

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ КАЛЬДЕРОНА — ЛОЗАНОВСКОГО

С. В. Асташкин

1. Предварительные замечания и формулировка результатов.
 Пусть Φ — класс функций $\varphi = \varphi(u, v)$, определенных при $u \geq 0, v \geq 0$, положительно однородных первой степени и возрастающих по каждому аргументу. Если $\{E_0, E_1\}$ — пара банаховых решеток (БР) измеримых функций на пространстве с σ -конечной мерой μ , то через $\varphi(E_0, E_1)$ обозначим пространство всех измеримых функций $x = x(t)$, для которых

$$|x(t)| \leq \lambda \varphi(x_0(t), x_1(t)), \quad (1)$$

где $\lambda > 0, x_i \geq 0, x_i \in E_i, \|x_i\|_{E_i} \leq 1$ ($i = 0, 1$). Норма в $\varphi(E_0, E_1)$ полагается равной $\inf \lambda$, где нижняя грань берется по всем λ , для которых справедливо неравенство вида (1).

Впервые эта конструкция появилась в статье А. П. Кальдерона [1]. Затем различные аспекты ее изучались рядом математиков. В частности, Г. Я. Лозановский показал, что, вообще говоря, пространство $\varphi(E_0, E_1)$ не интерполяционно между пространствами E_0 и E_1 [2]. Это означает, что не всякий линейный оператор, ограниченный в E_0 и E_1 , ограничен в $\varphi(E_0, E_1)$. В то же время, если линейный оператор положителен, то интерполяционная теорема справедлива: из ограниченности такого оператора в E_0 и E_1 следует его ограниченность в $\varphi(E_0, E_1)$ [3].

В данной работе аналогичное утверждение будет доказано для полилинейных операторов. При формулировке результатов нам понадобится ряд определений и обозначений.

Для неотрицательной функции f , определенной на $(0, \infty)$, ее функция растяжения $\mathcal{M}_f$ определяется равенством

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup_{s>0} \frac{f(st)}{f(s)} \quad (t > 0).$$

Так как $\mathcal{M}_f$ полумультимпликативна, существуют числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t}, \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t},$$

называемые *нижним и верхним показателями растяжения* функции f .

Для $\varphi \in \Phi$ обозначим $\rho(t) = \varphi(1, t)$. Нетрудно показать, что $0 \leq \gamma_\rho \leq \delta_\rho \leq 1$. В дальнейшем будем предполагать, что функция ρ удовлетворяет двум условиям:

$$\rho(u)\rho(v) \leq K\rho(uv), \quad (*)$$

где K не зависит от $u > 0$ и $v > 0$, а также

$$0 < \gamma_\rho \leq \delta_\rho < 1. \quad (**)$$

Пусть A — полилинейный оператор, ограниченно действующий из произведения $\prod_{i=1}^n X_i$ БР X_i в БР Y . Оператор называется *положительным*, если из $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ следует, что $A(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.

Если X — БР измеримых функций, то ассоциированное пространство X' состоит из всех измеримых функций $y(t)$, для которых

$$\|y\|_{E'} = \sup \left\{ \int_T x(t)y(t)d\mu : \|x\|_E \leq 1 \right\} < \infty.$$

Второе ассоциированное пространство обозначается, как обычно, через X'' .

Теорема 1. Пусть A — положительный полилинейный оператор, ограниченный из $\prod_{i=1}^n X_0^i$ в Y_0 и из $\prod_{i=1}^n X_1^i$ в Y_1 . Если функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условиям (*) и (**), то A ограниченно действует из $\prod_{i=1}^n \varphi(X_0^i, X_1^i)$ в $\varphi(Y_0'', Y_1'') \cap (Y_0 + Y_1)$.

Теорема 1 является следствием, во-первых, интерполяционной теоремы для конкретных весовых пространств двусторонних числовых последовательностей (теорема 2), а во-вторых, возможности описания метода Кальдерона — Лозановского в терминах орбит положительных операторов (теорема 3).

