

Об интерполяции подпространств симметричных пространств, порожденных системой Радемахера

С.В. Асташкин

Аннотация

В статье рассматриваются ряды по системе Радемахера в симметричных пространствах, "близких" к пространству L_∞ . В терминах теории интерполяции линейных операторов установлено соответствие между такими пространствами и порожденными ими пространствами последовательностей коэффициентов по этой системе. Доказана его взаимно однозначность. Приведены конкретные примеры и приложения.

1. Определения, обозначения, формулировка результатов.

Пусть

$$r_k(t) = \text{sign} \sin 2^{k-1} \pi t \quad (k = 1, 2, \dots)$$

система функций Радемахера на $[0, 1]$. Если числовая последовательность $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$, то положим

$$Ta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t) \quad (t \in [0, 1]) \quad (1)$$

Хорошо известно (см., например, [1, с.340-342]), что при фиксированном a соотношение (1) определяет конечную почти всюду измеримую функцию. Более того, если $1 \leq p < \infty$, то ввиду неравенства Хинчина T – линейный ограниченный оператор из l_2 в L_p и

$$\|Ta\|_p \asymp \|a\|_2 \quad (2)$$

(последнее означает существование двусторонних оценок с константами, зависящими только от p). В то же время, легко проверить, что

$$\|Ta\|_\infty = \|a\|_1 \quad (3)$$

Более полное представление о поведении рядов по системе Радемахера можно получить, рассматривая их в рамках общих симметричных пространств.

Напомним, что банахово пространство X измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ называется симметричным (с.п.), если

- 1) из того, что $|x(t)| \leq |y(t)|, y \in X$, следует: $x \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$;
- 2) из того, что $\mu\{t : |x(t)| > \tau\} = \mu\{t : |y(t)| > \tau\}$ ($\tau > 0$) (μ – мера Лебега на $[0, 1]$) и $y \in X$, следует: $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$.

Примерами с.п., кроме L_p ($1 \leq p \leq \infty$), являются пространства Марцинкевича и Орлича.

В дальнейшем через $\mathcal{P}$ будет обозначаться конус возрастающих вогнутых функций на полуоси $(0, \infty)$. Если $\phi \in \mathcal{P}$, то пространство Марцинкевича $M(\phi)$ состоит из всех измеримых функций $x = x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\phi)} = \sup \left\{ \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t x^*(s) ds : 0 < t \leq 1 \right\}.$$

($x^*(s)$ – невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$).

Пусть $S(t)$ – возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $S(0) = 0$. Пространство Орлича L_S состоит из всех измеримых функций $x = x(t)$ на $[0, 1]$, для которых конечна норма

$$\|x\|_S = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 S(|x(t)|/u) dt \leq 1 \right\}.$$

Если X – с.п. на $[0, 1]$, то $L_\infty \subset X \subset L_1$ [2, с.124]. Через X^0 будем обозначать замыкание в X пространства L_∞ .

Изучению рядов по системе Радемахера в с.п. посвящена работа [3]. Приведем один из ее результатов.

[3]. Если X – с.п., то

$$\|Ta\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|a\|_2$$

тогда и только тогда, когда $X \supset G$, где $G = L_N^0$, $N(t) = \exp(t^2) - 1$ ($t > 0$).

Иначе говоря, G минимально среди с.п., в которых система Радемахера эквивалентна каноническому базису l_2 .

В настоящей работе изучается поведение рядов по системе Радемахера в с.п., промежуточных между L_∞ и G . Основная роль при этом принадлежит методам теории интерполяции линейных операторов. Напомним некоторые существенные для дальнейшего определения и факты.

Для банаховой пары (X_0, X_1) , $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ введем $\mathcal{K}$ -функционал Петре[4]:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}.$$

Пусть Y_0 – подпространство X_0 , а Y_1 – подпространство X_1 . Пара (Y_0, Y_1) называется $\mathcal{K}$ -подпарой пары (X_0, X_1) , если

$$\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \asymp \mathcal{K}(t, y; X_0, X_1)$$

с константами, не зависящими от $y \in Y_0 + Y_1$ и $t > 0$.

В частности, если $Y_i = P(X_i)$ ($i = 0, 1$), где P – линейный ограниченный проектор в X_0 и X_1 , то (Y_0, Y_1) – $\mathcal{K}$ -подпара (X_0, X_1) (см. [5] или [6, с.136]). В то же время, известно немало примеров подпар, не являющихся $\mathcal{K}$ -подпарами (см. [6, с.589], [7] или замечание 2 данной работы).

Мы будем рассматривать случай: $X_0 = L_\infty$, $X_1 = G$, $Y_0 = T(l_1)$, $Y_1 = T(l_2)$, где T – оператор, определяемый равенством (1). Из соотношения (3) и теоремы А следует, что

$$\mathcal{K}(t, Ta; T(l_1), T(l_2)) \asymp \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) \quad (4)$$

Несмотря на то, что подпространство $T(l_1)$ не дополняемо в L_∞ (см. [8] или [9, р.134]), справедлив следующий результат:

1. Пара $(T(l_1), T(l_2))$ является $\mathcal{K}$ -подпарой пары (L_∞, G) . Иначе говоря (см. (4)),

$$\mathcal{K}(t, Ta; L_\infty, G) \asymp \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) \quad (5)$$

с константами, не зависящими от $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $t > 0$.

