



УДК 517.982.27

О ДИЗЬЮНКТНОЙ СТРОГОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ ВЛОЖЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. В. Асташкин

В работе рассматриваются вопросы, связанные с дизъюнктной строгой сингулярностью вложений симметричных пространств функций, определенных на отрезке. Найдено условие, использующее фундаментальные функции пространств, которое обеспечивает наличие “зазора” между ними, достаточного для того, чтобы вложение одного пространства в другое обладало этим свойством. Показано, что это условие в определенном смысле точное. Попутно получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы дизъюнктно строго сингулярным было вложение одного пространства Лоренца в другое пространство Лоренца (и аналогичное утверждение для пространств Марцинкевича). Доказаны также и некоторые другие результаты.

Библиография: 12 названий.

Введение. Напомним, что линейный оператор T , ограниченный из банахова пространства X в банахово пространство Y , называют *строго сингулярным* (или *оператором Като*), если в X не существует бесконечномерного подпространства Z такого, что сужение T на Z является изоморфизмом.

Класс строго сингулярных операторов в течение последних десятилетий интенсивно изучался (библиографию см., например, в монографии [1]). Среди исторически первых и важных для дальнейшего изложения результатов отметим теорему Гротендика о том, что строго сингулярным является оператор тождественного вложения пространства $L_\infty(\Omega, \mu)$ в $L_p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$), где μ – вероятностная мера на пространстве Ω (см. [2] или [3, с. 133]). Однако, как правило, вложения симметричных пространств (определение см. ниже) этим свойством не обладают. Причина – существование “сквозных” подпространств (например, подпространства, порожденного системой функций Радемахера [4]). Отчасти и в связи с этим обстоятельством в 1989 году в работе [5] было введено близкое понятие дизъюнктно строго сингулярного оператора.

Линейный оператор T , ограниченный из банаховой решетки X в банахово пространство Y , называется *дизъюнктно строго сингулярным* (или *имеет DSS-свойство*), если не существует последовательности ненулевых дизъюнктных векторов $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в X , для которых сужение T на замкнутую линейную оболочку $[x_n]$ является изоморфизмом.

Ясно, что любой строго сингулярный оператор является DSS-оператором. Как показывает простой пример, обратное неверно. Так, оператор тождественного вложения $I: L_p[0, 1] \rightarrow L_q[0, 1]$ ($1 \leq q < p \leq \infty$) имеет DSS-свойство, так как для дизъюнктных функций $x_n \in L_r[0, 1]$ ($1 \leq r \leq \infty$) замкнутая линейная оболочка в L_r $[x_n]_r \approx \ell_r$ (изоморфизм). Однако, если $p < \infty$, то ввиду неравенства Хинчина [6, с. 341] $[r_n]_p \approx [r_n]_q \approx \ell_2$ (r_n – функции Радемахера) и, следовательно, I не строго сингулярен.

В то же время, если X имеет базис Шаудера, состоящий из дизъюнктивных векторов, не трудно показать, что класс DSS-операторов, определенных на X , совпадает с классом строго сингулярных операторов [7].

Понятие DSS-оператора оказалось важным при изучении геометрических свойств функциональных пространств. Так, например, существование операторов, не обладающих DSS-свойством, позволяет строить дополняемые подпространства с “нестандартными” проекторами на них [5], [7].

Цель настоящей работы – изучение вопроса, когда оператор тождественного вложения (далее мы всегда его обозначаем через I) одного симметричного пространства в другое обладает DSS-свойством. Условия при этом формулируются в терминах фундаментальных функций пространств.

Если $z = z(w)$ измерима на $[0, 1]$, μ – мера Лебега на этом отрезке, то ее *функцией распределения* будем называть функцию $n_z(\tau) = \mu\{w : |z(w)| > \tau\}$ ($\tau > 0$). Говорят, что функции $x(t)$ и $y(t)$ *равноизмеримы*, если $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ ($\tau > 0$).

Напомним, что банахово пространство E измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется *симметричным* (СП), если выполнены следующие условия:

- 1) из того, что $y \in E$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$, следует $x \in E$ и $\|x\| \leq \|y\|$;
- 2) если $y \in E$ и функции $x(t)$ и $y(t)$ равноизмеримы, то $x \in E$ и $\|x\| = \|y\|$.

