

Операторы слабого типа и устойчивость вещественного метода интерполяции в симметричных пространствах

С.В. Асташкин

Аннотация

В работе получены новые соотношения, связанные с устойчивостью функторов вещественного метода интерполяции в классе симметричных пространств. В отличие от имеющихся результатов этого типа они, вообще говоря, не являются следствием общих реитерационных теорем. Основной элемент доказательств – доказанный в статье критерий слабой интерполяционности пространств Лоренца.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функций называется симметричным (СП), если из неравенства $x^*(t) \leq y^*(t)$ ($t \in [0, 1]$) для убывающих перестановок модулей функций $x(t)$ и $y(t)$ и того, что $y \in X$, следует: $x \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$.

Наряду с пространствами L_p ($1 \leq p \leq \infty$), важные примеры СП – пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$,

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t) d\varphi(t),$$

и пространство Марцинкевича $M(\varphi)$,

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup \left\{ \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t x^*(s) ds : 0 < t \leq 1 \right\}.$$

Здесь $\varphi(t)$ – неотрицательная возрастающая вогнутая на $[0, 1]$ функция, $\varphi(0) = 0$; множество таких функций в дальнейшем обозначаем через Φ .

Пространства Лоренца и Марцинкевича в некотором смысле экстремальны в классе СП. Напомним, что фундаментальная функция СП X определяется равенством $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$ ($t \in [0, 1]$), где $\chi_e(s)$ – характеристическая функция множества $e \subset [0, 1]$. Если $\varphi \in \Phi$, $\tilde{\varphi}(t) = t/\varphi(t)$, то $\varphi(t)$ – фундаментальная функция пространств $\Lambda(\varphi)$ и $M(\tilde{\varphi})$. Кроме того, если X – СП и $\varphi_X(t) = \varphi(t)$ ($t \in [0, 1]$), то

$$\Lambda(\varphi) \subset X \subset M(\tilde{\varphi}), \tag{1}$$

причем

$$\|x\|_{M(\tilde{\varphi})} \leq \|x\|_X \leq \|x\|_{\Lambda(\varphi)} \tag{2}$$

для всех $x \in \Lambda(\varphi)$ [1, с.160-162].

Пусть $\varphi, \psi \in \Phi$. Будем говорить, что линейный оператор T , определенный на пространстве $\Lambda(\varphi)$, имеет слабый (φ, ψ) – тип, если существует $C > 0$, такое, что для всех $x \in \Lambda(\varphi)$ и $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$(Tx)^*(t)\psi(t) \leq C\|x\|_{\Lambda(\varphi)}.$$

Ввиду соотношений (1) и (2), а также того, что $y^*(t) \leq 1/t \int_0^t y^*(s)ds$, любой линейный оператор, ограниченный из СП X в СП Y , имеет слабый (φ_X, φ_Y) -тип.

Предположим, что $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ – функции из класса Φ и СП $X \subset \Lambda(\varphi_0) + \Lambda(\varphi_1)$. Пара СП (X, Y) называется слабой интерполяционной парой относительно сегмента $[(\varphi_0, \psi_0), (\varphi_1, \psi_1)]$, если любой линейный оператор, имеющий одновременно слабый (φ_0, ψ_0) - и (φ_1, ψ_1) -тип, ограничен из X в Y . В случае $\varphi_0 = \psi_0, \varphi_1 = \psi_1$ и $X = Y$ пространство X будем называть просто слабо (φ_0, φ_1) -интерполяционным.

Понятие интерполяции слабого типа возникло в связи со знаменитой интерполяционной теоремой Марцинкевича и явилось предметом изучения в многочисленных работах (упомянем здесь лишь о статьях [2 – 4]; первая из них носит основополагающий характер, в двух остальных, наряду с важными результатами, можно найти подробную библиографию). Основная цель этих работ — получение достаточных условий для того, чтобы пара СП (X, Y) была слабой интерполяционной относительно данного сегмента $[(\varphi_0, \psi_0), (\varphi_1, \psi_1)]$. Условия формулируются, как правило, в виде неравенств для индексов Бойда СП X, Y и показателей растяжения функций $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$, не являясь в общем случае необходимыми даже в случае, если $\varphi_0 = \psi_0, \varphi_1 = \psi_1, X = Y$ (см., например, [4, р.36-37]).

В первой части данной работы показано, что такие необходимые и достаточные условия можно получить, если ограничиться рассмотрением класса пространств Лоренца. Они связаны с вычислением показателей растяжения некоторых функций, построенных по φ_0, φ_1 и фундаментальной функции ψ пространства Лоренца. Одновременно найдена степень "зазора" между функциями φ_0 и φ_1 , при которой существуют слабо (φ_0, φ_1) -интерполяционные пространства Лоренца.

Во второй части рассматриваются приложения полученных результатов к изучению свойства устойчивости вещественного метода интерполяции. Ограничиваясь пока только классическим случаем, напомним некоторые определения и результаты.

Если (X_0, X_1) – банахова пара пространств, то на их сумме $X_0 + X_1$ для $t > 0$ определен $\mathcal{K}$ -функционал Петре

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}.$$

Пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$) с нормой

$$\|x\|_{\theta, p} = \left\{ \int_0^\infty (\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) t^{-\theta})^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p}$$

(с естественной модификацией при $p = \infty$) называются пространствами вещественного метода интерполяции.

Одним из важнейших результатов в теории интерполяции является так называемая теорема реитерации (см., например, [5, с.68]): если $0 < \theta_0 \neq \theta_1, \alpha < 1, 1 \leq p_0, p_1, q \leq \infty$, то с точностью до эквивалентности

$$((X_0, X_1)_{\theta_0, p_0}, (X_0, X_1)_{\theta_1, p_1})_{\alpha, q} = (X_0, X_1)_{(1-\alpha)\theta_0 + \alpha\theta_1, q} \quad (3)$$

Равенство (3) говорит об определенной устойчивости вещественного метода: с точностью до эквивалентности пространство в его правой части не зависит от

чисел p_0, p_1 . Более общие теоремы об устойчивости вещественного метода можно найти в [6 – 8].

В случае СП вопросы устойчивости интерполяционных методов тесно связаны с их значениями на парах пространств Лоренца и Марцинкевича. Хорошо известно [5, с.142], что

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,1} = \Lambda(\varphi_{1-\theta}) \quad (4)$$

и

$$(L_1, L_\infty)_{\theta,\infty} = M(\varphi_\theta), \quad (5)$$

где $\varphi_\theta(s) = s^\theta$ ($0 < \theta < 1$). Поэтому равенство (3) с учетом соотношений (1) и (2) приводит к следующему результату. Если $0 < \theta_0 \neq \theta_1 < 1$, $\varphi_{X_i} = \varphi_{\theta_i}$ ($i = 0, 1$), $0 < \alpha < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, то пространство

$$(X_0, X_1)_{\alpha,q} \quad (6)$$

не зависит (с точностью до эквивалентности) от СП X_0 и X_1 .

В этой работе будут найдены условия независимости пространства (6) от X_0 и X_1 для произвольных фундаментальных функций φ_{X_i} ($i = 0, 1$) этих пространств, таких, что отношение $\varphi_{X_1}/\varphi_{X_0}$ возрастает.

Показано, что при определенных предположениях эти условия точны, а также то, что наличие устойчивости не всегда является следствием реитерационных соотношений типа (3).

Другое применение результатов о слабой интерполяции относится к изучению операторов, ограниченных в СП, фундаментальная функция которого имеет тривиальный показатель растяжения.