При доказательстве теоремы 1 нам понадобится следующее утверждение об оценке распределения рядов по системе Радемахера.

[10]. Существует константа $A \geq 1$, такая, что для всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ и $t > 0$

$$\mu \left\{ s \in [0, 1] : \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(s) > A^{-1} \phi_a(t) \right\} \geq A^{-1} \exp(-At^2), \quad (6)$$

где $\phi_a(t) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$.

Для формулировки приложений теоремы 1, а также доказательств нам потребуется ряд определений из теории интерполяции линейных операторов.

Линейный оператор U называется ограниченным из банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ в банахову пару $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ ($U : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$), если он ограничен из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 .

Пусть $\vec{X} = (X_0, X_1)$ – банахова пара. Пространство X , такое, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, называется интерполяционным между X_0 и X_1 , если из условия $U : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$ следует ограниченность линейного оператора U в X .

Одним из важнейших способов получения интерполяционных пространств является так называемый вещественный метод интерполяции. Через $l_p(u_k)$, $u_k \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots$) обозначим пространство двусторонних числовых последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, для которых конечна

$$\|a\|_{l_p(u_k)} = \|(a_k u_k)\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Пусть E – банахово идеальное пространство двусторонних числовых последовательностей, $E \supset l_{\infty} \cap l_{\infty}(2^{-k})$. Если (X_0, X_1) – банахова пара, то пространство вещественного $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k \in E,$$

с нормой

$$\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k\|_E.$$

Нетрудно показать, что пространство $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ интерполяционно между X_0 и X_1 (см., например, [11, р.422]). В частном случае $E = l_p(2^{-k\theta})$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$) получаем классические пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ (подробное описание их свойств см., например, в [4]).

Пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называется $\mathcal{K}$ -монотонной, если выполнение неравенства

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0)$$

для некоторых $x \in X_0 + X_1$ и $y \in X_0 + X_1$ влечет существование линейного оператора $U : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$, такого, что $y = Ux$.

Как известно (см., например, [11, р.482]), любое пространство X , интерполяционное относительно $\mathcal{K}$ -монотонной пары (X_0, X_1) , представимо в

виде

$$X = (X_0, X_1)_E^K$$

для некоторого параметра вещественного метода E .

В частности, по теореме Спарра [11] пара (l_1, l_2) K -монотонна, и значит, если F интерполяционно относительно нее, то

$$F = (l_1, l_2)_E^K.$$

Это обстоятельство вместе с теоремой 1 позволяет находить с.п., содержащее те и только те ряды по системе Радемахера, последовательности коэффициентов которых принадлежат произвольному наперед заданному координатному пространству F , интерполяционному между l_1 и l_2 . В работе [3] аналогичное утверждение было получено для пространств F , удовлетворяющих более ограничительным условиям (в F должны непрерывно действовать операторы так называемого слабого типа для пары (l_1, l_2) ; см. замечание 3).

Теорема 2. Пусть F интерполяционно между l_1 и l_2 , $F = (l_1, l_2)_E^K$. Тогда для с.п. $X = (L_\infty, G)_E^K$ выполнено:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \asymp \|a\|_F$$

с константами, не зависящими от последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$.

Наконец, последняя теорема показывает, что установленное выше соответствие между с.п. и соответствующими пространствами последовательностей коэффициентов рядов по системе Радемахера является взаимно однозначным.

Теорема 3. Пусть X_0 и X_1 — два с.п., интерполяционных между L_∞ и G . Если

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_0} \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_1},$$

то $X_0 = X_1$.

В работе [3] (см. теорему 5) последний результат был получен при более сильных ограничениях на с.п. X_0 и X_1 . Еще раньше [13, теорема 3.11] при аналогичных предположениях была доказана слабая форма этого утверждения: а именно, эквивалентность фундаментальных функций пространств X_0 и X_1 .

2. Доказательства.

а) доказательство теоремы 1. Как известно [2, с.164], $\mathcal{K}$ -функционал в паре пространств Марцинкевича вычисляется по формуле

$$\mathcal{K}(t, x; M(\phi_0), M(\phi_1)) = \sup_{0 < u \leq 1} \frac{\int_0^u x^*(s) ds}{\max(\phi_0(u), \phi_1(u)/t)}.$$

Если $N(t) = \exp(t^2) - 1$, то пространство Орлича L_N совпадает с пространством Марцинкевича $M(\phi_1)$ $\phi_1(u) = u \log_2^{1/2}(2/u)$ [3]. Так как, кроме того, $L_\infty = M(\phi_0)$ $\phi_0(u) = u$, то для $x \in G$

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) = \sup_{0 < u \leq 1} \left\{ 1/u \int_0^u x^*(s) ds \min(1, t \log_2^{-1/2}(2/u)) \right\} \quad (7)$$

Так как $x^*(u) \leq 1/u \int_0^u x^*(s) ds$, то из (7) следует

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \geq \sup_{k=0,1,\dots} \{x^*(2^{-k}) \min(1, t(k+1)^{-1/2})\}.$$

Если $t \geq 1$, то отсюда получаем, что

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \geq x^*(2^{-k_t}), \quad (8)$$

где $k_t = [t^2] - 1$ ($[z]$ – целая часть числа z).

