{aligned} \quad (7)$$

В то же время,

$$\sum_{i=k}^{\infty} \varphi_a(\sqrt{i}) 3^{-i} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=k 3^j}^{k 3^{j+1}-1} \varphi_a(\sqrt{i}) 3^{-i} \asymp \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_a(\sqrt{k} 3^{j/2}) 3^{-k 3^j}.$$

Так как последняя сумма больше чем $\varphi_a(\sqrt{k}) 3^{-k}$ и меньше чем

$$\varphi_a(\sqrt{k}) 3^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} 3^{j/2+k-k 3^j} \leq \varphi_a(\sqrt{k}) 3^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} 3^{1-j/2} \leq 6\sqrt{3} \varphi_a(\sqrt{k}) 3^{-k},$$

то для $u = 3^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, соотношение (6) следует из (7).

Если $u \in (0, 1]$ произвольно, выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $3^{-k} \leq u \leq 3^{-k+1}$. Тогда ввиду вогнутости рассматриваемых здесь функций

$$\int_0^u \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{s} \right) ds \asymp \int_0^{3^{-k}} \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{s} \right) ds \asymp 3^{-k} \varphi_a(\ln^{1/2} 3^{k+1}) \asymp u \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{u} \right),$$

и соотношение (6) доказано.

Из (5) и (6) получаем, что

$$\int_0^u x^*(s) ds \asymp u \varphi_a \left(\ln^{1/2} \frac{3}{u} \right).$$

Ввиду хорошо известного равенства (см., например, [3, с. 142])

$$\mathcal{K}(u, x; L_1, L_\infty) = \int_0^u x^*(s) ds$$

последнее соотношение эквивалентно (2), и теорема доказана.

Достаточно точную аппроксимацию функции $\varphi_a(t) = \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$ дает известная формула Хольмстедта [7]

$$\mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2) \asymp \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где (a_i^*) – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_i|)$, а $[z]$ – целая часть числа z .

Тем самым, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *C константами, не зависящими от $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $0 < u \leq 1$,*

$$\int_0^u \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(t) \right)^* dt \asymp u \left\{ \sum_{i=1}^{[\ln 3/u]} a_i^* + \ln^{1/2} \frac{3}{u} \left(\sum_{i=[\ln 3/u]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как для произвольных E_0, E_1 и $u > 0$

$$\mathcal{K}(u, x; E_0, E_1) = u \mathcal{K}\left(\frac{1}{u}, x; E_1, E_0\right),$$

из соотношения (2) следует

$$\mathcal{K}(u, x; L_{\infty}, L_1) \asymp \varphi_a(\ln^{1/2} 3u), \quad u \geq 1,$$

или эквивалентно:

$$\mathcal{K}(u, x; L_{\infty}, L_1) \asymp \varphi_a(\ln^{1/2}(1 + u^2)), \quad u \geq 1.$$

Если же $0 < u < 1$, то из определения $\mathcal{K}$ -функционала, а также из неравенств $\|x\|_1 \leq \|x\|_{\infty}$, $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$ и $\|x\|_1 \leq \|a\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_1$ (неравенство Хинчина для L_1 -нормы с константой из [8]) получаем

$$\mathcal{K}(u, x; L_{\infty}, L_1) \asymp u\|x\|_1 \asymp u\|a\|_2 \asymp \varphi_a(u) \asymp \varphi_a(\ln^{1/2}(1 + u^2)).$$

В итоге приходим к соотношению

$$\mathcal{K}(u, x; L_{\infty}, L_1) \asymp \mathcal{K}(\ln^{1/2}(1 + u^2), a; \ell_1, \ell_2), \quad (9)$$

справедливому уже при всех $u > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Совершенно аналогично для функций вида (1) можно доказать, что

$$\mathcal{K}(u, x; L_p, L_{\infty}) \asymp \mathcal{K}\left(\ln^{1/2} \frac{3}{u}, a; \ell_1, \ell_2\right), \quad 0 < u \leq 1, \quad (2')$$

$$\mathcal{K}(u, x; L_{\infty}, L_p) \asymp \mathcal{K}(\ln^{1/2}(1 + u^2), a; \ell_1, \ell_2), \quad u > 0, \quad (9')$$

где $1 \leq p < \infty$ (константы этих эквивалентностей, конечно, зависят от p).

Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *C константами, не зависящими от $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ и $0 < u \leq 1$,*

$$\mathcal{K}\left(u, \sum a_i r_i; L_p, L_{\infty}\right) \asymp \mathcal{K}\left(u, \sum a_i r_i; L_1, L_{\infty}\right).$$

2. О сравнении функций распределения. В дальнейшем нам потребуется вариант доказанного в работе [9] принципа эквивалентности функций распределения. Доказательство его совершенно аналогично доказательству самого принципа (см. [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $X \geq 0$ и $Y \geq 0$ – две случайные величины, определенные на, вообще говоря, разных вероятностных пространствах, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые “копии” X и Y соответственно (т.е. $n_{X_i}(z) = n_X(z)$, $n_{Y_i}(z) = n_Y(z)$). Предположим, что

$$\left\| \max_{i=1, \dots, n} Y_i \right\|_1 \leq C_1 \left\| \max_{i=1, \dots, n} X_i \right\|_1, \quad (10)$$

$$\left\| \max_{i=1, \dots, n} X_i \right\|_2 \leq C_2 \left\| \max_{i=1, \dots, n} X_i \right\|_1, \quad (11)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от $n \in \mathbb{N}$.

Тогда найдется $C > 0$, зависящее только от C_1 и C_2 , такое, что при всех $z > 0$

$$n_Y(z) \leq C n_X\left(\frac{z}{C}\right).$$

Покажем, что условия (10) и (11) можно сформулировать, используя понятие $\mathcal{H}$ -функционала.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых “копий” случайной величины $X \geq 0$ на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , $1 \leq p < \infty$.

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \max_{i=1, \dots, n} X_i \right\|_p \asymp n \mathcal{H}\left(\frac{1}{n}, X^*; L_p[0, 1], L_{\infty}[0, 1]\right)$$

с константой, не зависящей от X и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) независимы, для $\overline{X} = \max_{i=1, \dots, n} X_i$

$$\begin{aligned} \|\overline{X}\|_p^p &= \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} \max\{X^p(\omega_1), \dots, X^p(\omega_n)\} dP(\omega_1) \cdots dP(\omega_n) \\ &= n \int \cdots \int_{\{X(\omega_i) \leq X(\omega_1)\}} X^p(\omega_1) dP(\omega_n) \cdots dP(\omega_2) dP(\omega_1) \\ &= n \int_{\Omega} X^p(\omega_1) (P\{\omega : X(\omega) \leq X(\omega_1)\})^{n-1} dP(\omega_1) \\ &= n \int_{\Omega} X^p(\omega_1) (1 - n_X(X(\omega_1)))^{n-1} dP(\omega_1). \end{aligned}$$

Ввиду равноизмеримости функций $X(\omega_1)$ ($\omega_1 \in \Omega$) и $X^*(t)$ ($t \in [0, 1]$), а также того, что $n_X(X^*(t)) = t$ для почти всех $t \in [0, 1]$ [2, с. 83], откуда получим

$$\|\overline{X}\|_p^p = n \int_0^1 (X^*)^p(t) (1 - n_X(X^*(t)))^{n-1} dt = n \int_0^1 (X^*)^p(t) (1 - t)^{n-1} dt.$$

Из последнего равенства следует

$$\|\overline{X}\|_p = \|X^*\|_{\Lambda_p(\varphi_n)}, \quad (12)$$

где $\Lambda_p(\varphi_n)$ – симметричное пространство Лоренца, построенное по функции $\varphi_n(t) = 1 - (1 - t)^n$.