Для неотрицательной функции $\varphi(s)$ ($0 \leq s \leq 1$) определим функцию растяжения

$$\mathcal{M}_\varphi(t) = \sup \left\{ \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)} : 0 < s \leq \min(1, 1/t) \right\} \quad (t > 0).$$

Как известно [1, с.76], существуют числа

$$\gamma_\varphi = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln \mathcal{M}_\varphi(t)}{\ln t}, \quad \delta_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_\varphi(t)}{\ln t},$$

называемые нижним и верхним показателями растяжения функции φ . Легко проверить, что для $\varphi \in \Phi$ $0 \leq \gamma_\varphi \leq \delta_\varphi \leq 1$.

В работе будет показано, что линейный оператор T , ограниченный в L_p для всех $p \in (1, \infty)$, а также в некотором СП X , таком, что $\gamma_{\varphi_X} = 0$, $\delta_{\varphi_X} < 1$, одновременно ограничен в некоторых пространствах Лоренца $\Lambda(\psi)$ и Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$, где $\gamma_\psi = 0$. Аналогичный результат справедлив и в двойственной ситуации: $\delta_{\varphi_X} = 1$, $\gamma_{\varphi_X} > 0$.

Две неотрицательные функции $f(t)$ и $g(t)$ будем называть эквивалентными на $[0, 1]$ (пишем: $f \sim g$), если для некоторых $C_1, C_2 > 0$ и всех $t \in [0, 1]$

$$C_1 f(t) \leq g(t) \leq C_2 f(t).$$

Через Φ_0 будет обозначаться множество всех строго возрастающих функций $\varphi \in \Phi$, для которых дополнительно выполнено: $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Так как любая $\varphi \in \Phi_0$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $[0, 1]$ на $[0, 1]$, то существует обратная функция φ^{-1} , являющаяся непрерывной и выпуклой. Заметим, что с точностью до эквивалентности Φ_0 "меньше" Φ только на одну функцию $\varphi(t) \equiv 1$.

1. СЛАБО ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА И МАРЦИНКЕВИЧА.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_0, \varphi_1, \psi \in \Phi_0$, причем отношение φ_1/φ_0 монотонно возрастает. Для того, чтобы пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ было слабо (φ_0, φ_1) -интерполяционно, необходимо и достаточно, чтобы $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$.

Для доказательства теоремы понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Если $\varphi_0, \varphi_1, \psi \in \Phi_0$ и φ_1/φ_0 возрастает, то следующие утверждения эквивалентны:

1) существует $C > 0$, такое, что для всех $s, t \in (0, 1]$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(s)} \leq C \max \left(\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)}, \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)} \right);$$

2) для некоторой $\rho \in \Phi$, $\psi \sim \varphi_\rho$, где функция $\varphi_\rho(t) = \varphi_0(t) \rho(\varphi_1(t)/\varphi_0(t))$.

Доказательство. Пусть сначала выполнено 1). Функция

$$\rho(t) = \inf_{0 < s \leq 1} \psi(s) \left[\frac{1}{\varphi_0(s)} + \frac{t}{\varphi_1(s)} \right] \quad (0 < t \leq 1), \quad \rho(0) = 0,$$

как точная нижняя грань линейных функций, принадлежит классу Φ . Из представления

$$\varphi_\rho(t) = \inf_{0 < s \leq 1} \psi(s) \left[\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)} + \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)} \right]$$

следует, что $\varphi_\rho(t) \leq 2\psi(t)$ ($0 < t \leq 1$). С другой стороны, по условию,

$$\psi(s) \left(\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)} + \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)} \right) \geq \psi(s) \max \left(\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)}, \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)} \right) \geq C^{-1} \psi(t).$$

Поэтому, переходя к нижней грани по $s \in (0, 1]$, получаем: $\psi(t) \leq C\varphi_\rho(t)$ ($0 < t \leq 1$). Так как $\psi(0) = \varphi_\rho(0) = 0$, то в итоге: $\psi \sim \varphi_\rho$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что

$$C_1 \varphi_\rho(t) \leq \psi(t) \leq C_2 \varphi_\rho(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Ввиду того, что $\rho \in \Phi$ и φ_1/φ_0 возрастает, для $t \leq s$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(s)} \leq \frac{C_2 \varphi_\rho(t)}{C_1 \varphi_\rho(s)} \leq \frac{C_2}{C_1} \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)}.$$

В то же время, функция $\rho(t)/t$ [1, с.68] убывает, следовательно, при $t > s$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(s)} \leq \frac{C_2 \varphi_\rho(t)}{C_1 \varphi_\rho(s)} \leq \frac{C_2}{C_1} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)},$$

и утверждение 1) справедливо с константой $C = C_2/C_1$.

Лемма 2. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ неотрицательны, $f(t)$ убывает, а $g(t)$ возрастает на $[0, 1]$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\delta_f < 0$, если и только, если для некоторого $A > 0$

$$\int_t^1 f(u) du/u \leq A f(t) \quad (7)$$

2) $\gamma_g > 0$, если и только, если для некоторого $B > 0$

$$\int_0^t g(u) du/u \leq B g(t) \quad (8)$$

Доказательство. 1) Предположив сначала, что $\delta_f < 0$, обозначим для произвольного $t \in (0, 1)$ через j_0 минимальное среди $j \in \mathcal{N}$, для которых $2^j t \geq 1$. Пусть $t_j = 2^j t$ ($0 \leq j < j_0$), $t_{j_0} = 1$. Так как f убывает, то

$$\int_t^1 f(u) du/u = \sum_{j=1}^{j_0} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(u) du/u \leq \ln 2 \sum_{j=1}^{j_0} f(2^{j-1}t) \leq \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_f(2^j) f(t),$$

и по определению δ_f [1, с.76],

$$A = \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_f(2^j) \leq C \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\delta_f/2} < \infty.$$

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $\delta_f \geq 0$. Тогда $\mathcal{M}_f(s) \geq 1$ ($s \geq 1$) и для каждого $s \geq 1$ существует $t \in (0, 1)$, такое, что $st \leq 1$ и

$$f(st) \geq 1/2 f(t).$$

Так как f убывает, то при $u \in (t, st)$ $f(u) \geq 1/2 f(t)$. Следовательно,

$$\int_t^1 f(u) du/u \geq \int_t^{st} f(u) du/u \geq 1/2 \ln s f(t),$$

и ввиду произвольности $s \geq 1$ неравенство (7) не выполнено ни при каком $A > 0$.

2) Если $\gamma_g > 0$, то, так как g возрастает, то

$$\int_0^t g(u) du/u = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}t}^{2^{-j}t} g(u) du/u \leq \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} g(2^{-j}t) \leq \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_g(2^{-j}) g(t),$$

причем, по определению γ_g [1, с.76],

$$B = \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_g(2^{-j}) \leq C_2 \ln 2 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma_g j/2} < \infty.$$

Докажем обратное. Если $\gamma_g \leq 0$, то $\mathcal{M}_g(s) \geq 1$ ($s \leq 1$) и для каждого $s \leq 1$ существует $t \in (0, 1)$, такое, что $g(st) \geq 1/2 g(t)$. Так как g возрастает, то для $u \in (st, t)$ $g(u) \geq 1/2 g(t)$. Следовательно,

$$\int_0^t g(u) du/u \geq \int_{st}^t g(u) du/u \geq 1/2 \ln(1/s) g(t),$$

и неравенство (8) не может быть выполнено ни при каком $B > 0$.