Пусть теперь $x(t) = Ta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)$, $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$. По формуле Т.Хольмстедта [14] для некоторой универсальной константы $B > 0$

$$\phi_a(t) \leq \sum_{k=1}^{[t^2]} a_k^* + t \left\{ \sum_{k=[t^2]+1}^{\infty} (a_k^*)^2 \right\}^{1/2} \leq B \phi_a(t), \quad (9)$$

где $\phi_a(t) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$ ($t > 0$), а $(a_k^*)_{k=1}^{\infty}$ – перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ в убывающем порядке.

Предположим сначала, что $a \notin l_1$. В этом случае неравенство (9) показывает, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \phi_a(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_a(t) = \infty.$$

Так как функция $\phi_a \in \mathcal{P}$ (см., например, [4, с.55]), то она взаимно однозначно отображает полуось $(0, \infty)$ на $(0, \infty)$, и поэтому существует обратная функция ϕ_a^{-1} .

Применяя неравенство (6) из теоремы В, получаем:

$$n_{|x|}(\tau) = \mu\{s \in [0, 1] : |x(s)| > \tau\} \geq \psi(\tau) \ (\tau > 0),$$

где $\psi(\tau) = A^{-1} \exp\{-A[\phi_a^{-1}(\tau A)]^2\}$ Перейдем к перестановкам:
 $x^*(\psi(\tau)) \geq \tau \ (\tau > 0)$ или

$$x^*(s) \geq \psi^{-1}(s) \ (0 < s < A^{-1}) \quad (10)$$

Легко проверить, что при условии $t \geq C_1 = C_1(A) = \sqrt{2 \log_2(2A)}$ для $k_t = [t^2] - 1$ выполнено:

$$2^{-k_t/2} < A^{-1} \quad (11)$$

Следовательно, ввиду (8) и (10)

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \geq \psi^{-1}(2^{-k_t}) \quad (12)$$

По определению функции ψ , учитывая (11), получаем:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(2^{-k_t}) &= A^{-1} \phi_a \left(A^{-1/2} \ln^{1/2}(A^{-1} 2^{k_t}) \right) \geq A^{-1} \phi_a \left(\sqrt{k_t \ln 2 / (2A)} \right) \geq \\ &\geq A^{-3/2} \sqrt{\ln 2 / 2} \phi_a(\sqrt{k_t}) \geq A^{-3/2} \sqrt{\ln 2 / 2} t^{-1} \sqrt{k_t} \phi_a(t), \end{aligned}$$

так как $\phi_a \in \mathcal{P}$ и $\sqrt{k_t} \leq t$. Ввиду того, что $t \geq C_1 \geq \sqrt{2}$,

$$\frac{\sqrt{k_t}}{t} \geq \frac{\sqrt{[t^2] - 1}}{\sqrt{[t^2] + 1}} \geq 3^{-1/2}.$$

Поэтому из (12) и последних неравенств следует:

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \geq C_2 \phi_a(t) \ (t \geq C_1),$$

где $C_2 = C_2(A) = \sqrt{\ln 2 / 6} A^{-3/2}$.

Если теперь $t \geq 1$, то ввиду вогнутости $\mathcal{K}$ -функционала как функции t и предыдущего неравенства

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) \geq C_1^{-1} \mathcal{K}(t C_1, x; L_\infty, G) \geq C_2 / C_1 \phi_a(C_1 t) \geq C_2 / C_1 \phi_a(t).$$

Если же $0 < t \leq 1$, то, используя неравенства $\|a\|_2 \leq \|a\|_1 \ (a \in l_1)$ и $\|x\|_G \leq \|x\|_\infty \ (x \in L_\infty)$, определение $\mathcal{K}$ -функционала и теорему А, получаем:

$$\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G) = t \|x\|_G \geq C_3 t \|a\|_2 = C_3 \phi_a(t).$$

Таким образом, для $C = \max(C_3^{-1}, C_1/C_2)$

$$\mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) \leq C\mathcal{K}(t, Ta; L_\infty, G) \quad (13)$$

Если $a \in l_1$, то ввиду (9) можно считать, что функция ϕ_a взаимно однозначно отображает $(0, \infty)$ на интервал $(0, \|a\|_1)$. Следовательно, определены отображения $\phi_a^{-1} : (0, \|a\|_1) \rightarrow (0, \infty)$, $\psi : (0, A^{-1}\|a\|_1) \rightarrow (0, A^{-1})$ и $\psi^{-1} : (0, A^{-1}) \rightarrow (0, A^{-1}\|a\|_1)$. Далее доказательство неравенства (13) проводится так же, как в уже рассмотренном случае.

Неравенство, противоположное (13), следует из теоремы А и соотношения (3):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, Ta; L_\infty, G) &\leq \inf\{\|Ta^0\|_\infty + t\|Ta^1\|_G : a = a^0 + a^1, a^0 \in l_1, a^1 \in l_2\} \leq \\ &\leq D\mathcal{K}(t, a; l_1, l_2). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

в) Утверждение теоремы 2 – непосредственное следствие теоремы 1 и определения пространств вещественного $\mathcal{K}$ -метода.

с) Доказательство теоремы 3. Мы начнем с вспомогательных утверждений, представляющих и некоторый самостоятельный интерес. Для формулировки и доказательства их нам понадобится несколько определений.