Фундаментальная функция СП E определяется равенством $f_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$, где, как обычно,

$$\chi_U(t) = \begin{cases} 1, & t \in U, \\ 0, & t \notin U. \end{cases}$$

Функция $f_E(t)$ является квазивогнутой на $(0, 1]$ [8, с. 137], т.е. она неотрицательна, возрастает, а функция $f(t)/t$ убывает. Как известно (см., например, [8, с. 70]), такая функция эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте. Класс всех положительных возрастающих вогнутых на $(0, 1]$ функций далее обозначаем через G .

Важным примером СП является пространство Орлича. Пусть $N(t)$ – возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $N(0) = 0$, $N(\infty) = \infty$. Пространство Орлича L_N состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, для которых при некотором $u > 0$

$$\int_T N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) d\mu < \infty$$

с нормой

$$\|x\| = \inf \left\{ u > 0 : \int_T N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что фундаментальная функция пространства L_N есть $f_N(t) = 1/N^{-1}(1/t)$ ($N^{-1}(u)$ – функция, обратная к $N(u)$) [9].

В работе [5] доказана следующая теорема о дизъюнктивной строгой сингулярности оператора вложения пространства L_N в пространство L_M .

ТЕОРЕМА. Пусть $L_N \subset L_M$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) оператор $I: L_N \rightarrow L_M$ – DSS-оператор;
- 2) для любых $n = 1, 2, \dots$ и $\mathcal{K} > 0$ существуют $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$ и $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^n c_i N(tx_i) \geq \mathcal{K} \sum_{i=1}^n c_i M(tx_i) \quad (t \geq 1).$$

Покажем, что условие 2) этой теоремы следует из соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_M(t)}{f_N(t)} = 0,$$

где f_N и f_M – фундаментальные функции пространств Орлича. Действительно, в этом случае для произвольного $0 < h \leq 1$ $N^{-1}(t) \leq hM^{-1}(t)$ ($t \geq t_0$), откуда ввиду выпуклости $N(t) M(t) \leq N(ht) \leq hN(t)$, если $t \geq M^{-1}(t_0)$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{N(t)} = 0$$

и условие 2) выполнено.

Последнее обстоятельство делает естественной постановку следующей общей задачи.

Предположим, что для функций $\varphi \in G$ и $\psi \in G$ выполнено условие

$$\text{А) } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Будет ли тогда оператор тождественного вложения $I: E \rightarrow F$ иметь DSS-свойство для СП E и F , $E \subset F$, с фундаментальными функциями φ и ψ соответственно?

В дальнейшем будет показано, что для “классических” СП (например, пространств Лоренца и Марцинкевича) так же, как и для пространств Орлича, ответ на поставленный вопрос положителен. Более того, это верно для вложения пространства Лоренца в произвольное СП (и наоборот, произвольного СП в пространство Марцинкевича).

В общем случае, однако, это не так: в работе приведен пример двух СП E и F , $E \subset F$, для фундаментальных функций которых выполнено условие А), но оператор $I: E \rightarrow F$ – не DSS-оператор.

В то же время, с помощью фундаментальных функций пространств можно сформулировать более сильное, чем А), условие, при котором ответ на поставленный вопрос положителен для всех СП. Напомним прежде определение показателей растяжения функции.

Для положительной функции f , определенной на $(0, 1]$, функция растяжения $\mathcal{M}_f(t)$ определяется равенством

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup \left\{ \frac{f(st)}{f(s)} : 0 < s \leq \min \left(1, \frac{1}{t} \right) \right\} \quad (t > 0).$$

Так как $\mathcal{M}_f(t)$ полумультипликативна, существуют числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t}, \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t},$$

называемые *нижним и верхним показателями растяжения* функции f . Если $\varphi \in G$, то $0 \leq \gamma_\varphi \leq \delta_\varphi \leq 1$ [8, с. 76].

Для функций φ и ψ из класса G введем условие

$$\text{Б) } \gamma_{\psi/\varphi} > 0.$$

По определению нижнего показателя растяжения легко получить, что из условия Б) следует условие А). Обратное, конечно, неверно: в качестве φ и ψ достаточно взять функции, “различающиеся” на логарифм (см. также доказательство теоремы 3).