Пусть $w = \{w_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, E — БР числовых последовательностей. Через $E(w) = E(w_k)$ обозначим БР последовательностей $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, для которых конечна норма $\|x\|_{E(w)} = \|(w_k x_k)\|_E$. Всюду далее обозначения l_p и c_0 понимаются стандартным образом, $\varphi^*(u, v) = 1/\varphi(1/u, 1/v)$.

Теорема 2. Пусть для функции $\rho(t) = \varphi(1, t)$, $\varphi \in \Phi$, выполнены условия (*) и (**). Если положительный полилинейный оператор V ограничен из $\prod_{i=1}^n c_0$ в l_1 и из $\prod_{i=1}^n c_0(2^{-k})$ в $l_1(2^{-k})$, то он ограничен из $\prod_{i=1}^n l_{\infty}(\varphi^*(1, 2^{-k}))$ в $l_1(\varphi^*(1, 2^{-k}))$.

Напомним, что линейный оператор A называется *ограниченным* из банаховой пары $\vec{X} = \{X_0, X_1\}$ в пару $\vec{Y} = \{Y_0, Y_1\}$, если A ограничен из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 . При этом

$$\|A\|_{\vec{X} \rightarrow \vec{Y}} = \max_{i=0,1} \{\|A\|_{X_i \rightarrow Y_i}\}.$$

Определим орбиту и коорбиту пространства относительно класса $L(\vec{X}, \vec{Y})$ всех линейных операторов, ограниченных из пары $\vec{X} = \{X_0, X_1\}$ в пару $\vec{Y} = \{Y_0, Y_1\}$.

Пусть $\vec{E} = \{E_0, E_1\}$ — банахова пара, E — банахово пространство, промежуточное относительно нее, т. е. $E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1$. Тогда орбитой E в паре $\vec{Y} = \{Y_0, Y_1\}$ называется пространство $\text{Orb}_{\vec{E}}(E, \vec{Y})$ всех $y \in Y_0 + Y_1$, допускающих представление

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} T_j x_j, \quad (2)$$

где ряд сходится в $Y_0 + Y_1$, $T_j \in L(\vec{E}, \vec{Y})$, $x_j \in E$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T_j\|_{\vec{E} \rightarrow \vec{Y}} \|x_j\|_E < \infty. \quad (3)$$

Норма $\|y\|_{\text{Orb}}$ по определению равна точной нижней грани сумм из (3) по всем представлениям вида (2).

Пространство всех $y \in Y_0 + Y_1$, для которых

$$\|y\|_{\text{Corb}} = \sup\{\|Ty\|_E : \|T\|_{\vec{Y} \rightarrow \vec{E}} \leq 1\} < \infty,$$

называется *коорбитой* E в паре $\vec{Y}$ и обозначается через $\text{Corb}_{\vec{E}}(E, \vec{Y})$.

Чрезвычайно важным фактом для теории интерполяции является возможность описания в терминах орбит и коорбит ряда наиболее важных классов интерполяционных функторов (см., например, [4]). Рассматривая в приведенных определениях лишь пары БР и ограничиваясь только положительными операторами, получим определения $\text{Orb}_{\vec{E}}^+(E, \vec{Y})$ и $\text{Corb}_{\vec{E}}^+(E, \vec{Y})$. Ясно, что

$$\text{Orb}_{\vec{E}}^+(E, \vec{Y}) \subset \text{Orb}_{\vec{E}}(E, \vec{Y}), \text{Corb}_{\vec{E}}^+(E, \vec{Y}) \supset \text{Corb}_{\vec{E}}(E, \vec{Y}).$$

В [5] получен следующий результат об описании в терминах орбит положительных операторов метода Кальдерона — Лозановского.