Функция растяжения $\mathcal{M}_f$ функции f , определенной на $(0, l)$, где $l = 1$ или $l = \infty$, задается равенством:

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup \left\{ \frac{f(st)}{f(s)} : s, st \in (0, l) \right\} \quad (t \in (0, l)).$$

При этом числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t}, \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t}$$

называются показателями растяжения функции f .

Банахова пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называется частичным ретрактом пары $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, если каждый $x \in X_0 + X_1$ орбитально эквивалентен некоторому $y \in Y_0 + Y_1$. Последнее означает, что существуют линейные операторы $U : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ и $V : \vec{Y} \rightarrow \vec{X}$, для которых $Ux = y$ и $Vy = x$.

Предложение 1. Если $M(\phi)$ – пространство Марцинкевича на $[0, 1]$, построенное по функции $\phi \in \mathcal{P}$ с показателем $\gamma_f > 0$, то пара $\vec{X} = (L_\infty, M(\phi))$ $\mathcal{K}$ -монотонна.

Доказательство. Мы покажем, что пара $\vec{X}$ – частичный ретракт пары $\vec{Y} = (L_\infty, L_\infty(\tilde{\phi}))$, где

$$\|x\|_{L_\infty(\tilde{\phi})} = \sup_{0 < t \leq 1} \tilde{\phi}(t)|x(t)|, \quad \tilde{\phi}(t) = t/\phi(t).$$

Так как по теореме Спарра [12] пара $\vec{Y}$ $\mathcal{K}$ -монотонна, а частичный ретракт $\mathcal{K}$ -монотонной пары – тоже $\mathcal{K}$ -монотонная пара [11, р.420], то тогда предложение будет доказано.

Итак, пусть $x \in M(\phi)$ (так как $L_\infty \subset M(\phi)$, то $L_\infty + M(\phi) = M(\phi)$). Не ограничивая общности [2, с.87], можно считать, что $x(t) = x^*(t)$. Для $y \in M(\phi)$ определим оператор

$$U_1 y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \int_0^{2^{-k}} y(s) ds \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t).$$

В силу вогнутости ϕ и свойств перестановки

$$\|U_1 y\|_{L_\infty(\tilde{\phi})} \leq 2 \sup_{k=1,2,\dots} (\phi(2^{-k+1}))^{-1} \int_0^{2^{-k}} y^*(s) ds \leq 2 \|y\|_{M(\phi)}.$$

и значит, $U_1 : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$.

Так как $x(t)$ не возрастает, то $U_1 x(t) \geq x(t)$. Поэтому линейный оператор

$$U y(t) = \frac{x(t)}{U_1 x(t)} U_1 y(t)$$

также ограничен из пары $\vec{X}$ в пару $\vec{Y}$ и $U x(t) = x(t)$.

В качестве V возьмем просто тождественный оператор, т.е. $V y(t) = y(t)$. Так как $\gamma_f > 0$, то ввиду [2, с.156]

$$\|V y\|_{M(\phi)} \leq C \sup_{0 < t \leq 1} \tilde{\phi}(t) y^*(t) \leq C \sup_{0 < t \leq 1} \tilde{\phi}(t) |y(t)| = C \|y\|_{L_\infty(\tilde{\phi})}.$$

Поэтому $V : \vec{Y} \rightarrow \vec{X}$ и $V x = x$.

Таким образом, произвольный $x \in M(\phi)$ орбитально эквивалентен самому себе как элементу пространства $L_\infty + L_\infty(\tilde{\phi})$, и значит, пара $\vec{X}$ – частичный ретракт пары $\vec{Y}$.

Следствие. Если $M(\phi)^0$ – замыкание L_∞ в $M(\phi)$ и $\gamma_f > 0$, то пара $(L_\infty, M(\phi)^0)$ $\mathcal{K}$ -монотонна.

Доказательство. Предположим, что $x, y \in M(\phi)^0$ и

$$\mathcal{K}(t, y; L_\infty, M(\phi)^0) \leq \mathcal{K}(t, x; L_\infty, M(\phi)^0) \quad (t > 0).$$

Так как для $z \in M(\phi)^0$

$$\mathcal{K}(t, z; L_\infty, M(\phi)^0) = \mathcal{K}(t, z; L_\infty, M(\phi)) \quad (t > 0),$$

то одновременно

$$\mathcal{K}(t, y; L_\infty, M(\phi)) \leq \mathcal{K}(t, x; L_\infty, M(\phi)) \quad (t > 0).$$

Следовательно, ввиду предложения 1 существует $T : (L_\infty, M(\phi)) \rightarrow (L_\infty, M(\phi))$, такой, что $y = Tx$. Непосредственно из определения пространства $M(\phi)^0$ следует, что оно интерполяционно относительно пары $(L_\infty, M(\phi))$. Поэтому $T : (L_\infty, M(\phi)^0) \rightarrow (L_\infty, M(\phi)^0)$, и следствие доказано.

В дальнейшем нам понадобятся два подконуса конуса $\mathcal{P}$. Через $\mathcal{P}_0$ обозначим множество всех функций f из конуса $\mathcal{P}$, для которых $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/t = 0$.

Если $f \in \mathcal{P}$, то $0 \leq \gamma_f \leq \delta_f \leq 1$ [2, с.76]. Пусть $\mathcal{P}^{+-}$ – множество всех $f \in \mathcal{P}$, таких, что $0 < \gamma_f \leq \delta_f < 1$. Очевидно, $\mathcal{P}^{+-} \subset \mathcal{P}_0$.

