

**$\mathcal{K}$ -монотонные весовые пары, порожденные
пространством,
не инвариантным относительно сдвига**

С.В. Асташкин

Аннотация

Важность изучения $\mathcal{K}$ -монотонных пар в теории интерполяции операторов связана, прежде всего, с возможностью описания всех пространств, интерполяционных относительно них. Как правило, они являются частичными ретрактами подходящих пар весовых L_p -пространств. В работе рассматриваются пары вида $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$, где E – пространство последовательностей, не инвариантное относительно сдвига. Показано, что при определенных условиях на E пара $\vec{E}$ $\mathcal{K}$ -монотонна, но не является частичным ретрактом ни одной из пар весовых L_p -пространств. Приведены примеры.

Если $\vec{X} = (X_0, X_1)$ – банахова пара(БП) [1], $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$, то $\mathcal{K}$ -функционал Петре определяется соотношением:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}.$$

БП $\vec{X}$ называется $\mathcal{K}$ -монотонной (иначе: парой Кальдерона или Кальдерона-Митягина), если из того, что $x, y \in X_0 + X_1$ и

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0),$$

следует существование линейного оператора $T : X_0 + X_1 \rightarrow X_0 + X_1$, ограниченного в X_0 и в X_1 , для которого $y = Tx$. Пару $\vec{X}$ будем называть равномерно $\mathcal{K}$ -монотонной (с константой C), если для любого $C' > C$ оператор T можно выбрать так, чтобы наряду с прежними условиями

$$\|T\|_{\vec{X} \rightarrow \vec{X}} = \max_{i=0,1} \{\|T\|_{X_i \rightarrow X_i}\} \leq C'.$$

Заметим, что до сих пор не известны примеры $\mathcal{K}$ -монотонных, но не равномерно $\mathcal{K}$ -монотонных пар.

Важность изучения $\mathcal{K}$ -монотонных БП связана, прежде всего, с возможностью полного описания класса всех пространств, интерполяционных относительно них. А именно, пусть X – произвольное пространство, интерполяционное относительно $\mathcal{K}$ -монотонной БП $\vec{X} = (X_0, X_1)$, т.е. $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и любой линейный оператор T , ограниченный в X_0 и в X_1 , ограничен в X . Тогда X совпадает с пространством вещественного $\mathcal{K}$ -метода

$$\vec{X}_E^{\mathcal{K}} = (X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}, \quad \|x\|_{\vec{X}_E^{\mathcal{K}}} = \|(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_{k=-\infty}^{\infty}\|_E,$$

построенным по подходящему банахову идеальному пространству (БИП) E двусторонних последовательностей действительных чисел (далее такие пространства будем называть параметрами $\mathcal{K}$ -метода) [2].

Исторически первым примером $\mathcal{K}$ -монотонной БП была пара (L_1, L_∞) . В 1965-66 годах Б.С.Митягин и А.П.Кальдерон независимо доказали, что это равномерно $\mathcal{K}$ -монотонная пара с константой 1 ([3],[4]). Далее, в ряде работ было показано, что аналогичным свойством обладает произвольная пара весовых L_p -пространств (см.[5-7]; более полную библиографию см. в [8]), а также БП, в определенном смысле близкие к ним.

БП $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называют частичным ретрактом БП $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, если каждый $x \in X_0 + X_1$ орбитально эквивалентен некоторому $y \in Y_0 + Y_1$. Это означает, что существуют линейные операторы $U : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ и $V : \vec{Y} \rightarrow \vec{X}$, для которых $Ux = y$ и $Vy = x$. Будем называть пару $\vec{X}$ равномерным частичным ретрактом пары $\vec{Y}$ (с константой C), если для любого $C' > C$ операторы U и V можно выбирать так, что дополнительно:

$$\|U\|_{\vec{X} \rightarrow \vec{Y}} = \max_{i=0,1} \{\|U\|_{X_i \rightarrow Y_i}\} \leq C', \quad \|V\|_{\vec{Y} \rightarrow \vec{X}} = \max_{i=0,1} \{\|V\|_{Y_i \rightarrow X_i}\} \leq C',$$

причем C не зависит от $x \in X_0 + X_1$.

Нетрудно показать, что (равномерный) частичный ретракт (равномерно) $\mathcal{K}$ -монотонной пары – тоже (равномерно) $\mathcal{K}$ -монотонная пара [9, р.420]. С этим обстоятельством связана идея построения новых примеров таких пар.