Мы покажем, что при выполнении Б) оператор $I: E \rightarrow F$ будет DSS-оператором для произвольных СП E и F , $E \subset F$, с фундаментальными функциями φ и ψ соответственно. Этот результат обобщает и одновременно уточняет аналогичную теорему для пространств Орлича из [7]. Попутно будет доказано, что условие А) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор тождественного вложения одного пространства Лоренца в другое пространство Лоренца обладал DSS-свойством (и аналогичное утверждение для пространств Марцинкевича). Эти результаты дополняют сформулированную выше теорему для пространств Орлича из работы [5].

1. О вложениях $\Lambda(\varphi) \subset F$ и $E \subset M(\theta)$. Если функция $\varphi \in G$, то пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(s) d\varphi(s) < \infty,$$

где $x^*(s)$ – убывающая непрерывная слева перестановка функции $|x(s)|$ [8, с. 83]. Ясно, что фундаментальная функция пространства Лоренца $f_{\Lambda(\varphi)}(t) = \varphi(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для функций $\varphi \in G$ и $\psi \in G$ выполнено соотношение А). Тогда если F – СП на $[0, 1]$ с фундаментальной функцией $\psi(t)$, то $\Lambda(\varphi) \subset F$ и оператор тождественного вложения $I: \Lambda(\varphi) \rightarrow F$ – DSS-оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия А) и непрерывности при $t > 0$ вогнутых функций φ и ψ следует, что для $t \in [0, 1]$ $\psi(t) \leq C_1 \varphi(t)$. Поэтому ввиду определения нормы в пространстве Лоренца $\Lambda(\varphi) \subset \Lambda(\psi)$. Так как пространство Лоренца – минимальное среди СП с такой же фундаментальной функцией [7, с. 160], получаем, что $\Lambda(\varphi) \subset F$.

Предположим, что $I: \Lambda(\varphi) \rightarrow F$ не имеет DSS-свойства. Тогда существует последовательность ненулевых дизъюнктных функций $x_n \geq 0$, для которой

$$\|x_n\|_{\Lambda(\varphi)} \leq C_2 \|x_n\|_F \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

По условию А) для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует $h > 0$ такое, что при $0 < t < h$

$$\psi(t) \leq \varepsilon \varphi(t). \quad (2)$$

Найдем N такое, что при $n \geq N$ $\mu(g_n) < h$, где $g_n = \{t \in [0, 1] : x_n(t) \neq 0\}$.

В любом пространстве Лоренца на $[0, 1]$ всюду плотно множество конечнозначных функций [8, с. 149]. Поэтому для всякого $n \geq N$ существует функция

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n \chi_{e_k^n}, \quad a_k^n \geq 0, \quad e_1^n \supset e_2^n \supset \dots \supset e_{m_n}^n, \quad \mu(e_1^n) < h,$$

для которой

$$\max(\|x_n - y_n\|_{\Lambda(\varphi)}, \|x_n - y_n\|_{\Lambda(\psi)}) < \varepsilon \min(\|x_n\|_{\Lambda(\varphi)}, \|x_n\|_{\Lambda(\psi)}). \quad (3)$$

Следовательно, $\|x_n\|_{\Lambda(\psi)} - \|y_n\|_{\Lambda(\psi)} \leq \varepsilon \|x_n\|_{\Lambda(\psi)}$ и, значит, ввиду [8, с. 160] и (2)

$$\begin{aligned} \|x_n\|_F &\leq \|x_n\|_{\Lambda(\psi)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|y_n\|_{\Lambda(\psi)} = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n \psi(\mu(e_k^n)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{k=1}^{m_n} a_k^n \varphi(\mu(e_k^n)) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|y_n\|_{\Lambda(\varphi)}. \end{aligned}$$

Из неравенства (3) следует, кроме того, что $\|y_n\|_{\Lambda(\varphi)} \leq (1+\varepsilon) \|x_n\|_{\Lambda(\varphi)}$. Таким образом,

$$\|x_n\|_F \leq \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \|x_n\|_{\Lambda(\varphi)}.$$