Пара (X_0, X_1) называется $\mathcal{K}_0$ -полной, если для любой функции $f \in \mathcal{P}_0$ существует $x \in X_0 + X_1$, для которого

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \asymp f(t).$$

Иначе говоря, множество $\mathcal{K}(X_0 + X_1)$ всех $\mathcal{K}$ -функционалов $\mathcal{K}_0$ -полной пары (X_0, X_1) с точностью до эквивалентности содержит $\mathcal{P}_0$.

Предложение 2. Пара $(L_1(0, \infty), L_2(0, \infty))$ $\mathcal{K}_0$ -полна.

Доказательство. Ввиду функционального варианта формулы Т.Хольмстедта [14]

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \asymp \max \left\{ \int_0^{t^2} x^*(s) ds, t \left[\int_{t^2}^\infty (x^*(s))^2 ds \right]^{1/2} \right\} \quad (14)$$

Если $f \in \mathcal{P}_0$, то функция $g(t) = f(t^{1/2})$ также принадлежит классу $\mathcal{P}_0$. Обозначим $x(t) = g'(t)$. Тогда $x(t) = x^*(t)$ и

$$\int_0^t x(s) ds = g(t). \quad (15)$$

Предположим, что $f \in \mathcal{P}^{+-}$, и поэтому, в частности, $\delta_f < 1$. Тогда найдется $\epsilon > 0$, такое, что для некоторого $C > 0$

$$g(s) = f(s^{1/2}) \leq C(\sqrt{s/t})^{1-\epsilon} f(t^{1/2}) \quad (s \geq t).$$

Так как $g \in \mathcal{P}_0$, то $g'(t) \leq g(t)/t$. Значит, при $t > 0$

$$\int_t^\infty (x(s))^2 ds \leq \int_t^\infty \frac{g^2(s)}{s^2} ds \leq C^2 t^{\epsilon-1} (f(t^{1/2}))^2 \int_t^\infty s^{-1-\epsilon} ds = C^2 \epsilon t^{-1} (g(t))^2$$

Из соотношений (14) и (15) тогда получаем:

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \asymp g(t^2) = f(t),$$

и, следовательно, $\mathcal{K}(L_1 + L_2) \supset \mathcal{P}^{+-}$.

Так как для $\mathcal{K}_0$ -полноты банаховой пары (X_0, X_1) достаточно того, чтобы $\mathcal{K}(X_0 + X_1) \cap \mathcal{P}^{+-}$ было не пусто [15, 4.5.7], предложение доказано.

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех функций $f \in \mathcal{P}$, для которых $f(t) = f(1)t$ ($0 < t \leq 1$) и $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/t = 0$.

Следствие. Если $\mathcal{K}(l_1 + l_2)$ – множество всех $\mathcal{K}$ -функционалов, соответствующее паре (l_1, l_2) , то

$$\mathcal{K}(l_1 + l_2) \supset \mathcal{F}.$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [4, с.142]), что для $x \in L_1(0, \infty) + L_\infty(0, \infty)$

$$\mathcal{K}(u, x; L_1, L_\infty) = \int_0^u x^*(s) ds \quad (u > 0). \quad (16)$$

и

$$L_1 = (L_1, L_\infty)_{l_\infty}^{\mathcal{K}}, \quad L_2 = (L_1, L_\infty)_{l_2(2^{-k/2})}^{\mathcal{K}}.$$

Параметры l_∞ и $l_2(2^{-k/2})$ интерполяционны относительно пары $\vec{l}_\infty = (l_\infty, l_\infty(2^{-k}))$ [4, с.157], и значит, по реитерационным соображениям (см. [16] или [17]) для $x \in L_1 + L_2$

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \asymp \mathcal{K}(t, \mathcal{K}(\cdot, x; L_1, L_\infty); l_\infty, l_2(2^{-k/2})) \quad (17)$$

Обозначим через Q оператор усреднения по системе промежутков $\{(k-1, k]\}_{k=1}^\infty$, т.е.

$$Qx(t) = \sum_{k=1}^\infty \int_{k-1}^k x(s) ds \chi_{(k-1, k]}(t) \quad (t > 0).$$

Из (16) следует, что для $t = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{K}(t, Qx^*; L_1, L_\infty) = \mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty)$$

Так как функции в последнем соотношении – вогнутые по t , то отсюда

$$\mathcal{K}(t, Qx^*; L_1, L_\infty) \asymp \mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty) \quad (t \geq 1).$$

Поэтому ввиду (17)

$$\mathcal{K}(t, Qx^*; L_1, L_2) \asymp \mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \quad (t \geq 1) \quad (18)$$

Пусть теперь $f \in \mathcal{F}$ произвольна. Так как $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_0$, то в силу предложения 2 существует функция $x \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$, для которой

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_2) \asymp f(t) \quad (19).$$

Ясно, что Q – проектор в L_1 и в L_2 с нормой 1 и $Q(L_1) = l_1$, $Q(L_2) = l_2$. Следовательно, по теореме о дополняемых подпарах, упомянутой в первой части работы (см. [5] или [6, с.136]),

$$\mathcal{K}(t, Qx^*; L_1, L_2) \asymp \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) \quad (t > 0),$$

где $a = (\int_{k=1}^k x^*(s)ds)_{k=1}^\infty$.