Так, например, в [10] (см. также [11]) доказано, что пара пространств вещественного $\mathcal{K}$ -метода $(\vec{X}_{E_0}^{\mathcal{K}}, \vec{X}_{E_1}^{\mathcal{K}})$ равномерно $\mathcal{K}$ -монотонна для произвольной БП $\vec{X} = (X_0, X_1)$, если: 1) пара параметров (E_0, E_1) равномерно

$\mathcal{K}$ -монотонна; 2) в E_0 и в E_1 ограниченно действует оператор Кальдерона

$$Q(a_j) = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \min(1, 2^{k-j}) a_j \right)_{k=-\infty}^{\infty} \quad (1)$$

В частности, для любых $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$ и $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ равномерно $\mathcal{K}$ -монотонна БП $(\vec{X}_{\theta_0, p_0}, \vec{X}_{\theta_1, p_1})$, где, как обычно [1],

$$\vec{X}_{\theta, p} = \vec{X}_{l_p(2^{-k\theta})}^{\mathcal{K}}.$$

Здесь и далее, если E – БИП [12] на пространстве Ω с мерой, $f(\omega) \geq 0$ – измеримая функция на Ω , то $E(f)$ – пространство с весом, т.е. $\|x\|_{E(f)} = \|xf\|_E$.

Основная цель данной работы – показать, что описанный выше метод доказательства $\mathcal{K}$ -монотонности БП не универсален. Точнее, будут приведены примеры равномерно $\mathcal{K}$ -монотонных БП, не являющихся частичными ретрактами пар весовых L_p -пространств. Речь будет идти о парах вида $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$, где E – БИП последовательностей. При определенных условиях на E , которые формулируются ниже, пара $\vec{E}$ равномерно $\mathcal{K}$ -монотонна. В то же время, если E не инвариантно относительно сдвига, она, как будет показано, не является частичным ретрактом ни одной из пар весовых $\mathcal{K}$ -пространств.

В следующем утверждении и далее через $\vec{X}_{[\theta]} = [X_0, X_1]_{\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 1$) ((X_0, X_1) – БП банаховых пространств над полем комплексных чисел) обозначаются пространства комплексного метода интерполяции (их определение и свойства см., например, в [1, глава 4]).

Лемма 1. Предположим, что БП $\vec{X} = (X_0, X_1)$ – частичный ретракт некоторой пары весовых L_p -пространств $\vec{\mathcal{L}} = (L_{p_0}(f_0), L_{p_1}(f_1))$. Тогда для всех $0 < \theta < 1$

$$\vec{X}_{[\theta]} = \vec{X}_{\theta, p},$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Доказательство. Как известно [1, с.154-155],

$$\vec{\mathcal{L}}_{[\theta]} = \vec{\mathcal{L}}_{\theta, p} = L_p(f_{\theta}) \quad (0 < \theta < 1), \quad (2)$$

где $f_{\theta} = f_0^{1-\theta} f_1^{\theta}$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Так как БП $\vec{X}$ – частичный ретракт пары $\vec{\mathcal{L}}$, то для произвольного $x \in X = \vec{X}_{[\theta]} \subset X_0 + X_1$ существуют $y \in L_{p_0}(f_0) + L_{p_1}(f_1)$ и линейные

операторы $U : \vec{X} \rightarrow \vec{\mathcal{L}}$ и $V : \vec{\mathcal{L}} \rightarrow \vec{X}$, такие, что $y = Ux$ и $x = Vy$. Ввиду того, что $[\cdot, \cdot]_\theta$ и $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$ – интерполяционные функторы [1], из равенства (2) следует: $y \in L_p(f_\theta)$ и $x \in X' = \vec{X}_{\theta, p}$. Точно так же, наоборот, если $x \in X'$, то $x \in X$.

Предположим, что в БИП G двусторонних последовательностей действительных чисел для любого $k \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$) ограничен оператор сдвига $P_k(a_j) = (a_{k+j})_{j=-\infty}^\infty$. Обозначив $p_k(G) = \|P_k\|_{G \rightarrow G}$ ($k \in \mathbf{Z}$), будем называть БИП G инвариантным относительно сдвига, если

$$\sup\{p_k(G) : k \in \mathbf{Z}\} < \infty.$$

В [13] были определены показатели

$$\mu_G = \sup_{k \leq 0} \frac{\log_2 p_k(G)}{k} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\log_2 p_k(G)}{k} \quad (3)$$

и

$$\nu_G = \inf_{k \geq 0} \frac{\log_2 p_k(G)}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2 p_k(G)}{k} \quad (4)$$

Всегда $\mu_G \leq \nu_G$, и если G инвариантно относительно сдвига, то $\mu_G = \nu_G = 0$ (обратное, конечно, неверно). Там же в терминах этих показателей получены необходимые и достаточные условия ограниченности обобщенного оператора Кальдерона

$$\tilde{Q}(a_j) = \left(\sum_{j=-\infty}^\infty a_j \min_{i=0,1} \{w_j^i / w_k^i\} \right)_{k=-\infty}^\infty$$

в произвольном пространстве последовательностей. В частности, для того, чтобы оператор Q (см.(1)) был ограничен в БИП G , необходимо и достаточно, чтобы $0 < \mu_G \leq \nu_G < 1$.