Лемма 3. Если $\varphi_0, \varphi_1, \psi \in \Phi_0$, $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$, то для некоторого $C > 0$ и всех $0 < s, t \leq 1$ выполнено неравенство

$$\frac{\psi(t)}{\psi(s)} \leq C \max \left(\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)}, \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)} \right).$$

Доказательство. Так как $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$, то существует $C_1 > 0$, такое, что для всех $0 < u \leq 1$, $1 \leq v \leq 1/u$

$$\varphi_0(\psi^{-1}(uv)) \leq C_1 \varphi_0(\psi^{-1}(u)) v.$$

Обозначим $s = \psi^{-1}(uv)$, $t = \psi^{-1}(u)$. Тогда из предыдущего неравенства для произвольных $0 < t \leq s \leq 1$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(s)} \leq C_1 \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_0(s)}.$$

Аналогично из условия $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$ получаем:

$$\varphi_1(\psi^{-1}(uv)) \leq C_2 \varphi_1(\psi^{-1}(u)) v,$$

где $C_2 > 0$ не зависит от $0 < u \leq 1$, $0 < v \leq 1$. Делая ту же замену, что и в первом случае, для $0 < s \leq t \leq 1$ имеем

$$\frac{\psi(t)}{\psi(s)} \leq C_2 \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_1(s)}.$$

В итоге нужное неравенство выполнено для $C = \max(C_1, C_2)$.

Доказательство теоремы 1. Заметим, прежде всего, что ввиду теоремы 4.7 из [9] слабая (φ_0, φ_1) -интерполяционность СП X эквивалентна ограниченности в этом пространстве оператора Кальдерона

$$Sx(t) = \int_0^1 x(s) d \left\{ \min_{i=0,1} [\varphi_i(s)/\varphi_i(t)] \right\}.$$

Так как под дифференциалом стоит вогнутая функция, производная которой существует почти всюду и убывает, то ввиду хорошо известного неравенства Харди и Литтльвуда (см., например, [1, с.94])

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq \int_0^1 f^*(t)g^*(t) dt$$

имеем:

$$|Sx(t)| \leq Sx^*(t). \quad (9)$$

Кроме того, отношение φ_1/φ_0 возрастает, и поэтому $S = P + Q$, где

$$Px(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)} \int_0^t x(s) d\varphi_1(s), \quad Qx(t) = \frac{1}{\varphi_0(t)} \int_t^1 x(s) d\varphi_0(s).$$

Ограниченность выпуклых функционалов, определенных на пространстве Лоренца, эквивалентна их ограниченности на множестве характеристических

функций [1,с.151]. Поэтому ввиду (9) операторы P и Q ограничены в $\Lambda(\psi)$ тогда и только тогда, когда для некоторых $C_1 > 0, C_2 > 0$ и всех $0 < u \leq 1$

$$\|Q\chi_{(0,u)}\|_{\Lambda(\psi)} \leq C_1\psi(u) \quad (10)$$

и

$$\|P\chi_{(0,u)}\|_{\Lambda(\psi)} \leq C_2\psi(u) \quad (11)$$

Так как

$$Q\chi_{(0,u)}(t) = \left(\frac{\varphi_0(u)}{\varphi_0(t)} - 1 \right) \chi_{(0,u)}(t),$$

то, по определению нормы в $\Lambda(\psi)$,

$$\|Q\chi_{(0,u)}\|_{\Lambda(\psi)} = \varphi_0(u) \int_0^u \frac{d\psi(t)}{\varphi_0(t)} - \psi(u).$$

Следовательно, неравенство (10) эквивалентно, в свою очередь, тому, что для $0 < u \leq 1$

$$\int_0^1 \frac{d\psi(t)}{\varphi_0(t)} \leq (C_1 + 1) \frac{\psi(u)}{\varphi_0(u)} \quad (10')$$

Аналогично

$$P\chi_{(0,u)}(t) = \chi_{(0,u)}(t) + \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_1(t)} \chi_{(u,1)}(t),$$

$$\|P\chi_{(0,u)}\|_{\Lambda(\psi)} = \psi(u) + \varphi_1(u) \int_u^1 \frac{d\psi(t)}{\varphi_1(t)},$$

и неравенство (11) эквивалентно неравенству

$$\int_u^1 \frac{d\psi(t)}{\varphi_1(t)} \leq (C_2 - 1) \frac{\psi(u)}{\varphi_1(u)} \quad (11')$$

Пусть сначала $\Lambda(\psi)$ слабо (φ_0, φ_1) -интерполяционно. Тогда нетрудно показать (см., например, [3,р.44]), что выполнено утверждение 1) леммы 1. Следовательно, по этой лемме для некоторой функции $\rho \in \Phi$ $\psi \sim \varphi_\rho = \varphi_0\rho(\varphi_1/\varphi_0)$. Не ограничивая общности, можно просто считать, что $\psi = \varphi_\rho$.

Так как $\Lambda(\psi)$ слабо (φ_0, φ_1) -интерполяционно, выполнены неравенства (10') и (11'). После замены $s = \psi(t)$ с учетом того, что $\psi(1) = 1$, они переходят соответственно в неравенства:

$$\int_0^{\psi(u)} g(s) \frac{ds}{s} \leq (C_1 + 1) \frac{\psi(u)}{\varphi_0(u)} \quad (10'')$$

и

$$\int_{\psi(u)}^1 f(s) \frac{ds}{s} \leq (C_2 - 1) \frac{\psi(u)}{\varphi_1(u)}, \quad (11'')$$

где $g(s) = s/\varphi_0(\psi^{-1}(s))$, $f(s) = s/\varphi_1(\psi^{-1}(s))$. Так как $\psi \in \Phi_0$, φ_1/φ_0 возрастает, то функции $\psi/\varphi_1 = \varphi_0/\varphi_1\rho(\varphi_1/\varphi_0)$ и $\psi/\varphi_0 = \rho(\varphi_1/\varphi_0)$ являются соответственно убывающей и возрастающей. Поэтому f убывает, а g возрастает, и по лемме 2 неравенства (10'') и (11'') эквивалентны тому, что $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$.

Если, наоборот, $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$, то ввиду лемм 3 и 1 опять можно считать, что $\psi = \varphi_\rho$ для некоторой $\rho \in \Phi$, а леммы 2 – выполнены неравенства (10') и (11') или эквивалентные им (10), (11). Как уже говорилось в

начале доказательства, отсюда вытекает слабая (φ_0, φ_1) – интерполяционность пространства $\Lambda(\psi)$.

Следствие 1. Пусть $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi_0$. Для того, чтобы существовало слабо (φ_0, φ_1) – интерполяционное пространство Лоренца необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$.

Доказательство. Предположим сначала, что существует слабо (φ_0, φ_1) – интерполяционное пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 1, можно считать, что $\psi = \varphi_\rho = \varphi_0 \rho(\varphi_1/\varphi_0)$, $\rho \in \Phi$.

Представим:

$$\psi(\varphi_0^{-1}(t)) = t\rho(\varphi_1(\varphi_0^{-1}(t))/t), \quad \varphi_1(\varphi_0^{-1}(t)) = t\rho^{-1}(\psi(\varphi_0^{-1}(t))/t).$$

Так как по теореме 1 $\gamma_{\psi(\varphi_0^{-1})} > 1$, то для некоторых $C > 0$ и $a > 0$

$$\psi(\varphi_0^{-1}(st)) \leq Ct^{1+a}\psi(\varphi_0^{-1}(s)) \quad (0 < s, t \leq 1).$$

Поэтому ввиду выпуклости ρ^{-1} для достаточно малых $t > 0$

$$\varphi_1(\varphi_0^{-1}(st)) \leq st\rho^{-1}(Ct^a\psi(\varphi_0^{-1}(s))/s) \leq Ct^{1+a}\varphi_1(\varphi_0^{-1}(s)),$$

откуда $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$.