Покажем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, 1]$

$$e^{-1}\psi_n(t) \leq \varphi_n(t) \leq \psi_n(t), \quad (13)$$

где $\psi_n(t) = \min\{1, nt\}$.

Так как $\varphi_1(t) = \psi_1(t) = 1$, можно считать, что $n \geq 2$. Если $t \geq 1/n$, то $\varphi_n(t) \leq 1 = \psi_n(t)$, а $\varphi_n(t) \geq \varphi_n(1/n) = 1 - (1 - 1/n)^n \geq 1 - e^{-1} \geq \psi_n(t)/e$ (последовательность $(1 - 1/n)^n \uparrow 1/e$). В случае $0 < t \leq 1/n$ рассмотрим функцию

$$f_n(t) = \psi_n(t) - \varphi_n(t) = nt - 1 + (1 - t)^n.$$

Так как $f_n(0) = 0$ и $f'_n(t) = n - n(1 - t)^{n-1} \geq 0$, то $f_n(t) \geq 0$, что эквивалентно правой части неравенства (13) в случае $0 \leq t \leq 1/n$. В то же время, для функции

$$g_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{e} - \varphi_n(t) = \frac{nt}{e} - 1 + (1 - t)^n$$

выполнено

$$g_n(0) = 0, \quad g'_n(t) = \frac{n}{e} - n(1 - t)^{n-1} = n\left(\frac{1}{e} - (1 - t)^{n-1}\right) \leq n\left(\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) \leq 0$$

(последовательность $(1 - 1/n)^{n-1} \downarrow 1/e$). Следовательно, $g_n(t) \leq 0$, что эквивалентно левой части (13) при $0 \leq t \leq 1/n$, и доказательство этого соотношения закончено.

Из (13) следует, что для произвольной измеримой на $[0, 1]$ функции $x(t)$

$$\frac{1}{e}\|x\|_{\Lambda(\psi_n)} \leq \|x\|_{\Lambda(\varphi_n)} \leq \|x\|_{\Lambda(\psi_n)}.$$

Значит, ввиду (12), а также формулы для $\mathcal{K}$ -функционала [3, с. 142] выполнено

$$\|\overline{X}\|_p \asymp \|X^*\|_{\Lambda_p(\psi_n)} = n \left\{ \int_0^{1/n} (X^*(t))^p dt \right\}^{1/p} \asymp n \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}, X^*; L_p, L_\infty\right)$$

с константой, не зависящей от X и n .

Следствием предложений 1 и 2 является

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \geq 0$ и $Y \geq 0$ – две случайные величины, определенные на, вообще говоря, разных вероятностных пространствах. Предположим, что

$$\int_0^t Y^*(s) ds \leq C_1 \int_0^t X^*(s) ds, \quad 0 < t \leq 1, \quad (14)$$

$$\int_0^t (X^*(s))^2 ds \leq C_2 \left(\int_0^t X^*(s) ds \right)^2, \quad 0 < t \leq 1. \quad (15)$$

Тогда существует $C > 0$, зависящее лишь от C_1 и C_2 , такое, что для всех $z > 0$

$$n_Y(z) \leq C n_X\left(\frac{z}{C}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть E – симметричное пространство на $[0, 1]$, $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – измеримые на $[0, 1]$ функции, для которых выполнены условия (14) и (15). Тогда если $x \in E$, то $y \in E$ и $\|y\|_E \leq C\|x\|_E$, где $C > 0$ зависит лишь от C_1 и C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись следствием 2, получим, что при всех $z > 0$

$$n_{|y|}(z) \leq C' n_{|x|}\left(\frac{z}{C'}\right)$$

или эквивалентно: $y^*(t) \leq C' \sigma_{C'} x^*(t)$ ($t \in (0, 1]$), где $\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau)$ – оператор растяжения. Так как σ_τ ограничен в любом симметричном пространстве и $\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq \max\{1, \tau\}$ [2, с. 133], отсюда следует, что $\|y\|_E \leq C\|x\|_E$, где $C = C' \max\{1, C'\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко убедиться в том, что условие (15) в следствии 3 существенно. Более того, если E – симметричное пространство, не интерполяционное между пространствами L_1 и L_∞ , то всегда можно найти функцию $x \in E$ и линейный оператор T , ограниченно действующий в L_1 и L_∞ , такие, что $y = Tx \notin E$ [2, с. 130, 166].