Теорема 3. Если $\varphi \in \Phi$, $\vec{l}_p = \{l_p, l_p(2^{-k})\}$, то для произвольной пары БР $\vec{Y} = \{Y_0, Y_1\}$ имеют место соотношения

$$\varphi(\vec{Y}) = \text{Orb}_{l_{\infty}}^+(l_{\infty}(\varphi^*(1, 2^{-k})), \vec{Y}), \quad (4)$$

$$\varphi(\vec{Y}'') \cap (Y_0 + Y_1) \supset \text{Corb}_{l_1}^+(l_1(\varphi^*(1, 2^{-k})), \vec{Y}), \quad (5)$$

где $\vec{Y}'' = \{Y_0'', Y_1''\}$.

Замечание 1. Вложение (5) можно получить также, несколько модифицируя доказательство леммы 8.5.1 из [4].

Замечание 2. Для линейных (не обязательно положительных) операторов теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, впервые были доказаны в [6] для произвольной функции $\varphi \in \Phi$. Нетрудно показать, что условие (*) необходимо в утверждениях теорем 1 и 2 уже в билинейном случае. В то же время вопрос о том, насколько необходима нетривиальность показателей растяжения функции $\rho(t) = \varphi(1, t)$ (условие (**)), остается открытым.

Замечание 3. В степенном случае $\varphi(u, v) = u^{1-s}v^s$ ($0 < s < 1$) теоремы 1 и 2 можно получить, используя связь между методом Кальдерона — Лозановского и комплексным методом интерполяции, а также полилинейную интерполяционную теорему для последнего (см. [1] или [7, с. 125–128]).

Замечание 4. В билинейном случае теоремы 1 и 2 были анонсированы в сборнике тезисов докладов Международной конференции, посвященной 90-летию академика С. М. Никольского [8].

2. Доказательства.

Доказательство теоремы 2. Мы используем идею представления оператора в виде суммы «диагональных» аналогично тому, как это делается в линейном случае в [9] (см. также [4, с. 464]).

С помощью стандартных рассуждений утверждение теоремы можно эквивалентно переформулировать следующим образом: если V — положительный полилинейный оператор, ограниченный из $\prod_{i=1}^n c_0(\rho(2^k))$

в $l_1(\rho(2^k))$ и из $\prod_{i=1}^n c_0(\rho(2^k)2^{-k})$ в $l_1(\rho(2^k)2^{-k})$ с нормами C_0 и C_1 соответственно, то V ограничен из $\prod_{i=1}^n l_\infty$ в l_1 , где, как и прежде, $\rho(t) = \varphi(1, t)$.

Обозначим $\|V\| = \max(C_0, C_1)$.

Оператор V определяется последовательностью бесконечных числовых «матриц»:

$$\gamma^k = (v_{p_1, \dots, p_n}^k), \quad v_{p_1, \dots, p_n}^k \geq 0, \quad (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, пусть $\{e_i\}_{i=-\infty}^\infty$ — стандартный базис пространства c_0 ,

$a^i = \sum_{j=-\infty}^\infty a_j^i e_j$ ($1 \leq i \leq n$) — финитные последовательности. Тогда из

линейности V по каждому аргументу следует, что

$$V(a^1, \dots, a^n) = (b_k)_{k=-\infty}^\infty, \quad b_k = \sum_{p_1=-\infty}^\infty \cdots \sum_{p_n=-\infty}^\infty a_{p_1}^1 \cdots a_{p_n}^n v_{p_1, \dots, p_n}^k,$$

где $v_{p_1, \dots, p_n}^k = (V(e_{p_1}, \dots, e_{p_n}))_k$.