Пусть, наоборот, $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$. Для $\theta \in (0, 1)$ введем функцию $\varphi_\theta(t) = \varphi_0^{1-\theta}(t)\varphi_1^\theta(t)$. Так как $\varphi_\theta(\varphi_0^{-1}(t)) = t^{1-\theta}(\varphi_1(\varphi_0^{-1}(t)))^\theta$, то

$$\gamma_{\varphi_\theta(\varphi_0^{-1})} = 1 - \theta + \theta\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$$

или эквивалентно: $\delta_{\varphi_0(\varphi_\theta^{-1})} < 1$. Аналогично $\gamma_{\varphi_1(\varphi_\theta^{-1})} > 1$. Следовательно, выполнены условия теоремы 1, и $\Lambda(\psi)$ слабо (φ_0, φ_1) – интерполяционно.

Теорема 2. Если $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$, то пространство Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$ слабо (φ_0, φ_1) – интерполяционно.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 4. Если $\varphi, \psi \in \Phi_0$ и $\delta_{\varphi(\psi^{-1})} < 1$, то $\delta_\varphi < 1$.

Доказательство. По условию для некоторых $a > 0$ и $C > 0$ и всех $t > 0$, $0 < s \leq 1/t$ выполнено неравенство:

$$\varphi(\psi^{-1}(st)) \leq Ct^{1-a}\varphi(\psi^{-1}(s)) \quad (12)$$

Если $\psi^{-1}(1/t) < u \leq 1/t$, то, применяя (12) для $s = 1/t$, получим:

$$\varphi(ut) \leq 1 \leq Ct^{1-a}\varphi(\psi^{-1}(1/t)) \leq Ct^{1-a}\varphi(u).$$

Так как функция ψ^{-1} выпуклая, то последнее неравенство выполнено и для $0 < u \leq \psi^{-1}(1/t)$ (достаточно в (12) взять $s \leq 1/t$, такое, что $u = \psi^{-1}(s)$). Следовательно, $\delta_\varphi < 1$.

Доказательство теоремы 2. Так как функции $\varphi_1(\psi^{-1})$ и $\psi(\varphi_1^{-1})$ – взаимно обратные, то неравенства $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$ и $\delta_{\psi(\varphi_1^{-1})} < 1$ эквивалентны. Значит, по лемме 4 $\delta_\psi < 1$ и ввиду [1, с.156]

$$\|x\|_{M(\tilde{\psi})} \sim \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t)\psi(t). \quad (13)$$

Поэтому операторы P и Q из доказательства теоремы 1 (см. неравенство (9)) достаточно рассмотреть на "максимальной по перестановке" функции этого пространства — функции $1/\psi(t)$. Таким образом, ограниченность этих операторов в пространстве $M(\tilde{\psi})$ эквивалентна выполнению двух неравенств:

$$\int_u^1 \frac{d\varphi_0(t)}{\psi(t)} \leq C_1 \frac{\varphi_0(u)}{\psi(u)}$$

и

$$\int_0^u \frac{d\varphi_1(t)}{\psi(t)} \leq C_2 \frac{\varphi_1(u)}{\psi(u)},$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от $0 < u \leq 1$. После замен переменных $s = \varphi_0(t)$ в первом и $s = \varphi_1(t)$ во втором интеграле приходим к неравенствам:

$$\int_{\varphi_0(u)}^1 f(s) \frac{ds}{s} \leq C_1 \frac{\varphi_0(u)}{\psi(u)} \quad (14)$$

и

$$\int_0^{\varphi_1(u)} g(s) \frac{ds}{s} \leq C_2 \frac{\varphi_1(u)}{\psi(u)}, \quad (15)$$

где $f(s) = s/\psi(\varphi_0^{-1}(s))$, $g(s) = s/\psi(\varphi_1^{-1}(s))$. Ввиду лемм 3 и 1 можно считать, что $\psi = \varphi_\rho$, где $\rho \in \Phi$. Поэтому f убывает, а g возрастает. Следовательно, по лемме 2 неравенства (14) и (15) выполнены тогда и только тогда, когда $\gamma_{\psi(\varphi_0^{-1})} > 1$ и $\delta_{\psi(\varphi_1^{-1})} < 1$ или $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$

Из доказательства теоремы 2 сразу получаем

Следствие 2. Если $\varphi_0, \varphi_1, \psi \in \Phi_0$ и $\delta_\psi < 1$, то пространство Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$ слабо (φ_0, φ_1) –интерполяционно тогда и только тогда, когда $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКТОРОВ ВЕЩЕСТВЕННОГО МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ.

Напомним некоторые определения теории интерполяции операторов (подробнее см. [5] или [6]).

Тройка банаховых пространств (X_0, X_1, X) называется интерполяционной относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , если ограниченность линейного оператора T из X_i в Y_i ($i = 0, 1$) влечет его ограниченность из X в Y (в случае $X_0 = Y_0, X_1 = Y_1, X = Y$ пространство X называют интерполяционным относительно пары (X_0, X_1)).

Под интерполяционным функтором (ИФ) понимается функтор F , действующий из категории банаховых пар в категорию банаховых пространств так, что для произвольных пар (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) тройка $(X_0, X_1, F(X_0, X_1))$ интерполяционна относительно тройки $(Y_0, Y_1, F(Y_0, Y_1))$. Пусть $s\mathcal{R}$ ($s > 0$) — одномерное пространство $\mathcal{R}$ с нормой $\|x\|_{s\mathcal{R}} = s\|x\|$ ($s > 0$). Тогда для произвольного ИФ F $F(\mathcal{R}, s\mathcal{R}) = \psi(s)\mathcal{R}$, где функция $\psi(s)$ называется характеристической функцией ИФ F . При этом $\psi(s) \geq 0$, $\psi(s)$ возрастает, а $\psi(s)/s$ убывает при $s > 0$. В частности, характеристическая функция функтора $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$) равна t^θ . Далее нам понадобится более общий класс ИФ, называемый вещественным методом интерполяции (мы воспользуемся дискретным вариантом определения).

Пусть E – идеальная структура (ИС) [1, с.59] двусторонних числовых последовательностей $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$. Если (X_0, X_1) – банахова пара, то пространство $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ – это множество всех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна

$$\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^j, x; X_0, X_1))_j\|_E,$$

пространство $\mathcal{J}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ – множество всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j$, где $u_j \in X_0 \cap X_1$. Норма в $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ равна $\inf \|(\mathcal{J}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E$ по всем таким представлениям, где

$$\mathcal{J}(t, x; X_0, X_1) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\} -$$

$\mathcal{J}$ -функционал Петре, определенный для $x \in X_0 \cap X_1$.

Для ИС G и функции $f \geq 0$, определенной на полуоси $(0, \infty)$, через $G(f)$ будем обозначать пространство с "весом", норма в котором: $\|(a_j)\| = \|(a_j f(2^j))\|_G$. Если $l_{\infty}(\max(1, 1/t)) \subset E \subset l_1(\min(1, 1/t))$, то отображения $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ и $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ являются ИФ, играющими важную роль в теории интерполяции [5, 6].