Применим теперь теорему 2 в случае, когда

$$X(t) = \left| \sum_{i=1}^m a_i r_i(t) \right|, \quad Y(\omega) = \left| \sum_{i=1}^m a_i f_i(\omega) \right|, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

где $r_i(t)$ – функции Радемахера на $[0, 1]$, а $f_i(\omega)$ – случайные величины на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированная система случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , $|f_i(\omega)| \leq M$, $\omega \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots$.

Следующие условия эквивалентны:

- 1) для произвольной последовательности $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$ функция

$$f = \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \in L_N,$$

где $N(t) = e^{t^2} - 1$;

- 2) существует $C > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_i)_{i=1}^m$ и $t \in [0, 1]$, такое, что

$$\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m a_i f_i \right)^*(s) ds \leq C_1 t \mathcal{H} \left(\ln^{1/2} \frac{3}{t}, a; \ell_1, \ell_2 \right); \quad (16)$$

- 3) система $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ мажорируется по распределению системой Радемахера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем импликацию $1) \implies 2)$. Как известно [10], пространство Орлича L_N совпадает с пространством Марцинкевича $M(\varphi)$, где $\varphi(t) = t \log_2^{1/2}(2/t)$. Следовательно, по определению нормы в $M(\varphi)$

$$\int_0^t \left(\sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right)^*(s) ds \leq C_1 t \log_2^{1/2} \frac{2}{t} \|a\|_2, \quad (17)$$

где C_1 не зависит от $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$ и $t \in [0, 1]$.

Пусть $a_k^* = |a_{i_k}|$ ($k = 1, 2, \dots$) – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_i|)_{i=1}^\infty$. Ввиду неравенства (17), а также условий теоремы для произвольного $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2^{-j}} \left(\sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right)^*(s) ds &\leq \int_0^{2^{-j}} \left(\sum_{k=1}^j a_{i_k} f_{i_k} \right)^*(s) ds + \int_0^{2^{-j}} \left(\sum_{k=j+1}^\infty a_{i_k} f_{i_k} \right)^*(s) ds \\ &\leq 2^{-j} M \sum_{k=1}^j |a_{i_k}| + C_1 2^{-j} \log_2^{1/2}(2^{j+1}) \left(\sum_{k=j+1}^\infty |a_{i_k}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{-j} \max\{M, 2C_1\} \left(\sum_{k=1}^j a_k^* + \sqrt{j} \left(\sum_{k=j+1}^\infty (a_k^*)^2 \right)^{1/2} \right) \\ &\leq 2^{-j} C_2 \max\{M, 2C_1\} \mathcal{H}(\sqrt{j}, a; \ell_1, \ell_2), \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из формулы Хольмстедта (8).

Таким образом, соотношение (16) выполнено для $t = 2^{-j}$ ($j \in \mathbb{N}$). Так как рассматриваемые здесь функции вогнуты, оно справедливо и при всех $t \in [0, 1]$.

Импликация $2) \implies 3)$ следует из теоремы 1, следствия 2 и теоремы 2.

Предположим, наконец, что выполнено условие 3). Хорошо известно (см., например, [11, с. 342]), что функция $g = \sum_{i=1}^\infty a_i r_i \in L_N$, если $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$. По условию для функции $f = \sum_{i=1}^\infty a_i f_i$ выполнено

$$n_{|f|}(z) \leq C n_{|g|}\left(\frac{z}{C}\right).$$

Следовательно, ввиду симметричности пространства L_N , как и при доказательстве следствия 3, получаем, что $f \in L_N$, и теорема доказана.

