

# О рядах по системе Радемахера в симметричных пространствах, «близких» к $L_\infty$

© 1998. С. В. АСТАШКИН

Пусть

$$r_k(t) = \text{sign} \sin 2^{k-1} \pi t \quad (k = 1, 2, \dots)$$

— система функций Радемахера на  $[0, 1]$ .

Для  $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$  определим линейный оператор

$$Ta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \quad (t \in [0, 1]). \quad (1)$$

Если, как обычно,  $\|a\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p)^{1/p}$ , то ввиду неравенства Хинчина для  $1 \leq p < \infty$

$$\|Ta\|_{L_p[0,1]} \asymp \|a\|_2 \quad (2)$$

(последнее означает существование двусторонних оценок с константами, зависящими только от  $p$ ). Кроме того, легко проверить, что

$$\|Ta\|_{L_\infty[0,1]} = \|a\|_1. \quad (3)$$

Более полное представление о поведении рядов по системе Радемахера можно получить, рассматривая их в рамках общих симметричных пространств.

Напомним, что банахово пространство  $X$  измеримых на  $[0, 1]$  функций  $x = x(t)$  называется симметричным (СП), если из того, что  $x^*(t) \leq y^*(t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) и  $y \in X$ , следует, что  $x \in X$  и  $\|x\| \leq \|y\|$  ( $z^*(t)$  — невозрастающая перестановка функции  $|z(t)|$  [1, с. 83]). Для любого СП  $X$  на  $[0, 1]$  имеют место вложения  $L_\infty \subset X \subset L_1$  [1, с. 124].

Важный пример СП — пространство Орлича. Пусть  $N(t)$  — возрастающая выпуклая функция на  $[0, \infty)$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} N(u)/u = \lim_{u \rightarrow \infty} u/N(u) = 0$  и  $N(0) = 0$ . Пространство Орлича  $L_N$  состоит из всех измеримых функций  $x = x(t)$  на  $[0, 1]$ , для которых

$$\|x\|_N = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 N\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leq 1 \right\} < \infty.$$

В частности, если  $N(t) = t^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), то  $L_N = L_p$ . Особую роль в рассматриваемых вопросах играет пространство Орлича  $L_M$ , где  $M(t) = \exp(t^2) - 1$ , точнее, замыкание пространства  $L_\infty$  в этом пространстве, которое будет обозначаться через  $G$ .

В работе [2], наряду с другими результатами, доказано, что норма СП  $X$  эквивалентна на линейной оболочке функций Радемахера норме пространства  $l_2$  (т.е. для  $X$  выполнено соотношение, аналогичное (2)) тогда и только тогда, когда  $X \supset G$ .

В настоящей заметке приведены результаты, касающиеся поведения рядов по системе Радемахера в СП  $X$ , промежуточных между  $L_\infty$  и  $G$ . Основная роль при этом принадлежит некоторым понятиям и методам теории интерполяции линейных операторов.

Для банаховой пары  $(X_0, X_1)$ ,  $x \in X_0 + X_1$  и  $t > 0$  введем  $\mathcal{H}$ -функционал Петре:

$$\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}.$$

Пусть  $Y_0$  — подпространство в  $X_0$ , а  $Y_1$  — подпространство в  $X_1$ . Пара  $(Y_0, Y_1)$  называется  $\mathcal{H}$ -подпарой пары  $(X_0, X_1)$ , если

$$\mathcal{H}(t, y; Y_0, Y_1) \asymp \mathcal{H}(t, y; X_0, X_1)$$

с константами, не зависящими от  $y \in Y_0 + Y_1$  и  $t > 0$ .

В частности, если  $Y_i = P(X_i)$  ( $i = 0, 1$ ), где  $P$  — линейный ограниченный проектор в  $X_0$  и  $X_1$ , то  $(Y_0, Y_1)$  есть  $\mathcal{H}$ -подпара пары  $(X_0, X_1)$  [3, с. 136]. В то же время известно немало примеров подпар, не являющихся  $\mathcal{H}$ -подпарами (см. [3, с. 589; 4] или замечание 1 данной работы).

Рассмотрим случай  $X_0 = L_\infty$ ,  $X_1 = G$ ,  $Y_0 = T(l_1)$ ,  $Y_1 = T(l_2)$ , где  $T$  — оператор, определяемый равенством (1). Из соотношения (3) и сформулированного выше утверждения из [2] следует, что

$$\mathcal{H}(t, Ta; T(l_1), T(l_2)) \asymp \mathcal{H}(t, a; l_1, l_2). \quad (4)$$

Несмотря на то что  $T(l_1)$  недополняемо в  $L_\infty$  [5], справедливо следующее утверждение:

**ТЕОРЕМА 1.** *Пара  $(T(l_1), T(l_2))$  является  $\mathcal{H}$ -подпарой пары  $(L_\infty, G)$ . Иначе говоря (см. (4)),*

$$\mathcal{H}(t, Ta; L_\infty, G) \asymp \mathcal{H}(t, a; l_1, l_2)$$

с константами, не зависящими от  $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$  и  $t > 0$ .

В доказательстве теоремы 1 используется результат статьи [6] о распределении сумм Радемахера.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Утверждение теоремы 1 становится неверным, если  $G$  в ее формулировке заменить на  $L_p$  при каком-либо  $p < \infty$ .