Последнее противоречит неравенству (1), если выбрать $\varepsilon > 0$ так, что

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon(1+\varepsilon)} > C_2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varphi \in G$, $\psi \in G$, $\psi(t) \leq C_1 \varphi(t)$ ($t \in (0, 1]$). Следующие условия эквивалентны:

- 1) выполнено А);
- 2) оператор $I: \Lambda(\varphi) \rightarrow \Lambda(\psi)$ – DSS-оператор;
- 3) не существует последовательности дизъюнктивных функций x_n таких, что при некотором $C_2 > 0$

$$\|x_n\|_{\Lambda(\varphi)} \leq C_2 \|x_n\|_{\Lambda(\psi)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $1) \implies 2)$ и $2) \implies 3)$ следуют из теоремы 1 и определения DSS-оператора соответственно.

Предположим, что условие А) не выполнено, т.е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} > 0.$$

Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset (0, 1]$ и $C_2 > 0$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1$ и $\varphi(t_n) \leq C_2 \psi(t_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). В этом случае для $x_n = \chi_{e_n}$, где $e_n \subset [0, 1]$ не пересекаются и $\mu(e_n) = t_n$, выполнено неравенство (4). Поэтому из 3) вытекает 1), и следствие доказано.

Пусть функция $\theta \in G$. Пространство Марцинкевича $M(\theta)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\theta)} = \sup_{0 < t \leq 1} (\theta(t))^{-1} \int_0^t x^*(s) ds < \infty.$$

Фундаментальная функция пространства $M(\theta)$ $f_{M(\theta)}(t) = \tilde{\theta}(t) = t/\theta(t)$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что для функций $\varphi \in G$ и $\psi \in G$ выполнено условие А). Если E – СП на $[0, 1]$ с фундаментальной функцией $\varphi(t)$, то $E \subset M(\tilde{\psi})$ и оператор тождественного вложения $I: E \rightarrow M(\tilde{\psi})$ – DSS-оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как пространство Марцинкевича максимально среди СП с той же фундаментальной функцией [8, с. 162], имеем $E \subset M(\tilde{\psi})$. Ввиду условия А) $\psi(t) \leq C_1 \varphi(t)$ ($t \in (0, 1]$), значит по определению пространства Марцинкевича $M(\tilde{\varphi}) \subset M(\tilde{\psi})$. Следовательно, $E \subset M(\tilde{\psi})$.

Предположим, что $I: E \rightarrow M(\tilde{\psi})$ не обладает DSS-свойством. Тогда, в частности, существует последовательность дизъюнктивных функций x_n такая, что

$$\|x_n\|_{M(\tilde{\psi})} = 1, \quad \|x_n\|_{M(\tilde{\varphi})} \leq C_2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Найдем $t_k \in (0, 1]$, для которых

$$\int_0^{t_k} x_k^*(s) ds \geq \frac{1}{2} \tilde{\psi}(t_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как функции x_k дизъюнктивны, можно считать, что $t_k \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_k\|_{M(\tilde{\varphi})} \geq (\tilde{\varphi}(t_k))^{-1} \int_0^{t_k} x_k^*(s) ds \geq \frac{\varphi(t_k)}{2\psi(t_k)}.$$

Ввиду А) при $k \rightarrow \infty$ $\|x_k\|_{M(\tilde{\varphi})} \rightarrow \infty$, что противоречит условию (5).

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varphi \in G$, $\psi \in G$, $\psi(t) \leq C_1 \varphi(t)$ ($t \in (0, 1]$). Следующие условия эквивалентны:

- 1) выполнено А);
- 2) оператор $I: M(\tilde{\varphi}) \rightarrow M(\tilde{\psi})$ – DSS-оператор;
- 3) не существует последовательности дизъюнктивных функций x_n таких, что при некотором $C_2 > 0$