Через e^k ($k \in \mathbf{Z}$) далее обозначаются стандартные орты пространств последовательностей, т.е. $e^k = (\delta_i^k)_{i=-\infty}^\infty$, где $\delta_i^k = 1$ ($i = k$) и $\delta_i^k = 0$ ($i \neq k$).

Лемма 2. Предположим, что E – БИП последовательностей, для которого $\|e^k\|_E = 1$ ($k \in \mathbf{Z}$). Если $0 < \theta < 1$ и $-\theta < \mu_E \leq \nu_E < 1 - \theta$, то

$$(E, E(2^{-k}))_{E(2^{-k\theta})}^{\mathcal{K}} = E(2^{-k\theta}) \quad (5)$$

Доказательство. Если $G = E(2^{-k\theta})$, то непосредственная проверка показывает, что $\mu_G = \mu_E + \theta$ и $\nu_G = \nu_E + \theta$. Поэтому, по условию,

$0 < \mu_G \leq \nu_G < 1$. Значит, оператор Кальдерона Q ограничен в G и ввиду результатов [14]

$$(l_1, l_1(2^{-k}))_G^K = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))_G^K = G \quad (6)$$

В то же время, из условия $\|e^k\|_E = 1$ и идеальности E легко получить, что $l_1 \subset E \subset l_\infty$. Равенство (5) следует теперь из (6) и монотонности функтора $(\cdot, \cdot)_G^K$.

Напомним некоторые определения из [15]. Если $x = (x_k)_{k=-\infty}^\infty$ – числовая последовательность, то ее носитель $\text{supp } x = \{k \in \mathbf{Z} : x_k \neq 0\}$. Неравенство $A < B$ означает, что $a < b$ для произвольных $a \in A$, $b \in B$ ($A \subset \mathbf{Z}, B \subset \mathbf{Z}$). Пусть $\{x^n\}_{n=1}^m, \{y^n\}_{n=1}^m$ – два семейства числовых последовательностей. Пара $(x^n, y^n)_{n=1}^m$ называется сплетенной (interlaced), если носители x^n и y^n конечны и

$$\text{supp } x^n \subset \text{supp } y^n (1 \leq n \leq m), \text{supp } y^n \subset \text{supp } x^{n+1} (1 \leq n \leq m-1).$$

Говорят, что БИП последовательностей E имеет свойство правостороннего сдвига (RSP), если существует $C > 0$, такое, что для произвольной сплетенной пары $(x^n, y^n)_{n=1}^m$ с $\|y^n\|_E \leq \|x^n\|_E = 1 (1 \leq n \leq m)$ и любых чисел α_n выполнено:

$$\left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n y^n \right\|_E \leq C \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x^n \right\|_E.$$

Аналогично, E имеет свойство левостороннего сдвига (LSP), если существует $C > 0$, такое, что для произвольной сплетенной пары $(x^n, y^n)_{n=1}^m$ с $\|x^n\|_E \leq \|y^n\|_E = 1$ и любых α_n выполнено:

$$\left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x^n \right\|_E \leq C \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n y^n \right\|_E.$$

Замечание 1. Если E – симметричное пространство с абсолютно непрерывной нормой (т.е. из того, что $x^n = (x_k^n)_{k=-\infty}^\infty \in E$ и для всех $k \in \mathbf{Z}$ $x_k^n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ следует: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|_E = 0$) и имеет хотя бы одно из двух свойств: (RSP) или (LSP), то нетрудно показать, что $E = l_p$ для некоторого $1 \leq p < \infty$ или $E = c_0$. В то же время, в классе пространств, не инвариантных относительно сдвига, есть и другие примеры пространств с этими свойствами. Первый из них – прямая сумма

$l_q(\mathbf{Z}_-) \oplus l_r(\mathbf{Z}_+)$ ($1 \leq q \neq r \leq \infty$) с нормой

$$\|(x_k)\| = \left(\sum_{k=-1}^{-\infty} |x_k|^q \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^r \right)^{1/r}.$$

(при бесконечном q или r рассматривается естественная модификация). Второй – хорошо известное пространство Цирельсона T [16, p.95]. Нетрудно проверить, что эти пространства имеют оба свойства: и (RSP), и (LSP).