Перенумеруем систему функций Радемахера на $[0, 1]$ так, чтобы она образовывала бесконечную двустороннюю последовательность $\{h_j(t)\}_{j=-\infty}^\infty$, причем $h_0(t) = 1$. Для произвольных $m \in \mathbb{Z}$ и $t \in [0, 1]$ определим последовательность «матриц»:

$$\gamma_{m,t}^k = h_{k-m}(t)(h_{-p_1-\dots-p_n}(t)v_{p_1, \dots, p_n}^k), \quad (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Каждая такая последовательность также задает полилинейный оператор, ограниченный из $\prod_{i=1}^n c_0(\rho(2^k))$ в $l_1(\rho(2^k))$ и из $\prod_{i=1}^n c_0(\rho(2^k)2^{-k})$ в $l_1(\rho(2^k)2^{-k})$ с нормами, не превосходящими $\|V\|$.

Усредняя по всем $t \in [0, 1]$ по мере Лебега, получаем, что аналогичным свойством обладает и оператор V_m , определяемый последовательностью «диагональных матриц»:

$$\gamma_m = (v_{p_1, \dots, p_n}^k \delta_{p_n, k-m-p_1-\dots-p_{n-1}}), \quad (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Поэтому для $m \geq 0$ ввиду условия (*) имеем

$$\begin{aligned} \|V\| &\geq \|V_m\|_{\prod_{i=1}^n c_0(\rho(2^k)) \rightarrow l_1(\rho(2^k))} \\ &= \left\| \left(\frac{\rho(2^k)}{\rho(2^{p_1}) \cdots \rho(2^{p_n})} v_{p_1, \dots, p_n}^k \delta_{p_n, k-m-p_1-\dots-p_{n-1}} \right) \right\|_{\prod_{i=1}^n c_0 \rightarrow l_1} \\ &\geq K^{-n} \rho(2^m) \|V_m\|_{\prod_{i=1}^n c_0 \rightarrow l_1}. \end{aligned}$$

В силу неотрицательности $v_{p_1, \dots, p_n}^k$ последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{p_{n-1}=-\infty}^{\infty} v_{p_1, \dots, p_{n-1}, k-m-p_1-\dots-p_{n-1}}^k \leq \frac{\|V\|K^n}{\rho(2^m)},$$

или, иначе,

$$\|V\|_{\prod_{i=1}^n l_{\infty} \rightarrow l_1} \leq \frac{\|V\|K^n}{\rho(2^m)} \quad (m \geq 0). \quad (6)$$

Оценивая снизу норму оператора V_m из $\prod_{i=1}^n c_0(\rho(2^k)2^{-k})$ в $l_1(\rho(2^k)2^{-k})$, точно таким же образом для $m < 0$ получим

$$\|V_m\|_{\prod_{i=1}^n l_{\infty} \rightarrow l_1} \leq \frac{2^m \|V\|K^n}{\rho(2^m)}. \quad (7)$$

Так как $V = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m$, то из неравенств (6) и (7) следует, что

$$\|V\|_{\prod_{i=1}^n l_{\infty} \rightarrow l_1} \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \|V_m\|_{\prod_{i=1}^n l_{\infty} \rightarrow l_1} \leq C_1 \|V\|,$$

где ввиду (**)

$$C_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho(2^m)} + \frac{2^{-m}}{\rho(2^{-m})} \right) < \infty.$$

Следовательно, $V : \prod_{i=1}^n l_{\infty} \rightarrow l_1$, и теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть A — положительный полилинейный оператор, ограниченный из $\prod_{i=1}^n X_0^i$ в Y_0 и из $\prod_{i=1}^n X_1^i$ в Y_1 с нормами C_0 и C_1 соответственно, $\|A\| = \max(C_0, C_1)$.

Если $x_i \in \varphi(X_0^i, X_1^i)$, то ввиду (4) $x_i \in \text{Orb}_{l_{\infty}}^+(l_{\infty}(\varphi^*(1, 2^{-k})), \vec{X}^i)$, $\vec{X}^i = \{X_0^i, X_1^i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Предположим сначала, что существуют $T_i \geq 0$, $T_i \in L(\vec{l}_{\infty}, \vec{X}^i)$ и $a_i \in l_{\infty}(\varphi^*(1, 2^{-k}))$, для которых $x_i = T_i a^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). По-прежнему здесь $\vec{l}_p = \{l_p, l_p(2^{-k})\}$.