Таким образом, ввиду (18) и (19) для $t \geq 1$

$$\mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) \asymp f(t).$$

Последнее соотношение справедливо и при $0 < t \leq 1$, так как в этом случае

$$\mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) = t\|a\|_2 = t\mathcal{K}(1, a; l_1, l_2) \asymp tf(1) = f(t).$$

Следствие доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Как уже упоминалось в доказательстве теоремы 1, пространство Орлича $L_N(N(t) = \exp(t^2) - 1)$ совпадает с пространством Марцинкевича $M(\phi_1)$, где $\phi_1(u) = u \log_2^{1/2}(2/u)$. Так как $\gamma_{\phi_1} = 1$, то, по следствию из предложения 1, банахова пара (L_∞, G) ($G = L_N^0$) $\mathcal{K}$ -монотонна. Следовательно, для некоторых параметров вещественного $\mathcal{K}$ -метода E_0 и E_1

$$X_0 = (L_\infty, G)_{E_0}^{\mathcal{K}}, \quad X_1 = (L_\infty, G)_{E_1}^{\mathcal{K}} \quad (20)$$

Поэтому по теореме 2

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{X_i} \asymp \|(a_k)\|_{F_i},$$

где $F_i = (l_1, l_2)_{E_i}^{\mathcal{K}}$ ($i = 0, 1$). Значит, по условию

$$(l_1, l_2)_{E_0}^{\mathcal{K}} = (l_1, l_2)_{E_1}^{\mathcal{K}} \quad (21)$$

Последнее равенство означает, что нормы пространств E_0 и E_1 эквивалентны на множестве $\mathcal{K}$ -функционалов $\mathcal{K}(l_1 + l_2)$, соответствующем паре (l_1, l_2) . Покажем, что с точностью до эквивалентности оно совпадает со множеством $\mathcal{K}$ -функционалов $\mathcal{K}(L_{\infty} + G)$, соответствующим паре (L_{∞}, G) . А именно, проверим, что

$$\mathcal{K}(l_1 + l_2) = \mathcal{K}(L_{\infty} + G) = \mathcal{F} \quad (22)$$

Действительно, по теореме 1 и следствию из предложения 2 $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(l_1 + l_2) \subset \mathcal{K}(L_{\infty} + G)$. С другой стороны, так как $L_{\infty} \subset G$ с константой вложения 1 и L_{∞} всюду плотно в G , то $\mathcal{K}(L_{\infty} + G) \subset \mathcal{F}$ [11, п.386].

Пусть теперь $x \in X_0$. Ввиду (20) это означает, что $(\mathcal{K}(2^k, x; L_{\infty}, G))_k \in X_0$. Применяя (22), найдем $a \in l_2$, для которой

$$\mathcal{K}(2^k, a; l_1, l_2) \asymp \mathcal{K}(2^k, x; L_{\infty}, G) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Так как параметр $\mathcal{K}$ -метода – идеальное пространство, то отсюда $(\mathcal{K}(2^k, a; l_1, l_2))_k \in E_0$, а значит, ввиду (21) $(\mathcal{K}(2^k, a; l_1, l_2))_k \in E_1$. Поэтому $(\mathcal{K}(2^k, x; L_{\infty}, G))_k \in E_1$ или $x \in X_1$. Итак, $X_0 \subset X_1$. Обратные рассуждения показывают, что $X_1 \subset X_0$, т.е. $X_0 = X_1$ по запасу элементов. Так как это банаховы идеальные пространства, то они изоморфны (нормы эквивалентны), и теорема 3 доказана.

3. Заключительные замечания и примеры.

Замечание 1. Теоремы 1 – 3 легко переносятся на лакунарные тригонометрические ряды [18]. Более того, ввиду результатов работы [19] то же самое справедливо для систем характеров компактной абелевой группы, обладающих свойством Сидона.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 становится, конечно, неверным, если пространство G в ее формулировке заменить на L_q при некотором $q < \infty$. Действительно, если предположить, что $(T(l_1), T(l_2))$ – $\mathcal{K}$ -подпара пары (L_∞, L_q) , то

$$\mathcal{K}(t, a; l_1, l_2) \asymp \mathcal{K}(t, Ta; L_\infty, L_q).$$

Тогда, применяя к парам (l_1, l_2) и (L_∞, L_q) $\mathcal{K}$ -метод интерполяции с параметром $E = l_p(2^{-\theta k})$, $0 < \theta < 1$, $p = q/\theta$, получим [4, с.142]:

$$\|Ta\|_p \asymp \|a\|_{r,p} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^*)^p k^{p/r-1} \right\}^{1/p},$$

где $r = 2/(2 - \theta) < 2$. Последнее противоречит соотношению (2).

Замечание 3. Если пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ является частичным ретрактом пары $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, то, как легко проверить, $\vec{X}$ будет и $\mathcal{K}$ -подпарой $\vec{Y}$. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места (заметим, что в работе [20] приведены интересные примеры $\mathcal{K}$ -подпар, являющихся одновременно и частичными ретрактами).