В частности,

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{l_p(t-\theta)}^{\mathcal{K}} = (X_0, X_1)_{l_p(t-\theta)}^{\mathcal{J}} \quad (0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty).$$

Из определения функторов, а также равенства $\mathcal{K}(t, x; L_1, L_{\infty}) = \int_0^t x^*(s) ds$ [1, с.108] нетрудно получить следующие обобщения соотношений (4) и (5):

$$(L_1, L_{\infty})_{l_{\infty}(1/\varphi)}^{\mathcal{K}} = M(\varphi), \quad (L_1, L_{\infty})_{l_1(1/\tilde{\varphi})}^{\mathcal{J}} = \Lambda(\varphi) \quad (16)$$

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \rho \in \Phi$, φ_1/φ_0 возрастает, $\psi = \varphi_0 \rho(\varphi_1/\varphi_0)$. Хорошо известно [10, р.428, 438] (см. также [11, следствие 3] и теоремы реитерации в [12]), что

$$(M(\varphi_0), M(\varphi_1))_{l_{\infty}(1/\rho)}^{\mathcal{K}} = M(\varphi_{\rho}) \quad (17)$$

и

$$(\Lambda(\tilde{\varphi}_0), \Lambda(\tilde{\varphi}_1))_{l_1(1/\rho)}^{\mathcal{J}} = \Lambda(\tilde{\varphi}_{\rho}) \quad (18)$$

Пусть $\varphi, \psi \in \Phi$. Говорят, что линейный оператор T , определенный на пространстве Лоренца $\Lambda(\varphi)$, имеет ослабленный (φ, ψ) -тип, если T ограничен из $\Lambda(\varphi)$ в пространство Марцинкевича $M(\tilde{\psi})$. Из соотношений (1) и (2) следует, что оператор, ограниченно действующий из СП X в СП Y , имеет ослабленный (φ_X, φ_Y) -тип; если же он имеет ослабленный (φ, ψ) -тип, то имеет такой же слабый тип.

Предположим, что $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \in \Phi$ и СП $X \subset \Lambda(\varphi_0) + \Lambda(\varphi_1)$. Пара СП (X, Y) называется интерполяционной парой ослабленного типа относительно сегмента $[(\varphi_0, \psi_0), (\varphi_1, \psi_1)]$, если любой линейный оператор, имеющий одновременно ослабленный (φ_0, ψ_0) - и (φ_1, ψ_1) -тип, ограничен из X в Y . В случае $\varphi_0 = \psi_0, \varphi_1 = \psi_1, X = Y$ пространство X будем называть ослабленно (φ_0, φ_1) -интерполяционным.

Из определений и предыдущих замечаний сразу следует, что слабо интерполяционное пространство является и ослабленно интерполяционным того же типа, а пространство, ослабленно (φ_0, φ_1) -интерполяционное, интерполяционно относительно любой пары СП (X_0, X_1) , если только $\varphi_{X_i} = \varphi_i$ ($i = 0, 1$).

Теорема 3. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \psi \in \Phi_0$, φ_1/φ_0 возрастает и выполнено хотя бы одно из условий:

- 1) $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$, $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$;
- 2) $\delta_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{\psi}^{-1})} < 1$, $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\psi}^{-1})} > 1$.

Тогда пространства $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$ ослабленно (φ_0, φ_1) -интерполяционны. Более того, функция ψ эквивалентна функции $\varphi_\rho = \varphi_0\rho(\varphi_1/\varphi_0)$ при некоторой $\rho \in \Phi$, и

$$(M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}} = (\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}} = M(\tilde{\psi}), \quad (19)$$

$$(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{l_1(\rho(1/t))}^{\mathcal{J}} = (M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{l_1(\rho(1/t))}^{\mathcal{J}} = \Lambda(\psi). \quad (20)$$

Доказательство. Докажем соотношение (19). Прежде всего, так как $\mathcal{K}(t, x; X_1, X_0) = t\mathcal{K}(t^{-1}, x; X_0, X_1)$, то используя (17), получим:

$$(M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}} = (M(\tilde{\varphi}_1), M(\tilde{\varphi}_0))_{l_\infty(1/\tilde{\rho})}^{\mathcal{K}} = M(\tilde{\varphi}_1\tilde{\rho}(\tilde{\varphi}_0/\tilde{\varphi}_1)) = M(\tilde{\varphi}_\rho).$$

Предположим сначала, что выполнено условие 1). Тогда ввиду лемм 1 и 3, как и ранее, заключаем, что $\psi \sim \varphi_\rho = \varphi_0\rho(\varphi_1/\varphi_0)$ при некоторой $\rho \in \Phi$. Поэтому

$$(M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}} = M(\tilde{\psi}). \quad (21)$$

Кроме того, по теореме 2 $M(\tilde{\psi})$ слабо (φ_0, φ_1) -интерполяционно и, значит, тем более, интерполяционно относительно пары $(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))$. Но любое пространство, интерполяционное относительно банаховой пары, является знанием некоторого ИФ на ней (см.[13] или [1,с.56]), т.е. для некоторого F

$$F(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1)) = M(\tilde{\psi}). \quad (22)$$

Из этого равенства, в частности, следует, что характеристическая функция ИФ F эквивалентна функции $\rho(t)$. Так как ИФ $(\cdot, \cdot)_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}}$ максимален среди функторов с такой характеристической функцией [10], то из равенств (21),(22) и вложения (1) получаем:

$$(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}} = M(\tilde{\psi}),$$

и (19) в этом случае доказано.

Если выполнено условие 2) теоремы, то рассматривая тройку функций $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}$, точно так же с помощью лемм 1 и 3 можно доказать, что $\psi \sim \varphi_\rho$, где $\rho \in \Phi$, и затем равенство (21). Кроме того, справедливо равенство (18). По теореме 1, примененной к тройке функций $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}$, пространство $\Lambda(\tilde{\psi})$ слабо $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_0)$ -интерполяционно, и значит, как и в первой части доказательства, для некоторого ИФ F

$$F(M(\varphi_0), M(\varphi_1)) = \Lambda(\tilde{\psi}),$$

откуда ввиду минимальности функтора $(\cdot, \cdot)_{l_1(1/\rho)}^{\mathcal{J}}$ [10], равенства (18) и вложения (1)

$$(M(\varphi_0), M(\varphi_1))_{l_1(1/\rho)}^{\mathcal{J}} = \Lambda(\tilde{\psi}).$$

Переходя к сепарабельным подпространствам $M^\circ(\varphi_i)$ пространств Марцинкевича $M(\varphi_i)$ ($i = 0, 1$) [1,с.156], ввиду монотонности ИФ получим:

$$(M^\circ(\varphi_0), M^\circ(\varphi_1))_{l_1(1/\rho)}^{\mathcal{J}} = \Lambda(\tilde{\psi}).$$

Так как $(\Lambda(\varphi))^* = M(\varphi)$ и $(M^\circ(\varphi))^* = \Lambda(\varphi)$ ($\varphi \in \Phi$), то по теореме двойственности для вещественного метода интерполяции (см., например, теорему 7 из [12]) из последнего равенства следует:

$$(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{l_\infty(\rho(1/t))}^{\mathcal{K}} = M(\tilde{\psi}),$$

В последнем соотношении использовано то, что ИС, двойственная к $l_1(1/\rho)$ относительно билинейной формы

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{-k}, \quad a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}, \quad b = (b_k)_{k=-\infty}^{\infty},$$

совпадает с ИС $l_\infty(\rho(1/t))$.

Тем самым (19) доказано. Равенство (20) доказывается с помощью аналогичных рассуждений.

Замечание 1. Условия 1) и 2) в теореме 3, вообще говоря, различны. Действительно, пусть

$$\varphi_0(t) = \ln^{-\alpha} e/t, \quad \varphi_1(t) = \ln^{-\beta} e/t, \quad \psi(t) = \ln^{-\gamma} e/t \quad (0 < \alpha < \gamma < \beta < 1).$$

Тогда

$$\psi^{-1}(t) = \exp(1 - t^{-1/\gamma}), \quad \varphi_0(\psi^{-1}(t)) = t^{\alpha/\gamma}, \quad \varphi_1(\psi^{-1}(t)) = t^{\beta/\gamma}.$$

Следовательно, $\delta_{\varphi_0(\psi^{-1})} < 1$ и $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$.