Для произвольного положительного линейного оператора Q , ограниченного из пары $\vec{Y} = \{Y_0, Y_1\}$ в пару $\vec{l}_1$, определим оператор V :

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = QA(T_1 \xi_1, \dots, T_n \xi_n).$$

Тогда V положителен, полилинеен и ограничен из $\prod_{i=1}^n l_{\infty}$ в l_1 и из $\prod_{i=1}^n l_{\infty}(2^{-k})$ в $l_1(2^{-k})$. При этом

$$\|V\| = \max(\|V\|_{\prod_{i=1}^n l_{\infty} \rightarrow l_1}, \|V\|_{\prod_{i=1}^n l_{\infty}(2^{-k}) \rightarrow l_1(2^{-k})}) \leq \|Q\| \|A\| \prod_{i=1}^n \|T_i\|,$$

$$\|Q\| = \|Q\|_{\vec{Y} \rightarrow \vec{I}_1}, \quad \|T_i\| = \|T_i\|_{\vec{I}_\infty \rightarrow \vec{X}^i}.$$

По теореме 2 V ограничен из $\prod_{i=1}^n l_\infty(\varphi^*(1, 2^{-k}))$ в $l_1(\varphi^*(1, 2^{-k}))$ с нормой, не превосходящей $C_1\|V\|$.

Пусть $y = A(x_1, \dots, x_n) = A(T_1 a_1, \dots, T_n a_n)$. По определению Corb^+ имеем

$$\begin{aligned} \|y\|_{\text{Corb}^+} &= \sup\{\|Qy\|_{\varphi,1} : \|Q\| \leq 1\} = \sup\{\|V(a_1, \dots, a_n)\|_{\varphi,1} : \|Q\| \leq 1\} \\ &\leq C_1 \prod_{i=1}^n \|a_i\|_{\varphi,\infty} \sup\{\|V\| : \|Q\| \leq 1\} \leq C_1 \|A\| \prod_{i=1}^n \|T_i\| \|a_i\|_{\varphi,\infty}, \end{aligned}$$

где через $\|\cdot\|_{\varphi,p}$ обозначена норма в пространстве $l_p(\varphi^*(1, 2^{-k}))$. Ввиду вложения (5) отсюда получаем, что с некоторым $C_2 > 0$ выполнено неравенство

$$\|y\|_{\varphi}'' \leq C_2 \|A\| \prod_{i=1}^n \|T_i\| \|a_i\|_{\varphi,\infty}, \quad (8)$$

где $\|\cdot\|_{\varphi}''$ — норма в пространстве $\Phi(Y_0'', Y_1'') \cap (Y_0 + Y_1)$.

В общем случае

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} T_i^j a_i^j, \quad (9)$$

где ряды сходятся в $X_0^i + X_1^i$, $T_i^j \in L(\vec{I}_\infty, \vec{X})$, $a_i^j \in l_\infty(\varphi^*(1, 2^{-k}))$ и, наконец,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T_i^j\|_{\vec{I}_\infty \rightarrow \vec{X}^i} \|a_i^j\|_{\varphi,\infty} < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для произвольного набора $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ положим

$$y_{p_1, \dots, p_n} = A(T_1^{p_1} a_1^{p_1}, \dots, T_n^{p_n} a_n^{p_n}).$$

Тогда ввиду линейности операторов T_i^j и полилинейности A имеем

$$y = A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=1}^{\infty} y_{p_1, \dots, p_n}.$$

Применяя неравенство (8) к $y_{p_1, \dots, p_n}$, получим

$$\|y_{p_1, \dots, p_n}\|_{\varphi}'' \leq C_2 \|A\| \prod_{i=1}^n \|T_i^{p_i}\| \|a_i^{p_i}\|_{\varphi,\infty},$$