$$\|x_n\|_{M(\tilde{\varphi})} \leq C_2 \|x_n\|_{M(\tilde{\psi})} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для произвольного СП E на $[0, 1]$, $E \neq L_1$, оператор $I: E \rightarrow L_1$ – DSS-оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, $L_1 = M(1)$ и произвольное СП E вложено в L_1 [8, с. 124]. Если $f_E(t) = \varphi(t)$, то ввиду вогнутости φ функция $t/\varphi(t)$ возрастает. Поэтому невыполнение условия А) эквивалентно тому, что $\varphi(t) \approx t$ (т.е. $C_1 t \leq \varphi(t) \leq C_2 t$ с некоторыми $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$). Следовательно, $E = L_1$. Осталось воспользоваться теоремой 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Иным способом утверждение последнего следствия было доказано в [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассуждая так же, как в следствии 3, с помощью теоремы 1 нетрудно показать, что для любого СП E , $E \neq L_\infty$, оператор $I: L_\infty \rightarrow E$ – DSS-оператор. В [11], более того, показано, что этот оператор даже строго сингулярен. Это обобщает упоминавшуюся во введении теорему Гротендика.

В следующем пункте мы докажем, что условие А), вообще говоря, не достаточно для того, чтобы оператор вложения СП с фундаментальной функцией φ в СП с фундаментальной функцией ψ обладал DSS-свойством.

2. Пример СП E и F , $E \subset F$, для фундаментальных функций которых выполнено условие А), но $I: E \rightarrow F$ – не DSS-оператор.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют два СП на $[0, 1]$ E и F , $E \subset F$, с фундаментальными функциями φ и ψ соответственно, удовлетворяющими условию А), такие, что оператор $I: E \rightarrow F$ не обладает DSS-свойством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве СП E возьмем пространство Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$, $\tilde{\psi}(t) = t/\psi(t)$,

$$\psi(t) = t^{1/2} \log_2^{1/2} \frac{4}{t}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Непосредственно проверяется, что ψ – возрастающая вогнутая функция на $(0, 1]$, $\gamma_\psi = \delta_\psi = 1/2$. Следовательно [3, с. 156],

$$\|x\|_{M(\tilde{\psi})} \approx \sup_{0 < t \leq 1} \{x^*(t)\psi(t)\}. \quad (6)$$

Перейдем к определению пространства F . Обозначим

$$b_k = (k+2)^{-1/2} 2^{k/2}, \quad z_k(t) = b_k \chi_{(0, 2^{-k}]}(t).$$

Кроме того, определим последовательность номеров $n_0 = 1 < n_1 < \dots < n_m < \dots$:

$$n_{m+1} = \max \left\{ n = 1, 2, \dots : \sum_{k=n_m}^{n-1} \frac{1}{k+2} \leq 1 \right\} \quad (7)$$

и последовательность функций $w_m = w_m(t)$:

$$w_m(t) = \max_{n_m \leq k < n_{m+1}} z_k(t), \quad m = 0, 1, \dots$$

Так как $\{b_k\}$ возрастает, ввиду (7) норма функций w_m в L_2 удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \|w_m\|_2^2 &\geq \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} b_k^2 2^{-k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{1}{k+2} \geq \frac{1}{4}, \\ \|w_m\|_2^2 &\leq \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} b_k^2 2^{-k} = \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{1}{k+2} \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \leq \|w_m\|_2 \leq 1. \quad (8)$$

Обозначим $\chi_b = b^{-1/2} \chi_{(0, b)}$, $\overline{w}_m = w_m / \|w_m\|_2$ и $V = \{\chi_b\}_{0 < b \leq 1} \cup \{\overline{w}_m\}_{m=0}^\infty$. Пусть F – множество всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, для которых

$$\|x\| = \sup \left\{ \int_0^1 x^*(t)v(t) dt : v \in V \right\} < \infty.$$

Тогда F – СП на $[0, 1]$ как пересечение пространств Лоренца, построенных по функциям $\int_0^t v(s) ds$ ($v \in V$). Кроме того, из определения F следует, что $\|x\|_{M(t^{1/2})} \leq \|x\|_F \leq \|x\|_2$.

Поэтому фундаментальные функции пространств E и F $f_E(t) = \psi(t)$ и $f_F(t) = t^{1/2}$ удовлетворяют условию А).