С другой стороны,

$$\tilde{\varphi}_0(t) = t \ln^{\alpha} e/t, \quad \tilde{\varphi}_1(t) = t \ln^{\beta} e/t, \quad \tilde{\psi}(t) = t \ln^{\gamma} e/t.$$

Нетрудно показать, что

$$\tilde{\psi}^{-1}(t) \sim t \ln^{-\gamma} e/t.$$

Следовательно,

$$\tilde{\varphi}_0(\tilde{\psi}^{-1}(t)) \sim t \ln^{\alpha-\gamma} e/t, \quad \tilde{\varphi}_1(\tilde{\psi}^{-1}(t)) \sim t \ln^{\beta-\gamma} e/t.$$

и $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\psi}^{-1})} = \delta_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{\psi}^{-1})} = 1$.

Таким образом, для тройки функций $\varphi_0, \varphi_1, \psi$ выполнено условие 1) и не выполнено условие 2) теоремы 3. Противоположная ситуация получается, если рассмотреть функции $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}$.

Замечание 2. Соотношения (19) и (20), вообще говоря, нельзя получить из равенств (16) с помощью реитерационных соображений (см. [10], [12] или теорему 4 из [7]). Дело в том, что пространство $l_\infty(1/\tilde{\psi})$ (параметр $M(\tilde{\psi})$ в представлении вида (16)) может даже быть не интерполяционным относительно пары $(l_1(1/\tilde{\varphi}_0), l_1(1/\tilde{\varphi}_1))$ (соответствующих параметров пространств Лоренца $\Lambda(\varphi_0)$ и $\Lambda(\varphi_1)$). Это следует из результатов работы [14], где, в частности, показано, что в случае $\gamma_{\varphi_1/\varphi_0} = 0$ пространство $G(1/\psi)$ (G – ИС, инвариантная относительно сдвига) интерполяционно относительно пары $(l_1(1/\varphi_0), l_1(1/\varphi_1))$ тогда и только тогда, когда $G = l_1$. В то же время, ситуация $\gamma_{\varphi_1/\varphi_0} = 0$ в теореме 3 вполне возможна (см. замечание 1). Неформально говоря, теорема 3 показывает, что "склейка" пар пространств Лоренца и Марцинкевича возможна при более слабых предположениях относительно фундаментальных функций этих пространств, чем "склейка" пар соответствующих весовых l_1 - и l_∞ - пространств.

Следствие 3. Пусть $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi_0$, φ_1/φ_0 возрастает, $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$. Если $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$ или $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_1^{-1})} > 1$, то

$$(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{\theta, p} = (M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{\theta, p} \quad (23)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_\theta(t) = \varphi_0^{1-\theta}(t)\varphi_1^\theta(t)$. Если $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$, то, как и в доказательстве следствия 1, легко показать, что $\delta_{\varphi_0(\varphi_\theta^{-1})} < 1$, $\gamma_{\varphi_1(\varphi_\theta^{-1})} > 1$. Если же $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_1^{-1})} > 1$, то ввиду равенства $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\varphi}_0^{1-\theta}(t)\tilde{\varphi}_1^\theta(t)$, точно так же получаем: $\delta_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{\varphi}_\theta^{-1})} < 1, \gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_\theta^{-1})} > 1$. Следовательно, для функции φ_θ выполнено хотя бы одно из условий 1), 2) теоремы 3. Так как в этом случае $\rho(t) = t^u$, то равенство (19) имеет вид:

$$(M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{u, \infty} = (\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{u, \infty} = M(\tilde{\psi})$$

для произвольного $0 < u < 1$.

Для данного $\theta \in (0, 1)$ найдем $u_0, u_1 \in (0, 1)$, $u_0 \neq u_1$, такие, что $\theta = (u_0 + u_1)/2$. Тогда в силу предыдущего равенства для u_0 и u_1 получим:

$$\begin{aligned} & ((\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{u_0, \infty}, (\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{u_1, \infty})_{1/2, p} = \\ & = ((M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{u_0, \infty}, (M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{u_1, \infty})_{1/2, p}. \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства теорему реитерации (3), приходим к соотношению (23).

Замечание 3. Приведенные в доказательстве следствия 3 рассуждения показывают, что если равенство (23) выполняется при всех $0 < \theta < 1$, и некотором $p_0 \in [1, \infty]$, то оно автоматически выполнено при всех $p \in [1, \infty]$.

Следствие 4. Пусть X_0 и X_1 – СП с фундаментальными функциями ψ_0 и ψ_1 соответственно, причем ψ_1/ψ_0 возрастает. Если $\gamma_{\psi_1(\psi_0^{-1})} > 1$ или $\gamma_{\tilde{\psi}_0(\tilde{\psi}_1^{-1})} > 1$, то существуют пространства Лоренца и пространства Марцинкевича, интерполяционные относительно пары (X_0, X_1) .

Доказательство. Пусть $\bar{\psi}_i(t)$ – наименьшая вогнутая мажоранта функции $\psi_i(t)$, $\varphi_i(t) = \bar{\psi}_i(t)/\psi_i(1)$ ($i = 0, 1$). Так как $\bar{\psi}_i \sim \psi_i$ [1, с.70] и ψ_1/ψ_0 возрастает, то отношение φ_1/φ_0 возрастает в обобщенном смысле, т.е. при некотором $C > 0$ и всех $0 < u \leq v \leq 1$

$$\frac{\varphi_1(u)}{\varphi_0(u)} \leq C \frac{\varphi_1(v)}{\varphi_0(v)}.$$

Заметим, что все предыдущие теоремы сохраняют справедливость при замене монотонности на монотонность в обобщенном смысле. Поэтому, если $\varphi_0(+0) = \varphi_1(+0) = 0$, то утверждение следствия вытекает из соотношений (1), (2) и теоремы 3 для $\rho(t) = t^\theta$ ($0 < \theta < 1$).

Если $\varphi_0(+0) > 0$, то ввиду условий $\varphi_1(+0) = 0$. В этом случае $X_0 = L_\infty$ и слабая (φ_0, φ_1) – интерполяционность СП X эквивалентна ограниченности в этом пространстве только одного оператора $Px(t) = 1/\varphi_1(t) \int_0^t x(s) d\varphi_1(s)$ (см. доказательство теоремы 1). Поэтому, как и в теоремах 1 и 3, можно показать, что при выполнении хотя бы одного из условий $\gamma_{\varphi_1(\psi^{-1})} > 1$ или $\delta_{\tilde{\varphi}_1(\tilde{\psi}^{-1})} < 1$ пространства $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$ ослабленно (φ_0, φ_1) – интерполяционны, а значит, и интерполяционны относительно пары (X_0, X_1) .

Пусть $\psi(t) = \varphi_0^{1-\theta}(t)\varphi_1^\theta(t)$ ($0 < \theta < 1$). Легко проверить, что при выполнении условий следствия либо одно, либо другое неравенство для показателей растяжения будет выполнено.

При определенных условиях утверждение следствия 4 является точным (см. также [8]).

Теорема 4. Пусть $\varphi_0, \varphi_1 \in \Phi_0$, φ_1/φ_0 возрастает, $\delta_{\varphi_0} < 1$.

Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$;
- 2) существует $p \in [1, \infty]$, такое, что для всех $0 < \theta < 1$ выполнено равенство:

$$(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{\theta, p} = (M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{\theta, p} \quad (24)$$

Доказательство. Ввиду следствия 3 и замечания 3 достаточно доказать лишь импликацию 2) $\Rightarrow$ 1) в случае $p = \infty$.