Далее нам потребуются следующие обозначения (подробнее см. в [12, гл. 1]). Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, $\mathfrak{A}$ – σ -подалгебра σ -алгебры Σ . Если $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – случайная величина, то $E[f|\mathfrak{A}]$ – условное математическое ожидание f относительно $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ – σ -подалгебра, порожденная случайными величинами $g_1, g_2, \dots, g_n$, то условное математическое ожидание относительно нее обозначим через $E[f|g_1, \dots, g_n]$. В частности,

$$E[f] = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega).$$

Напомним, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) называется *мультипликативной*, если для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n_1 < n_2 < \dots < n_k$

$$E[f_{n_1} f_{n_2} \dots f_{n_k}] = 0.$$

По теореме 3 и следствию 3 из работы [13] получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ – равномерно ограниченная мультипликативная ортонормированная система на (Ω, Σ, P) , то она мажорируется по распределению системой Радемахера.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [13] показано, что в условиях следствия 4 вектор $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ имеет одинаковое распределение с условным математическим ожиданием $E[(g_1, g_2, \dots, g_n) | \mathfrak{R}]$ вектора $(g_1, g_2, \dots, g_n)$, равномерно распределенного с вектором $(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Непосредственно отсюда утверждение следствия 4 не вытекает, так как оператор условного математического ожидания может быть даже не ограничен в симметричном пространстве, если оно не интерполяционно между L_1 и L_∞ (см., например, [14, с. 128–129]).

3. Выделение экспоненциально интегрируемых подсистем. В доказательстве следующего утверждения используется идея из работы [15, лемма А].

ЛЕММА. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , $|f_n(\omega)| \leq M$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$. Тогда существуют $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ и последовательность случайных величин $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что

- 1) $|g_k(\omega)| \leq 2M$, $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$;
- 2) $E[g_k | g_1, \dots, g_{k-1}] = 0$ почти всюду на Ω ;
- 3) $\|f_{n_k} - g_k\|_k \leq 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией. Так как $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, можно найти n_1 такое, что

$$|E[f_{n_1}]| \leq \frac{1}{6}. \quad (18)$$

Существует конечнозначная функция h_1 , для которой $|h_1(\omega)| \leq M$ и

$$E[|f_{n_1} - h_1|] \leq \frac{1}{6}. \quad (19)$$

Положим $g_1 = h_1 - E[h_1]$. Тогда $E[g_1] = 0$ и $|g_1(\omega)| \leq 2M$. Кроме того, из неравенств (18) и (19) следует

$$\begin{aligned} \|f_{n_1} - g_1\|_1 &\leq E[|f_{n_1} - h_1|] + E[|h_1 - g_1|] = E[|f_{n_1} - h_1|] + |E[h_1]| \\ &\leq 2E[|f_{n_1} - h_1|] + |E[f_{n_1}]| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Предположим, что $k > 1$ и найдены величины $f_{n_1}, \dots, f_{n_{k-1}}$, $1 \leq n_1 < \dots < n_{k-1}$ и $g_1, \dots, g_{k-1}$ такие, что при всех $s = 1, \dots, k-1$

- а) $|g_s(\omega)| \leq 2M$;
- б) g_s постоянна на множествах $e_i^{(s)} \subset \Omega$, $i = 1, \dots, i_s$, $e_i^{(s)} \cap e_j^{(s)} = \emptyset$ ($i \neq j$) и $\bigcup_i e_i^{(s)} = \Omega$, причем $e_i^{(s)}$ целиком лежат во множествах постоянства $e_i^{(s-1)}$, $i = 1, \dots, i_{s-1}$, функции g_{s-1} ;
- в) $E[g_s | g_1, \dots, g_{s-1}] = 0$ почти всюду на Ω ;
- г) $\|f_{n_s} - g_s\|_s \leq 2^{-s}$.