Покажем, что

$$M(\tilde{\psi}) \subset F. \quad (9)$$

Для этого ввиду (6) достаточно показать, что функция $1/\psi \in F$. Действительно,

$$\int_0^1 \chi_b(t) \frac{dt}{\psi(t)} = 2b^{-1/2} \int_0^b \frac{d(t^{1/2})}{\log_2^{1/2}(4/t)} \leq 2 \quad (0 < b \leq 1),$$

а

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_m(t) \frac{dt}{\psi(t)} &\leq \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} b_k \int_0^{2^{-k}} \frac{dt}{\psi(t)} = 2 \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} b_k \int_0^{2^{-k}} \frac{d(t^{1/2})}{\log_2^{1/2}(4/t)} \\ &\leq 2 \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{1}{k+2} \leq 2. \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду (8) по определению F получаем, что $\|1/\psi\|_F \leq 4$ и вложение (9) доказано.

Обозначим далее $D_m = (2^{-n_{m+1}}, 2^{-n_m}]$,

$$v_m(t) = w_m(t) \chi_{D_m}(t) = \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} b_k \chi_{(2^{-k-1}, 2^{-k}]}(t) \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Функции v_m дизъюнкты. Покажем, что на их линейной оболочке нормы пространств E и F эквивалентны.

Пусть

$$v(t) = \sum_{m=0}^r a_m v_m(t).$$

Без ограничения общности можно считать, что $a_m \geq 0$. Обозначим

$$w(t) = \max_{0 \leq m \leq r} a_m w_m(t).$$

Тогда $w(t)$ монотонно убывает на $(0, 1]$ и $v(t) \leq w(t)$. Следовательно, ввиду (6)

$$\|v\|_E \leq \|w\|_E \leq C \max_{0 \leq m \leq r} \left\{ a_m \max_{n_m \leq k < n_{m+1}} b_k \psi(2^{-k}) \right\}.$$

Так как $b_k \psi(2^{-k}) = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), получаем

$$\|v\|_E \leq C \max_{0 \leq m \leq r} a_m. \quad (10)$$

Оценим теперь $\|v\|_F$ снизу. Для любого $m = 0, 1, \dots, r$ ввиду (7)

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_m^*(t) w_m(t) dt &\geq \int_0^1 (v_m^*(t))^2 dt = \int_0^1 v_m^2(t) dt = \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} b_k^2 2^{-k-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{1}{k+2} \geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому из (8) следует, что $\|v_m\|_F \geq 1/4$. Следовательно, ввиду (10)

$$\|v\|_F \geq \max_{0 \leq m \leq r} \{a_m \|v_m\|_F\} \geq \frac{1}{4} \max_{0 \leq m \leq r} a_m \geq \frac{\|v\|_E}{4C}.$$

Вместе с вложением (9) это означает, что на линейной оболочке множества функций v_m ($m = 0, 1, \dots$) нормы пространств E и F эквивалентны. Следовательно, существует $B > 0$ такое, что для произвольных a_m

$$B^{-1} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} a_m v_m \right\|_F \leq \left\| \sum_{m=0}^{\infty} a_m v_m \right\|_E \leq B \left\| \sum_{m=0}^{\infty} a_m v_m \right\|_F.$$

Иначе говоря, оператор тождественного вложения $I: E \rightarrow F$ не обладает DSS-свойством.

Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 показывает, что соотношение А) не обеспечивает такого “зазора” между пространствами, который был бы достаточен для того, чтобы соответствующий оператор тождественного вложения обладал DSS-свойством. С другой стороны, простые примеры свидетельствуют о том, что в случае СП даже с одной и той же фундаментальной функцией этот оператор может таковым оказаться.

Так, например, DSS-свойством обладает оператор вложения пространства Лоренца $\Lambda(t^{1/p})$ в пространство L_p ($1 < p < \infty$). Действительно, нетрудно показать, что из любой последовательности нормированных дизъюнктивных функций в пространстве Лоренца можно выделить подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису в ℓ_1 . В то же время, любая такая последовательность функций в L_p эквивалентна стандартному базису в ℓ_p .

В заключительном пункте мы покажем, что в отличие от А) условие Б) достаточно для того, чтобы оператор $I: E \rightarrow F$ был DSS-оператором, если E и F – произвольные СП с фундаментальными функциями φ и ψ соответственно. Попутно будет установлено важное и само по себе DSS-свойство оператора вложения пространства Марцинкевича в пространство Лоренца.