Как известно [1, с.164],

$$\mathcal{K}(t, x; \Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1)) = \int_0^1 x^*(s) d\{\min(\varphi_0(s), t\varphi_1(s))\}.$$

Поэтому

$$\|x\|_{(\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{\theta, \infty}} = \sup_{t>0} t^{-\theta} \int_0^1 x^*(s) d\{\min(\varphi_0(s), t\varphi_1(s))\} \quad (25)$$

Если $\psi(t) = \varphi_0^{1-\theta}(t)\varphi_1^\theta(t)$, то из условия $\delta_{\varphi_0} < 1$ следует: $\delta_\psi < 1$. Поэтому справедливо соотношение (13). Следовательно, ввиду равенства (24) при $p = \infty$ и того, что $(M(\tilde{\varphi}_0), M(\tilde{\varphi}_1))_{\theta, \infty} = M(\tilde{\psi})$, функция $1/\psi \in (\Lambda(\varphi_0), \Lambda(\varphi_1))_{\theta, \infty}$. Так как норма в этом пространстве определяется равенством (25), существует $C > 0$, такое, что для $t > 0$

$$\int_0^1 \frac{d\{\min(\varphi_0(s), t\varphi_1(s))\}}{\psi(s)} \leq C t^\theta. \quad (26)$$

Если предположить, что $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi_1(t)/\varphi_0(t) = a > 0$, то ввиду монотонности φ_1/φ_0 и того, что $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = 1$, будем иметь: $a\varphi_0(t) \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_0(t)$ ($t \in [0, 1]$). Поэтому из предыдущего неравенства при $t = 1/a$

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_0(s)}{\psi(s)} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_0(s)}{\psi(s)} \geq \int_0^1 \frac{d\varphi_0(s)}{\varphi_0(s)} = \int_0^1 \frac{dt}{t} = \infty.$$

Поэтому $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi_1(t)/\varphi_0(t) = 0$, и значит, для каждого $t \geq 1$ найдется $h = h(t) \in [0, 1]$, такое, что $\varphi_0(h(t)) = t\varphi_1(h(t))$. Тем самым, из (26) следует:

$$t \int_0^{h(t)} \frac{d\varphi_1(s)}{\psi(s)} + \int_{h(t)}^1 \frac{d\varphi_0(s)}{\psi(s)} \leq C t^\theta \quad (t \geq 1)$$

или после замены $u = h(t)$

$$\frac{\varphi_0(u)}{\varphi_1(u)} \int_0^u \frac{d\varphi_1(s)}{\psi(s)} + \int_u^1 \frac{d\varphi_0(s)}{\psi(s)} \leq C \left(\frac{\varphi_0(s)}{\varphi_1(s)} \right)^\theta \quad (27)$$

Так как

$$\int_0^u \frac{d\varphi_1(s)}{\psi(s)} = \int_0^{\varphi_1(u)} g(t) \frac{dt}{t},$$

где $g(t) = t/\psi(\varphi_1^{-1}(t))$ возрастает, а

$$\int_u^1 \frac{d\varphi_0(s)}{\psi(s)} = \int_{\varphi_0(u)}^1 f(t) \frac{dt}{t},$$

где $f(t) = t/\psi(\varphi_0^{-1}(t))$ убывает, то по лемме 2 получаем, что (27) выполнено тогда и только тогда, когда $\gamma_{\psi(\varphi_0^{-1})} > 1, \delta_{\psi(\varphi_1^{-1})} < 1$. Но из равенств:

$$\varphi_1(\varphi_0^{-1}(t)) = t^{(\theta-1)/\theta}(\psi(\varphi_0^{-1}(t)))^{1/\theta}, \quad \varphi_0(\varphi_1^{-1}(t)) = t^{\theta/(\theta-1)}(\psi(\varphi_1^{-1}(t)))^{1/(1-\theta)}$$

следует, что эти соотношения эквивалентны неравенству $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$. Теорема доказана.

Замечание 4. Из доказательства ясно, что в случае $p = \infty$ для выполнения соотношения (23) при всех $0 < \theta < 1$ достаточно, чтобы оно выполнялось хотя бы для одного $\theta_0 \in (0, 1)$.

Замечание 5. Утверждения теорем 4 и 5 остаются верными и для более общих функторов $(\cdot, \cdot)_{l_p(\rho(1/t))}^K$ $0 < \gamma_\rho \leq \delta_\rho < 1, 1 \leq p \leq \infty$. Доказательство при этом остается, по существу, тем же.

Разницу между условиями $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$ и $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_1^{-1})} > 1$ проясняет следующее

Предложение 1. Пусть $\varphi, \psi \in \Phi_0$ и ψ/φ возрастает. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\gamma_\psi > 0$ и $\delta_{\varphi(\psi^{-1})} < 1$;
- 2) $\gamma_{\psi/\varphi} > 0$.

Доказательство. Пусть сначала выполнено 1). По определению показателей растяжения $\delta_{\psi^{-1}} = 1/\gamma_\psi < \infty$, и значит, существуют $a > 0, C \geq 1$, такие, что для $t \in (0, 1]$ и $0 < s \leq t^a$

$$\psi^{-1}(st^{-a}) \leq Ct^{-1}\psi^{-1}(s).$$

Для любых $u \in [0, 1]$ и $t \in [0, 1]$ выберем $s \in [0, 1]$ так, что $u = Ct^{-1}\psi^{-1}(s)$. Так как ψ/φ возрастает и $\delta_{\varphi(\psi^{-1})} < 1$, то из предыдущего неравенства получим:

$$\varphi(u) \leq s^{-1}t^a\varphi(\psi^{-1}(st^{-a}))\psi(u) \leq C_1s^{-1}t^{ab}\varphi(\psi^{-1}(s))\psi(u),$$

где $C_1 > 0, b > 0$. Поэтому для всех $0 < u \leq 1$

$$\frac{\psi(C^{-1}tu)}{\varphi(C^{-1}tu)} \leq C_1t^{ab}\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}.$$

Так как $ab > 0, 0 < t \leq 1$, то отсюда следует: $\gamma_{\psi/\varphi} > 0$.

Докажем обратное. Если $\gamma_{\psi/\varphi} > 0$, то, прежде всего, существуют $C_2 > 0$ и $d > 0$, такие, что для $0 < u, v \leq 1$

$$\frac{\psi(uv)}{\psi(u)} \leq C_2 v^d \frac{\varphi(uv)}{\varphi(u)} \quad (28)$$

Из (28) и того, что $\varphi \in \Phi_0$, в частности, следует: $\gamma_\psi \geq d + \gamma_\varphi \geq d > 0$.

Далее, так как $\psi \in \Phi_0$, для $0 < s \leq t \leq 1$ $\psi^{-1}(s)/t \leq \psi^{-1}(s/t)$. Поэтому ввиду возрастания ψ/φ

$$ts^{-1}\varphi(\psi^{-1}(s/t)) \leq \frac{\varphi(\psi^{-1}(s)/t)}{\psi(\psi^{-1}(s)/t)}.$$

Применяя неравенство (28) при $u = \psi^{-1}(s)/t$, $v = t$, отсюда получим:

$$ts^{-1}\varphi(\psi^{-1}(s/t))t/s \leq C_2 t^d s^{-1}\varphi(\psi^{-1}(s)),$$

откуда

$$\frac{\varphi(\psi^{-1}(s/t))}{\varphi(\psi^{-1}(s))} \leq C_2 (1/t)^{1-d}.$$

Так как $d > 0$, то $\delta_{\varphi(\psi^{-1})} < 1$, и предложение доказано.