В связи с этим интересно было бы выяснить, существуют ли БИП, инвариантные относительно сдвига и имеющие хотя бы одно из свойств (RSP) или (LSP).

Лемма 3. Пусть E – БИП последовательностей с абсолютно непрерывной нормой, $\|e^k\|_E = 1$ ($k \in \mathbf{Z}$). Справедливы следующие утверждения:

1) Если E имеет свойство (LSP), то для $n \geq 0$

$$\|P_n\|_{E \rightarrow E} \leq C(n+1) \quad (7)$$

2) Если E имеет свойство (RSP), то для $n \leq 0$

$$\|P_n\|_{E \rightarrow E} \leq C(1-n) \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $n \geq 0$, $a = (a_j) \in E$ и $b = P_n a = (a_{n+j})_j$. Если представить

$$a = \sum_{k=0}^n a^k, \quad a^k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{(n+1)j+k} e^{(n+1)j+k},$$

то

$$b = \sum_{k=0}^n b^k, \quad b^k = P_n a^k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{(n+1)j+k} e^{(n+1)j-n+k}.$$

Для произвольных $m = 1, 2, \dots$ и $0 \leq k \leq n$ пара нормированных в E последовательностей $(e^{(n+1)j+k}, e^{(n+1)j-n+k})_{j=-m}^{j=m}$ – сплетенная. Значит, применяя к ней (LSP), получим:

$$\left\| \sum_{j=-m}^m a_{(n+1)j+k} e^{(n+1)j-n+k} \right\| \leq C \|a^k\|,$$

где $C > 0$ не зависит от $m = 1, 2, \dots$ и $0 \leq k \leq n$. Отсюда ввиду идеальности E и абсолютной непрерывности нормы в нем $\|b^k\| \leq C\|a^k\| \leq C\|a\|$. В итоге

$$\|P_n a\| = \|b\| \leq \sum_{k=0}^n \|b^k\| \leq C(n+1)\|a\|,$$

и (7) доказано.

Неравенство (8) доказывается совершенно аналогично с использованием свойства (RSP).

Следствие. В условиях леммы 3

- 1) если E имеет свойство (LSP), то $\nu_E = 0$;
- 2) если E имеет свойство (RSP), то $\mu_E = 0$.

Доказательство. Так как $\|e^k\|_E = 1$, то $\|P_n\|_{E \rightarrow E} \geq 1 (n \in \mathbf{Z})$. Следовательно, из определения показателей μ_E и ν_E (см. (3) и (4)) получим: $\mu_E \leq 0 \leq \nu_E$.

С другой стороны, ввиду леммы 3, если E имеет свойство (LSP), то

$$\nu_E \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n+1)}{n} = 0;$$

если же E имеет свойство (RSP), то

$$\mu_E \geq \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\log_2(1-n)}{n} = 0.$$

Замечание 2. Неравенства (7) и (8) неумлучшаемы по порядку. Действительно, если $E = l_1(\mathbf{Z}_-) \oplus c_0(\mathbf{Z}_+)$, то $\|P_n\|_{E \rightarrow E} = n+1 (n \geq 0)$. Аналогично для $E' = c_0(\mathbf{Z}_-) \oplus l_1(\mathbf{Z}_+)$ $\|P_n\|_{E' \rightarrow E'} = 1-n (n \leq 0)$.

Пусть E – БИП последовательностей. Через $E^{\mathbf{C}}$ обозначим его "комплексификацию", т.е. пространство всех последовательностей комплексных чисел, для которых $(|a_k|)_{k=-\infty}^{\infty} \in E$ с $\|(a_k)\|_{E^{\mathbf{C}}} = \|(|a_k|)\|_E$.

Теорема. Существует БИП последовательностей G , такое, что БП $\vec{G}^{\mathbf{C}} = (G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k}))$ равномерно $\mathcal{K}$ -монотонна, но не является частичным ретрактом ни одной из пар весовых L_p -пространств.

Доказательство. В качестве G возьмем пространство со следующими свойствами: а) норма в G абсолютно непрерывна; б) $\|e^k\|_G = 1$; в) G имеет свойства (LSP) и (RSP); г) G не инвариантно относительно сдвига.