Действительно, по теореме 1 пара (l_1, l_2) – подпара пары (L_∞, G) . Предположим, что, более того, (l_1, l_2) – ее частичный ретракт. Тогда (см. доказательство предложения 1) (l_1, l_2) – частичный ретракт также и пары $(L_\infty, L_\infty(\log_2^{-1/2}(2/t)))$. Отсюда по лемме 1 из [21] и [4, с.142] заключаем, что для $0 < \theta < 1$ пространство комплексного метода интерполяции [4]

$$[l_1, l_2]_\theta = (l_1, l_2)_{\theta, \infty} = l_{p, \infty},$$

где $p = 2/(2 - \theta)$.

В то же время, хорошо известно [4, с.139], что

$$[l_1, l_2]_\theta = l_p, \quad p = 2/(2 - \theta).$$

Следовательно, наше исходное предположение неверно, и пара (l_1, l_2) не является частичным ретрактом пары (L_∞, G) .

Теорема 2 позволяет находить координатные пространства последовательностей коэффициентов рядов по системе Радемахера для широкого класса функциональных с.п.

Пример 1. Пусть X – пространство Марцинкевича $M(\phi)$, где $\phi(t) = t \log_2 \log_2(16/t)$ ($0 < t \leq 1$). Покажем, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{M(\phi)} \asymp \|a\|_{l_1(\log)}, \quad (23)$$

где $l_1(\log)$ – пространство всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|a\|_{l_1(\log)} = \sup_{k=1,2,\dots} \log_2^{-1}(2k) \sum_{i=1}^k a_i^* \quad (24)$$

По теореме 2 для доказательства (23) достаточно проверить, что при некотором параметре $\mathcal{K}$ -метода F

$$(l_1, l_2)_{\mathcal{K}_F}^{\mathcal{K}} = l_1(\log) \quad (25)$$

и

$$(L_{\infty}, G)_{\mathcal{K}_F}^{\mathcal{K}} = M(\phi) \quad (26)$$

Покажем, что (25) и (26) справедливы с $F = l_{\infty}(u_k)$, $u_k = 1/(k+1)$, если $k \geq 0$, и $u_k = 1$, если $k < 0$.

Докажем сначала (25). По формуле Т.Хольмстедта (9) при $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi_a(2^k) \leq \sum_{i=1}^{2^{2k}} a_i^* + 2^k \left[\sum_{i=2^{2k+1}}^{\infty} (a_i^*)^2 \right]^{1/2} \leq B \phi_a(2^k), \quad (27)$$

где, по-прежнему, $\phi_a(t) = \mathcal{K}(t, a; l_1, l_2)$. Не ограничивая общности, считаем, что $a_i = a_i^*$. Если $\|a\|_{l_1(\log)} = R < \infty$, то ввиду (24)

$$\sum_{i=1}^{2^{2k}} a_i^* \leq 2R(k+1) \quad (28)$$

Отсюда, в частности, $a_{2^{2k}} \leq 2^{-2k+1} R(k+1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Применяя последнее неравенство, оценим второе слагаемое в формуле для $\mathcal{K}$ -функционала (27):

$$\sum_{i=2^{2k+1}}^{\infty} a_i^2 = \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=2^{2j+1}}^{2^{2(j+1)}} a_i^2 \leq 3 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{2j} a_{2^{2j}}^2 \leq$$

$$\leq 12R^2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-2j} (j+1)^2 \leq 192R^2 \int_{k+1}^{\infty} x^2 2^{-2x} dx \leq 144R^2 (k+1)^2 2^{-2k}$$

Следовательно, второе слагаемое в (27) не превосходит $12R(k+1)$. Поэтому ввиду (28) $\|a\|_E$ в пространстве $E = (l_1, l_2)_F^{\mathcal{K}}$ удовлетворяет неравенству:

$$\|a\|_E = \sup_{k=0,1,\dots} \frac{\phi_a(2^k)}{k+1} \leq 14\|a\|_{l_1(\log)}.$$

Обратно, если $2^{2j} + 1 \leq k \leq 2^{2(j+1)}$ ($j = 0, 1, \dots$), то из (27) следует:

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq B\phi_a(2^{j+1}) \leq \sum_{i=1}^{2^{2(j+1)}} a_i \leq B\|a\|_E(j+2) \leq 2B \log_2(2k)\|a\|_E.$$

Отсюда $\|a\|_{l_1(\log)} \leq 2B\|a\|_E$, и равенство (25) доказано.

Перейдем теперь к функциональным пространствам. Сначала напомним определение еще одной интерполяционной конструкции (являющейся, на самом деле, частным случаем вещественного метода интерполяции).

Пусть $\phi \in \mathcal{P}$. Для произвольной банаховой пары (X_0, X_1) определим обобщенное пространство Марцинкевича:

$$M_{\phi}(X_0, X_1) = \left\{ x \in X_0 + X_1 : \sup_{t>0} \frac{\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)}{\phi(t)} < \infty \right\}.$$

Ввиду соотношения (16) для пространств функций, определенных на $[0, 1]$,

$$L_{\infty} = M_{\phi_0}(L_1, L_{\infty}), \quad L_N = M_{\phi_1}(L_1, L_{\infty}),$$