Замечание 6. Доказанный результат объясняет разницу в предположениях относительно показателей растяжения в теоремах 3 и 4. Действительно, если в условиях теоремы 4 $\gamma_{\varphi_1} = 0$, то $\delta_{\tilde{\varphi}_1} = 1$ и по лемме 4 $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_1^{-1})} = 1$. Поэтому одно из достаточных условий теоремы 3 не "работает". Если же $\gamma_{\varphi_1} > 0$, то ввиду того, что в теореме 4 $\delta_{\varphi_0} < 1$, из предложения 1 следует эквивалентность трех условий: $\gamma_{\varphi_1(\varphi_0^{-1})} > 1$, $\gamma_{\tilde{\varphi}_0(\tilde{\varphi}_1^{-1})} > 1$ и $\gamma_{\varphi_1/\varphi_0} > 0$. Заметим также, что при выполнении неравенства $\gamma_{\varphi_1/\varphi_0} > 0$ теоремы 3 и 4 вытекают из результатов работы [7].

В заключение приведем одно утверждение об операторах, непрерывных в L_p ($1 < p < \infty$) и в некотором СП X с одним тривиальным показателем растяжения фундаментальной функции.

Теорема 5. Пусть линейный оператор T ограничен в L_p для всех $p \in (1, \infty)$ и в СП X , причем $\gamma_{\varphi_X} = 0$, $\delta_{\varphi_X} < 1$ (соответственно $\delta_{\varphi_X} = 1$, $\gamma_{\varphi_X} > 0$), где $\varphi_X(t)$ – фундаментальная функция СП X .

Тогда существует функция $\psi \in \Phi$, такая, что $\gamma_\psi = 0$ (соответственно $\delta_\psi = 1$) и T ограничен в пространствах $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$.

Доказательство. Рассуждая точно таким же образом, как при доказательстве следствия 4, можно ограничиться случаем, когда $\varphi_X \in \Phi_0$.

Пусть $\gamma_{\varphi_X} = 0$, $\delta_{\varphi_X} < 1$. Зафиксируем число $p \in (1, 1/\delta_{\varphi_X})$. Из определения показателей растяжения вытекает то, что функция $\varphi_X(t) t^{-1/p}$ убывает в обобщенном смысле, т.е. при некотором $C > 0$ и всех $0 < u \leq v \leq 1$

$$\varphi_X(v) v^{-1/p} \leq C \varphi_X(u) u^{-1/p}.$$

Рассмотрим функцию $\rho(t) = \varphi_X^\alpha(t)$, где $\alpha \in (1, 1/(p\delta_{\varphi_X}))$. Так как $\gamma_\rho = \gamma_{\varphi_X} = 0$, а $\delta_\rho = \delta_{\varphi_X} < 1/p$, то $\rho(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\bar{\rho}(t)$ [1, с.77], а значит, и функции $\psi(t) = \bar{\rho}(t)/\bar{\rho}(1)$. Таким образом,

$\psi \in \Phi$, $\gamma_\psi = 0$, $\delta_\psi < 1/p$. Кроме того, легко проверить, что $\gamma_{\psi(\varphi_X^{-1})} = \alpha > 1$ и $\delta_{\psi(t^p)} = \alpha r \delta_{\varphi_X} < 1$.

Применяя теорему 3 к тройке функций $\varphi_X(t)$, $t^{1/p}$, $\psi(t)$, получим, что пространства $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$ ослабленно $(\varphi_X(t), t^{1/p})$ -интерполяционны. Тем самым, любой оператор, ограниченный из $\Lambda(t^{1/p})$ в $M(t^{1-1/p})$ и из $\Lambda(\varphi_X)$ в $M(\tilde{\varphi}_X)$, ограничен в $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$. Так как ввиду соотношений (1) и (2) из начала работы данный оператор T ограничен из $\Lambda(t^{1/p})$ в $M(t^{1-1/p})$ и из $\Lambda(\varphi_X)$ в $M(\tilde{\varphi}_X)$, для рассматриваемого случая доказательство теоремы закончено.

Если же $\gamma_{\varphi_X} > 0$, $\delta_{\varphi_X} = 1$, то $\gamma_{\tilde{\varphi}_X} = 1 - \delta_{\varphi_X} = 0$, $\delta_{\tilde{\varphi}_X} = 1 - \gamma_{\varphi_X} < 1$. Поэтому доказательство опять следует из теоремы 3.

Следствие 5. *Если линейный оператор T ограничен в L_p для всех $1 < p < \infty$ и не действует ни в каком пространстве Лоренца, таком, что $\gamma_\psi = 0$, $\delta_\psi < 1$ (соответственно $\delta_\psi = 1$, $\gamma_\psi > 0$), то он не действует ни в каком СП X , для фундаментальной функции которого φ_X выполнено: $\gamma_{\varphi_X} = 0$, $\delta_{\varphi_X} < 1$ (соответственно $\delta_{\varphi_X} = 1$, $\gamma_{\varphi_X} > 0$).*

Аналогичное утверждение справедливо и для пространств Марцинкевича.

Замечание 7. Используя то, что в случае тривиальных показателей растяжения фундаментальной функции пространства Лоренца и Марцинкевича совпадают с пространствами Орлича [15], для последних можно доказать аналогичные результаты.

Асташкин Сергей Владимирович

Самарский госуниверситет

443011 г.Самара, ул. акад. Павлова, 1

тел. (8462)94-01-45(дом.), (8462)34-53-37(раб.)

e-mail: astashkn@ssu.samara.emnet.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов*. М.: Наука, 1978.
2. Calderon A. P. *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*// *Studia Math.* 1966. V. 26. P. 273 – 299.
3. Dmitriev V. I., Krein S. G. *Interpolation operators of weak type*// *Analysis Math.* 1978. V. 4. P. 83 – 99.
4. Maligranda L. *Indices and interpolation*. *Dissertationes Mathematicae*. Warszawa. 1985. P. 1 – 49.
5. Берг Й., Лефстрем Й. *Интерполяционные пространства. Введение*. М.: Мир, 1980.
6. Brudnyi Yu. A., Kruglyak N. Ya. *Interpolation Functors and Interpolation Spaces 1*. North-Holland, 1991.
7. Асташкин С. В. *Об устойчивости интерполяционных функторов*// *Функцион. анализ и его прил.* 1985. Т. 19, вып. 2. С. 63 – 64.
8. Semenov E. M. *On the stability of real interpolation method in the class of rearrangement invariant spaces*// *Israel Math. Conf. Proc.* (to appear).
9. Sharpley R. *Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation*// *J. Functional Analysis*. 1972. V. 11. P. 479 – 513.
10. Ovchinnikov V. I. *The method of orbits in interpolation theory*// *Math. Rept.* 1984. V. 1. P. 349 – 515.
11. Асташкин С. В. *Об одном свойстве функторов вещественного метода интерполяции*// *Математ. заметки*. 1985. Т. 38, вып. 3. С. 393 – 406.
12. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. *Функторы вещественной интерполяции*// *ДАН СССР*. 1981. Т. 256, No. 1. С. 14-17.
13. Aronszajn N., Gagliardo E. *Interpolation spaces and interpolation methods*// *Ann. Mat. Pura Appl.* 1965. Ser. 4. V. 68. P. 51 – 117.
14. Асташкин С. В. *Об интерполяционных пространствах между $l_1(\omega_0)$ и $l_1(\omega_1)$* .// В сб. "Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл." Куйбышев. 1984. С. 25 – 33.
15. Рутецкий Я. Б. *О некоторых классах измеримых функций*// *УМН*. 1965. Т. 20, No. 4. С. 205 – 208.