3. Достаточность условия Б) для того, чтобы оператор $I: E \rightarrow F$ обладал DSS-свойством.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции $\varphi \in G$, $\psi \in G$, $\delta_\varphi < 1$, и для этих функций выполнено условие А). Если $M(\tilde{\varphi}) \subset \Lambda(\psi)$, то оператор $I: M(\tilde{\varphi}) \rightarrow \Lambda(\psi)$ обладает DSS-свойством.

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. В условиях теоремы 4 существует функция $\rho \in G$, для которой

- 1) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)}{\varphi(t)} = 0$;
- 2) $M(\tilde{\rho}) \subset \Lambda(\psi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\delta_\varphi < 1$, ввиду [8, с. 156]

$$\|x\|_{M(\tilde{\varphi})} \approx \sup_{0 < t \leq 1} \{\varphi(t)x^*(t)\}.$$

Поэтому вложение $M(\tilde{\varphi}) \subset \Lambda(\psi)$ эквивалентно тому, что

$$\int_0^1 \frac{d\psi(s)}{\varphi(s)} < \infty. \quad (11)$$

Так как функция φ вогнута, имеем

$$\int_0^1 \frac{d\psi(s)}{\varphi(s)} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^{-k}) - \psi(2^{-k-1})}{\varphi(2^{-k})}$$

и, значит, (11), в свою очередь, эквивалентно условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(2^{-k}) - \psi(2^{-k-1})}{\varphi(2^{-k})} < \infty. \quad (12)$$

Обозначим

$$a_k = \psi(2^{-k}) - \psi(2^{-k-1}), \quad S_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{\varphi(2^{-k})}.$$

Тогда $S_n \rightarrow 0$ и ввиду [12, с. 90] и (12)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{S_k} \varphi(2^{-k})} < \infty. \quad (13)$$

По определению верхнего показателя растяжения найдем $u > 0$ и $C > 0$ такие, что $\delta_\varphi + u < 1$ и для $t \geq 1$

$$\mathcal{M}_\varphi(t) \leq Ct^{\delta_\varphi + u/2}. \quad (14)$$

Введем числовую последовательность

$$g_0 = S_0, \quad g_k = \max(S_k, 2^{-u}g_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Пусть $g = g(t)$ — функция, линейная на отрезках $[2^{-k-1}, 2^{-k}]$, и $g(2^{-k}) = g_k$ ($k = 0, 1, \dots$), а $h(t) = \sqrt{g(t)}\varphi(t)$.

Так как $\{S_k\}$ убывает, то и $\{g_k\}$ убывает, а значит, функции $g(t)$ и $h(t)$ возрастают на $(0, 1]$. Если $j \geq 0$ и $2^{-k-1} < t \leq 2^{-k}$, то из (15) следует

$$\frac{g(2^j t)}{g(t)} \leq \frac{g(2^{j-k})}{g(2^{-k-1})} = \frac{g_{k-j}}{g_{k+1}} = \frac{g_{k+1-(j+1)}}{g_{k+1}} \leq 2^{(j+1)u}.$$

Следовательно, ввиду (14)

$$\mathcal{M}_h(2^j) = \sup_{0 < t \leq 2^{-j}} \frac{\varphi(2^j t) \sqrt{g(2^j t)}}{\varphi(t) \sqrt{g(t)}} \leq C 2^{u/2} 2^{(\delta_\varphi + u)j} \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Так как $\delta_\varphi + u < 1$, отсюда $\delta_h < 1$. Поэтому ввиду [8, с. 78] функция $h(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте, которую мы обозначим через $\rho(t)$.

Функция $\rho \in G$, $\rho(2^{-k}) \approx h(2^{-k}) = \sqrt{g_k} \varphi(2^{-k})$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), а так как $g_k \geq S_k$, из (13) следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\rho(2^{-k})} \leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{S_k} \varphi(2^{-k})} < \infty.$$

Но последнее так же, как и для функции φ (см. (11) и (12)), эквивалентно вложению $M(\tilde{\rho}) \subset \Lambda(\psi)$.