Найдем следующую пару величин f_{n_k} и g_k , удовлетворяющую аналогичным условиям. Так как $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, существует $n_k > n_{k-1}$ такое, что для всех $i = 1, \dots, i_{k-1}$

$$\left| \int_{e_i^{(k-1)}} f_{n_k}(\omega) dP(\omega) \right| \leq \frac{2^{-k}}{3} P(e_i^{(k-1)}). \quad (20)$$

Пусть h_k – конечнозначная функция, $|h_k(\omega)| \leq M$, все множества постоянства которой целиком содержатся во множествах $e_i^{(k-1)}$ ($i = 1, \dots, i_{k-1}$) и, кроме того, для всех $i = 1, \dots, i_{k-1}$

$$\int_{e_i^{(k-1)}} |f_{n_k}(\omega) - h_k(\omega)|^k dP(\omega) \leq \left(\frac{2^{-k}}{3}\right)^k P(e_i^{(k-1)}). \quad (21)$$

Положим $g_k = h_k - E[h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]$. Тогда $E[g_k | g_1, \dots, g_{k-1}] = 0$ почти всюду на Ω и $|g_k(\omega)| \leq 2M$. Так как для $\omega \in e_i^{(k-1)}$ и произвольной случайной величины f на Ω

$$E[f | g_1, \dots, g_{k-1}](\omega) = P(e_i^{(k-1)})^{-1} \int_{e_i^{(k-1)}} f(u) dP(u),$$

то ввиду (21)

$$\begin{aligned} |E[f_{n_k} - h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]| &\leq \max_{i=1, \dots, i_{k-1}} P(e_i^{(k-1)})^{-1} \int_{e_i^{(k-1)}} |f_{n_k}(u) - h_k(u)| dP(u) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, i_{k-1}} P(e_i^{(k-1)})^{-1/k} \left(\int_{e_i^{(k-1)}} |f_{n_k}(u) - h_k(u)|^k dP(u) \right)^{1/k} \leq \frac{2^{-k}}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя (20), получим

$$|E[h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]| \leq |E[f_{n_k} - h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]| + |E[f_{n_k} | g_1, \dots, g_{k-1}]| \leq \frac{2^{-k+1}}{3}.$$

Отсюда и из неравенств (21) следует

$$\|f_{n_k} - g_k\|_k \leq \|f_{n_k} - h_k\|_k + \|h_k - g_k\|_k \leq \frac{2^{-k}}{3} + \|E[h_k | g_1, \dots, g_{k-1}]\|_k \leq 2^{-k},$$

и доказательство леммы закончено.

Следующее утверждение без доказательства сформулировано в работе В. Ф. Гапошкина [16, теорема 1.3.2]. Доказательство сообщено мне автором и приведено здесь с его разрешения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная последовательность случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , $|f_n(\omega)| \leq M$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Существует подпоследовательность $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что для любой последовательности $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_2$ функция $f = \sum_{i=1}^\infty a_i f_{n_i} \in L_N$, где L_N – пространство Орлича, построенное по функции $N(t) = e^{t^2} - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f_n \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, согласно лемме существуют $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{f_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что $|g_k(\omega)| \leq 2M$, $E[g_k | g_1, \dots, g_{k-1}] = 0$ почти всюду и

$$\|g_k - f_{n_k}\|_k \leq 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Заметим, что последовательность $\{g_k\}$ мультипликативна. Действительно, так как (см. [12, с. 13]) для произвольных $k_1 < \dots < k_m$

$$E[g_{k_m} g_{k_1} \cdots g_{k_{m-1}} | g_{k_1}, \dots, g_{k_{m-1}}] = g_{k_1} \cdots g_{k_{m-1}} E[g_{k_m} | g_{k_1}, \dots, g_{k_{m-1}}] = 0,$$

то

$$\mathbb{E}[g_{k_1} \cdots g_{k_{m-1}} g_{k_m}] = \int_{\Omega} \mathbb{E}[g_{k_m} g_{k_1} \cdots g_{k_{m-1}} | g_{k_1} \cdots g_{k_{m-1}}] dP(\omega) = 0.$$