откуда

$$\begin{aligned} \|y\|_{\varphi}'' &\leq \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=1}^{\infty} \|y_{p_1, \dots, p_n}\|_{\varphi}'' \leq C_2 \|A\| \sum_{p_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \|T_i^{p_i}\| \|a_i^{p_i}\|_{\varphi,\infty} \\ &= C_2 \|A\| \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_i^j\| \|a_i^j\|_{\varphi,\infty} \right). \end{aligned}$$

Переходя справа к точным нижним граням по представлениям (9), согласно определению нормы в Orb^+ имеем

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\|_{\varphi}'' \leq C_2 \|A\| \prod_{i=1}^n \|x_i\|_{\text{Orb}^+}.$$

Отсюда ввиду (4) A ограничен из $\prod_{i=1}^n \varphi(X_0^i, X_1^i)$ в $\varphi(Y_0'', Y_1'') \cap (Y_0 + Y_1)$, и $\|A\|_\varphi'' \leq C_3 \|A\|$. Теорема доказана.

Приложения. Здесь будут лишь намечены некоторые возможные приложения теоремы 1.

Полилинейная интерполяция в L_p -пространствах. Пусть $w = w(t)$ — положительная измеримая функция на пространстве T с мерой μ . Тогда, как обычно, $L_p(w)$ состоит из всех измеримых на T функций $x = x(t)$, для которых $w(t)x(t) \in L_p$ и $\|x\|_{L_p(w)} = \|wx\|_{L_p}$.

Так как $\varphi(L_p(w^0), L_p(w^1)) = L_p(\varphi^*(w^0, w^1))$ [4, с. 459], то из теоремы 1 следует

Теорема 4. Если для $\varphi \in \Phi$ выполнены условия $(*)$ и $(**)$ и положительный полилинейный оператор A ограничен из $\prod_{i=1}^n L_p(w_i^0)$ в $L_q(v_0)$ и из $\prod_{i=1}^n L_p(w_i^1)$ в $L_q(v_1)$ ($1 \leq p, q \leq \infty$), то A ограничен из $\prod_{i=1}^n L_p(\varphi^*(w_i^0, w_i^1))$ в $L_q(\varphi^*(v_0, v_1))$.

Замечание 5. В случае $p = q = \infty$ аналогичный результат получен в [10] для произвольных билинейных (не обязательно положительных) операторов.

Полилинейная интерполяция в пространствах Орлича. Пусть $N(t)$ — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $N(0) = 0$. Пространство Орлича L_N^* состоит из всех измеримых на T функций $x = x(t)$, для которых при некотором $u > 0$

$$\int_T N(|x(t)|/u) d\mu < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \inf \left\{ u > 0 : \int_T N(|x(t)|/u) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Рассмотрим пару пространств Орлича $\{L_{N_0}^*, L_{N_1}^*\}$. Если $\varphi \in \Phi$, то через $N(t)$ обозначим такую функцию, что

$$N^{-1}(t) = \varphi(N_0^{-1}(t), N_1^{-1}(t)),$$

где $N^{-1}(t)$ — функция, обратная к N . Так как $\varphi(L_{N_0}^*, L_{N_1}^*) = L_N^*$ [4, с. 460, 461] и $(L_N^*)'' = L_N^*$, то из теоремы 1 получаем естественную полилинейную интерполяционную теорему для пространств Орлича.

Теорема 5. Если для $\varphi \in \Phi$ выполнены условия $(*)$ и $(**)$ и полилинейный положительный оператор A ограничен из $\prod_{i=1}^n L_{N_i}^*$ в $L_{R_0}^*$ и из $\prod_{i=1}^n L_{M_i}^*$ в $L_{R_1}^*$, то A ограничен из $\prod_{i=1}^n L_{G_i}^*$ в L_R^* , где

$$G_i^{-1}(t) = \varphi(N_i^{-1}(t), M_i^{-1}(t)) \quad (i = 1, \dots, n), \quad R^{-1}(t) = \varphi(R_0^{-1}(t), R_1^{-1}(t)).$$

Замечание 6. В [10] получен аналогичный результат для симметричных пространств Марцинкевича [11, с. 152] и произвольных билинейных (не обязательно положительных) операторов.

ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ И ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. Обозначим через S билинейный оператор свертки функций, определенных на $\mathbb{R}^m$:

$$S(x, y)(t) = \int_{\mathbb{R}^m} x(t-s)y(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема 6. Если оператор S ограничен из $X_0^1 \times X_0^2$ в Y_0 и из $X_1^1 \times X_1^2$ в Y_1 (X_j^1 и Y_j — БР функций, определенных на $\mathbb{R}^m$), а функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условиям (*) и (**), то S ограничен из $\varphi(X_0^1, X_1^1) \times \varphi(X_0^2, X_1^2)$ в $\varphi(Y_0'', Y_1'') \cap (Y_0 + Y_1)$.

В изучении ряда вопросов, связанных с геометрическими свойствами симметричных пространств [11], важную роль играет оператор тензорного произведения

$$B(x, y)(s, t) = x(s)y(t),$$

где $x = x(s), y = y(t)$ — измеримые функции на $[0, 1]$ (см., например, [12, 13]).

Теорема 7. Если оператор B ограничен из $X_0^1 \times X_0^2$ в Y_0 и из $X_1^1 \times X_1^2$ в Y_1 (X_j^1 и Y_j — симметричные пространства на $[0, 1]$ и на $[0, 1] \times [0, 1]$ соответственно) и функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условиям (*) и (**), то B ограничен из $\varphi(X_0^1, X_1^1) \times \varphi(X_0^2, X_1^2)$ в $\varphi(Y_0'', Y_1'') \cap (Y_0 + Y_1)$.

Автор выражает благодарность В. И. Овчинникову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calderon A. P. Intermediate spaces and interpolation. The complex method // *Studia Math. Appl.* 1964. V. 24. P. 113–190.
2. Лозановский Г. Я. Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона // *Функцион. анализ и его прил.* 1972. Т. 6, № 4. С. 89–90.
3. Бережной Е. И. Интерполяция положительных операторов в пространствах $\varphi(X_0, X_1)$. Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Ярославск. ун-т, 1980. С. 19–29.
4. Ovchinnikov V. I. The method of orbits in interpolation theory // *Math. Rep.* 1984. V. 1, N 2. P. 349–515.
5. Водопьянов В. В. Орбиты и коорбиты положительной интерполяции для банаховых идеальных структур // *Изв. вузов. Математика.* 1989. № 3. С. 76–78.
6. Овчинников В. И. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // *Функцион. анализ и его прил.* 1976. Т. 10, № 4. С. 45–54.
7. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
8. Асташкин С. В. Билинейная интерполяционная теорема для пространств метода Кальдерона — Лозановского // *Междунар. конф. по функцион. пространствам, теории приближений, нелинейному анализу: Тез. докл. М., 1995.* С. 319–320.
9. Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation // *J. Funct. Anal.* 1981. V. 44. P. 50–73.
10. Асташкин С. В., Ким Ю. Е. Интерполяция билинейных операторов в пространствах Марцинкевича // *Мат. заметки.* 1996. Т. 60, № 4. С. 483–494.
11. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
12. Carothers N. L. Rearrangement invariant subspaces of Lorentz function spaces // *Israel J. Math.* 1981. V. 40, N 3–4. P. 217–228.
13. Асташкин С. В., Браверман М. Ш. О подпространствах симметричного пространства, порожденного системой Радемахера с векторными коэффициентами // *Операторные уравнения в функциональных пространствах.* Воронеж: Воронежск. ун-т, 1986. С. 3–10.