Каждое СП  $X$  естественным образом порождает координатное пространство последовательностей коэффициентов рядов по системе Радемахера. Теорема 1 позволяет находить его в том случае, когда  $X$  интерполяционно между пространствами  $L_\infty$  и  $G$  (т.е.  $L_\infty \subset X \subset G$  и каждый линейный оператор, ограниченный в  $L_\infty$  и  $G$ , ограничен в  $X$ ).

Пусть  $E$  — банахово идеальное пространство двусторонних последовательностей, такое, что  $(\min(1, 2^k))_{k=-\infty}^\infty \in E$ . Если  $(X_0, X_1)$  — банахова пара, то пространство вещественного  $\mathcal{H}$ -метода  $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{H}}$  состоит из всех  $x \in X_0 + X_1$ , для которых

$$\|x\| = \|(\mathcal{H}(2^k, x; X_0, X_1))_k\|_E < \infty.$$

В частном случае  $E = l_p(2^{-k\theta})$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , получаем классические пространства  $(X_0, X_1)_{\theta, p}$  (подробное описание их свойств см. в [7]).

Если СП  $X$  интерполяционно между  $L_\infty$  и  $G$ , то оно описывается  $\mathcal{K}$ -методом [8]. Последнее означает, что

$$X = (L_\infty, G)_E^{\mathcal{K}} \quad (5)$$

для некоторого параметра  $E$ . Поэтому из теоремы 1 следует

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $X$  — это СП, интерполяционное между  $L_\infty$  и  $G$ , причем выполнено (5). Тогда для пространства последовательностей  $F = (l_1, l_2)_E^{\mathcal{K}}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|(a_k)\|_F.$$

Последний результат показывает, что установленное в теореме 2 соответствие между СП, интерполяционными между  $L_\infty$  и  $G$ , и порожденными ими пространствами последовательностей взаимно однозначное.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $X_0$  и  $X_1$  — два СП, интерполяционных между  $L_\infty$  и  $G$ . Если

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_0} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_1},$$

то  $X_0 = X_1$  и их нормы эквивалентны.

Приведенные результаты позволяют находить пространства последовательностей коэффициентов рядов по системе Радемахера, соответствующие конкретным СП.

В следующих примерах  $\varphi \geq 0$  — возрастающая вогнутая функция.

**ПРИМЕР 1.** СП Лоренца  $\Lambda_p(\varphi)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) состоит из всех измеримых функций  $x = x(s)$ , для которых

$$\|x\|_{\varphi, p} = \left\{ \int_0^1 (x^*(s))^p d\varphi(s) \right\}^{1/p} < \infty.$$

Если, в частности,  $\varphi(s) = \log_2^{1-p} 2/s$  и  $1 < p < 2$ , то

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{\varphi, p} \asymp \|(a_k)\|_p.$$

**ПРИМЕР 2.** СП Марцинкевича  $M(\varphi)$  состоит из всех измеримых функций  $x = x(s)$ , для которых

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x^*(s) ds : 0 < t \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если, в частности,  $\varphi(t) = t \log_2 \log_2 16/t$ , то

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{M(\varphi)} \asymp \|(a_k)\|_{l_1(\ln)} = \sup \left\{ \frac{1}{\log_2(2k)} \sum_{i=1}^k a_i^* : k = 1, 2, \dots \right\},$$

где  $(a_i^*)$  — перестановка последовательности  $(|a_k|)_{k=1}^\infty$  в убывающем порядке.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Теоремы 2 и 3 усиливают результаты работы [2], где аналогичные утверждения были получены для пространств последовательностей  $F$ , удовлетворяющих более ограничительным условиям. Так, например, нетрудно показать, что норма оператора растяжения

$$\sigma_n a = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_n, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_n, \dots)$$

в пространстве  $l_1(\ln)$  (см. пример 2) равна  $n$ . Поэтому условие (11) из [2] для этого пространства не выполнено, и, значит, к нему не применимы имеющиеся там теоремы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Теоремы 1–3 легко переносятся на лакунарные тригонометрические ряды с помощью результатов [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
2. Rodin V. A., Semenov E. M. Analysis Math., **1**, No. 3, 207–222 (1975).
3. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. Мир, М., 1980.
4. Wallsten R. Lect. Notes Math., Vol. 1302, 410–419 (1988).
5. Родин В. А., Семенов Е. М. Функциональный анализ и его прил., **13**, вып. 2, 91–92 (1979).
6. Montgomery-Smith S. Proc. Am. Math. Soc., **109**, No. 2, 517–522 (1990).
7. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Мир, М., 1980.
8. Calton N. J. Calderon couples of rearrangement invariant spaces. Preprint, 1993.
9. Jakubowski J., Kwapien S. Bull. Polish Acad. Sci. Math., **27**, No. 9, 689–694 (1979).

Самарский госуниверситет  
e-mail: astashkn@ssu.samara.emnet.ru

Поступило в редакцию  
7 октября 1996 г.

УДК 517.515

## Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связанного с операторами обобщенного сдвига\*

© 1998. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

Пуассонов бесконечномерный анализ, т. е. аналог классического анализа белого шума в том случае, когда мера, задающая спаривание, является не гауссовой, а пуассоновой, был построен и изучался в ряде работ [1–3]. В [4, 5] автор предложил общую схему построения бесконечномерного анализа, осно-

\* Работа частично поддержана ДФФД Украины, грант 1.4/62.