Наконец, из соотношения (15) получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)}{\varphi(t)} \leq C_1 \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{g(t)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{g_k} = 0.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. По лемме найдем функцию $\rho \in G$ такую, что

$$M(\tilde{\varphi}) \subset M(\tilde{\rho}) \subset \Lambda(\psi) \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t)}{\varphi(t)} = 0.$$

Тогда ввиду следствия 2 оператор $I: M(\tilde{\varphi}) \rightarrow M(\tilde{\rho})$ имеет DSS-свойство; тем более, он обладает этим свойством, если его рассматривать как оператор из $M(\tilde{\varphi})$ в $\Lambda(\psi)$.

Теорема доказана.

Последний результат позволяет доказать достаточность условия Б) для того, чтобы оператор тождественного вложения из СП E в СП F с фундаментальными функциями φ и ψ соответственно обладал DSS-свойством.

ТЕОРЕМА 5. Пусть для функций $\varphi \in G$ и $\psi \in G$ выполнено условие Б). Если E и F – СП с фундаментальными функциями φ и ψ соответственно, то $E \subset F$ и $I: E \rightarrow F$ – DSS-оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что выполнены условия теоремы 4, т.е. $\delta_\varphi < 1$ и

$$M(\tilde{\varphi}) \subset \Lambda(\psi). \quad (16)$$

Прежде всего, ввиду условия Б) существуют $u > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $0 < t \leq 1$ и $0 < s \leq 1$

$$\frac{\psi(ts)\varphi(s)}{\psi(s)\varphi(ts)} \leq Ct^u. \quad (17)$$

Отсюда в силу вогнутости ψ получаем

$$\mathcal{M}_\varphi\left(\frac{1}{t}\right) \leq C \mathcal{M}_\psi\left(\frac{1}{t}\right) t^u = Ct^{u-1}$$

и, значит, $\delta_\varphi \leq 1 - u < 1$.

Далее, так как функция $x^*(t)$ убывает, то для $x \in M(\tilde{\varphi})$

$$x^*(t) \leq \frac{\|x\|_{M(\tilde{\varphi})}}{\varphi(t)}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Поэтому для доказательства (16) достаточно проверить, что $1/\varphi \in \Lambda(\psi)$.

Из (17) следует, что $\psi(t)/\varphi(t) \leq C_1 t^u$. Поэтому $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и

$$\left\| \frac{1}{\varphi} \right\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^1 \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt \leq \int_0^1 \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \frac{dt}{t} \leq C_1 u^{-1} < \infty.$$

Итак, вложение (16) доказано. Ввиду уже упоминавшейся экстремальности пространств Лоренца и Марцинкевича в классе СП с одинаковой фундаментальной функцией [8] получаем $E \subset M(\tilde{\varphi}) \subset \Lambda(\psi) \subset F$. Поэтому $I: E \rightarrow F$ обладает DSS-свойством, так как аналогичное свойство он имеет по теореме 4 как оператор из $M(\tilde{\varphi})$ в $\Lambda(\psi)$.

Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для пространств Орлича и при несколько более ограничительном чем Б) условии на функции φ и ψ : $\delta_\varphi < \gamma_\psi$, последнее утверждение было получено в работе [7].

В заключение автор выражает благодарность С. Я. Новикову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
- [2] Grothendieck A. Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p // Canad. J. Math. 1954. V. 6. P. 158–160.
- [3] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [4] Rodin V. A., Semenov E. M. Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. V. 1. №3. P. 207–222.
- [5] Hernandez F. L., Rodrigues-Salinas B. On ℓ^p -complemented copies in Orlicz spaces. 2 // Israel J. Math. 1989. V. 68. P. 27–55.
- [6] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [7] Hernandez F. L. Disjointly strictly-singular operators // Proc. 19th Winter School on Analysis (Srni). Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 35–49.
- [8] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [9] Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
- [10] Новиков С. Я. О числовой характеристике подпространства симметричного пространства // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль, 1980. С. 140–148.
- [11] Novikov S. Ya. Boundary spaces for inclusion map between rearrangement invariant spaces // Proc. 3rd Conf. Function Spaces (Poznan). Collect. Math. 1993. V. 44. P. 211–215.
- [12] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

Самарский государственный университет
E-mail: astashkin@univer.samara.su

Поступило
18.04.96