Ввиду [13, следствие 3] для мультипликативных систем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k \right\|_p \leq C \sqrt{p} \| (b_k) \|_2,$$

где $C = C(M) > 0$ не зависит от $(b_k) \in \ell_2$ и $p \in (1, \infty)$. Поэтому, используя (22), для $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{n_i}$ и произвольного $k \in \mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned} \|f\|_k &\leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i f_{n_i} \right\|_k + \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i (f_{n_i} - g_i) \right\|_k + \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i g_i \right\|_k \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2} \left\| \left(\sum_{i=1}^k f_{n_i}^2 \right)^{1/2} \right\|_k \\ &\quad + \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2} \left\| \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} (f_{n_i} - g_i)^2 \right)^{1/2} \right\|_k + \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i g_i \right\|_k \\ &\leq M \sqrt{k} \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2} \sum_{i=k+1}^{\infty} \|f_{n_i} - g_i\|_i + C \sqrt{k} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2} \\ &\leq (C + M + 1) \sqrt{k} \|a\|_2. \end{aligned}$$

Из разложения

$$e^{uz^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} z^{2k}, \quad u > 0,$$

следует

$$\int_{\Omega} (e^{u|f(\omega)|^2} - 1) dP(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \int_{\Omega} |f(\omega)|^{2k} dP(\omega) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (C + M + 1)^{2k} \frac{u^k}{k!} (2k)^k \|a\|_2^{2k}.$$

Так как полученный ряд сходится при $0 < u < (2e)^{-1} (C + M + 1)^{-2} (\|a\|_2)^{-2}$, то f принадлежит пространству Орлича L_N , $N(t) = e^{t^2} - 1$, и теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 следует основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная последовательность случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , $|f_n(\omega)| \leq M$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда из $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая мажорируется по распределению системой Радемахера. Последнее означает, что для некоторого $C = C(M) > 0$, не зависящего от $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_i)_{i=1}^m$ и $z > 0$, выполнено

$$P \left\{ \omega \in \Omega : \left| \sum_{i=1}^m a_i f_{n_i}(\omega) \right| > z \right\} \leq C \left| \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{i=1}^m a_i r_i(t) \right| > \frac{z}{C} \right\} \right|.$$

В заключение автор выражает искреннюю признательность В. Ф. Гапошкину за консультации по вопросам, связанным с последней частью работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
- [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [3] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [4] Асташкин С. В. Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера // Изв. РАЕН. Сер. ММИУ. 1997. Т. 1. № 1. С. 18–35.
- [5] Асташкин С. В. О рядах по системе Радемахера, "близких" к L_∞ // Функцион. анализ и его прилож. (в печати).
- [6] Montgomery-Smith S. The distribution of Rademacher sums // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. № 2. P. 517–522.
- [7] Holmstedt T. Interpolation of quasi-normed spaces // Math. Scand. 1970. V. 26. P. 177–199.
- [8] Szarek S. J. On the best constants in the Khinchine inequality // Studia Math. 1976. V. 58. P. 197–208.
- [9] Asmar N. H., Montgomery-Smith S. On the distribution of Sidon series // Ark. Mat. 1993. V. 31. № 1. P. 13–26.
- [10] Рутицкий Я. В. О некоторых классах измеримых функций // УМН. 1965. Т. 20. № 4. С. 205–208.
- [11] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [12] Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986.
- [13] Jakubowski J., Kwapien S. On multiplicative systems of functions // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 1979. V. 27. № 9. P. 689–694.
- [14] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. V. 2. Berlin: Springer, 1979.
- [15] Гапошкин В. Ф. Сходимость и предельные теоремы для подпоследовательностей случайных величин // Теор. вероятн. и ее применения. 1972. Т. 17. № 3. С. 401–423.
- [16] Гапошкин В. Ф. Лакуварные ряды и независимые функции // УМН. 1966. Т. 21. № 6. С. 3–82.