Отметим, что пространства с перечисленными свойствами существуют (примеры приведены в замечании 1).

Прежде всего, по следствию из леммы 3 $\mu_G = \nu_G = 0$. Поэтому в силу того, что G обладает свойствами (LSP) и (RSP), по теореме 4.5 из [15] пара $\vec{G}$, а значит, и $\vec{G}^{\mathbf{C}}$ равномерно $\mathcal{K}$ -монотонна.

Далее, так как G имеет абсолютно непрерывную норму, то ввиду [17, p.125]

$$[G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k})]_{\theta} = G_{\theta}^{\mathbf{C}}, \quad (9)$$

где $G_{\theta} = G(2^{-k\theta})$. С другой стороны, так как $\mu_G = \nu_G = 0$, для $0 < \theta < 1$ выполнены условия леммы 2, и поэтому

$$(G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{G_{\theta}}^{\mathcal{K}} = G_{\theta}^{\mathbf{C}} \quad (10)$$

Предположим теперь, что БП $\vec{G}^{\mathbf{C}}$ – частичный ретракт некоторой пары весовых L_p -пространств $\vec{\mathcal{L}} = (L_{p_0}(f_0), L_{p_1}(f_1))$. Тогда ввиду предложения 1 для $0 < \theta < 1$

$$[G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k})]_{\theta} = (G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{\theta, p},$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Следовательно, из соотношений (9) и (10) получаем:

$$(G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{\theta, p} = (G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{G_{\theta}}^{\mathcal{K}} = G_{\theta}^{\mathbf{C}} \quad (11)$$

В то же время, так как в пространстве $l_p(2^{-k\theta})$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$) ограничен оператор Кальдерона Q , то

$$(l_1^{\mathbf{C}}, l_1^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{\theta, p} = (l_{\infty}^{\mathbf{C}}, l_{\infty}^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{\theta, p} = l_p^{\mathbf{C}}(2^{-k\theta}).$$

Отсюда и из вложений $l_1 \subset G \subset l_{\infty}$

$$(G^{\mathbf{C}}, G^{\mathbf{C}}(2^{-k}))_{\theta, p} = l_p^{\mathbf{C}}(2^{-k\theta}) \quad (12)$$

В итоге, из соотношений (11), (12) и определения G_{θ} получаем: $G = l_p$. Это противоречит тому, что G не инвариантно относительно сдвига. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
2. Брудный Ю.А., Кругляк Н.Я. Функторы вещественной интерполяции // ДАН СССР. 1981. Т. 256, N1. С. 14-17.
3. Митягин Б.С. Интерполяционная теорема для модулярных пространств // Мат. сб. 1965. Т. 66, N4. С. 473-482.
4. Calderon A.P. Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewicz // Stud. math. 1966. V. 26, N3. P. 273-299.
5. Седаев А.А., Семенов Е.М. О возможности описания интерполяционных пространств в терминах $\mathcal{K}$ -метода Питре. Сб. тр. ин-та мат. Сиб. отд. АН СССР. 1971. Вып. 4(21). С. 98-114.
6. Седаев А.А. Описание интерполяционных пространств пары $(L_{a_0}^p, L_{a_1}^p)$ и некоторые родственные вопросы // ДАН СССР. 1973. Т. 209, N4. С. 798-800.
7. Sparr G. Interpolation of weighted L_p -spaces // Studia Math. 1978. V. 62. P. 229-271.
8. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. "Математический анализ. Т. 24 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)". М., 1986. С. 3-164.
9. Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 349-515.
10. Дмитриев В.И., Овчинников В.И. Об интерполяции в пространствах вещественного метода // ДАН СССР. 1979. Т. 246, N4. С. 794-797.
11. Cwikel M. Monotonicity properties of interpolation spaces. 2 // Arc. mat. 1981. V. 19, N1. P. 123-136.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

13. Асташкин С.В. Описание интерполяционных пространств между $(l_1(\omega^0), l_1(\omega^1))$ и $(l_\infty(\omega^0), l_\infty(\omega^1))$ //Мат.заметки.1984. Т.35,N4.С.497-503.
14. Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation// J.Funct. Anal.1981.V.14.P.50-73.
15. Kalton N.J. Calderon couples of rearrangement invariant spaces//Stud. math.1993.V.106,N3.P.233-277.
16. Lindenstrauss J.,Tzafriri L. Classical Banach spaces 1. Sequence Spaces.Berlin e.a.: Springer-Verlag.1977.
17. Calderon A.P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method//Stud.math.1964.V.24. 190.