где $\phi_0(t) = \min(1, t)$, $\phi_1(t) = \min(1, t \log_2^{1/2}[\max(2, 2/t)])$ и, как и ранее, $N(t) = \exp(t^2) - 1$. Кроме того, используя аналогичные обозначения, нетрудно показать, что для произвольной банаховой пары (X_0, X_1)

$$(X_0, X_1)_F^{\mathcal{K}} = M_{\rho}(X_0, X_1),$$

где $\rho(t) = \log_2(4 + t)$. Следовательно, по теореме реитерации для обобщенных пространств Марцинкевича [11, p.428]

$$(L_{\infty}, L_N)_F^{\mathcal{K}} = M_{\rho}(M_{\phi_0}(L_1, L_{\infty}), M_{\phi_1}(L_1, L_{\infty})) = M_{\phi_{\rho}}(L_1, L_{\infty}) = M(\phi_{\rho}),$$

где $\phi_\rho(t) = \phi_0(t)\rho(\phi_1(t)/\phi_0(t))$. После несложных вычислений получаем, что $\phi_\rho(t) \asymp \phi(t)$ ($t > 0$). Таким образом,

$$(L_\infty, L_N)_F^K = M(\phi).$$

На пространстве G $\mathcal{K}$ -функционалы $\mathcal{K}(t, x; L_\infty, G)$ и $\mathcal{K}(t, x; L_\infty, L_N)$, а значит, и нормы пространств $Y = (L_\infty, G)_F^K$ и $M(\phi) = (L_\infty, L_N)_F^K$ совпадают. С другой стороны, так как для $x \in M(\phi)$

$$\frac{1}{t \log_2^{1/2}(2/t)} \int_0^t x^*(s) ds \leq \|x\|_{M(\phi)} \frac{\log_2 \log_2(16/t)}{\log_2^{1/2}(2/t)} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0+$, то $M(\phi) \subset G$ [2, с.156].

Таким образом, $Y = M(\phi)$, и тем самым соотношение (26) доказано. Эквивалентность (23) следует теперь, как уже говорилось, из (25) и (26).

Замечание 4. Нетрудно показать, что норма оператора растяжения

$$\sigma_n a = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_n, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_n, \dots) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

в пространстве $l_1(\log)$ равна n . Поэтому условие (11) работы [3] для этого пространства не выполнено, и значит, к нему не применимы теорема 2 из [3] и теорема 1 из [20]. Точно так же пространство Марцинкевича $M(\phi)$ из примера 1 не удовлетворяет условиям теоремы 8 работы [3].

Теоремы 2 и 3 могут быть использованы и для получения конкретных интерполяционных соотношений.

Пример 2. Напомним, что с.п. Лоренца $\Lambda_p(\phi)$ ($\phi \in \mathcal{P}, 1 \leq p < \infty$) состоит из всех измеримых $x = x(s)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\phi, p} = \left\{ \int_0^1 (x^*(s))^p d\phi(s) \right\}^{1/p}.$$

В [3] показано, что для $\phi(s) = \log_2^{1-p}(2/s)$ и $1 < p < 2$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{\phi, p} \asymp \|(a_k)\|_p,$$

причем пространство $\Lambda_p(\phi)$ – единственное среди с.п., обладающее этим свойством.

Так как $l_p = (l_1, l_2)_{\theta, p}$, где $\theta = 2(p-1)/p$ [4, с.142], то по теореме 2 для этих p и θ справедливо равенство:

$$(L_\infty, G)_{\theta, p} = \Lambda_p(\phi).$$

Асташкин Сергей Владимирович

Самарский госуниверситет

443011 г.Самара, ул. акад. Павлова, 1

тел. (8462) 51-27-26 (дом.), (8462) 34-53-37 (раб.)

e-mail: astashkn@ssu.samara.emnet.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.1. М.: Мир, 1965.
2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
3. Rodin V.A., Semyonov E.M. Rademacher series in symmetric spaces// Analysis Math. 1975. V.1, No.3. P.207-222.
4. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
5. Baouendi M.S., Goulaui C. Commutation de l'interpolation et des foncteurs d'interpolation// C.R.Acad.Sci. Paris. 1968. V.265. P.313-315.
6. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
7. Wallsten R. Remarks on interpolation of subspaces// Lect. Notes Math. 1988. V.1302. P.410-419.
8. Родин В.А., Семенов Е.М. О дополняемости подпространства, порожденного системой Радемахера, в симметричном пространстве// Функц. анализ и его прил. 1979. Т.13, вып.2. С.91-92.
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces 2. Berlin: Springer-Verlag. 1979.
10. Montgomery-Smith S. The distribution of Rademacher sums// Proc. of the American Math. Society. 1990. V.109, No.2. P.517-522.
11. Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory// Math. Rept. 1984. V.1. P.349-515.
12. Sparr G. Interpolation of weighted L_p -spaces// Studia Math. 1978. V.62. P.229-271.
13. Родин В.А. Ряды Фурье в симметричном пространстве и интерполяция операторов. Диссертация на соискание звания кандидата физ.-мат. наук. Воронеж. 1973.

14. Holmstedt T. Interpolation of quasi-normed spaces//Math. Scand.1970. V.26.P.177-199.
15. Brudnyi Yu.A.,Kruglyak N.Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces 1.North-Holland,1991.
16. Брудный Ю.А.,Кругляк Н.Я. Функторы вещественной интерполяции//ДАН СССР.1981.Т.256,№1.С.14-17.
17. Nilsson P. Reiteration theorems for real interpolation and approximation spaces//Ann.Mat.Pura Appl. 1982.V.32.P.291-330.
18. Jakubowski J.,Kwapien S. On multiplicative systems of functions//Bull. Acad.pol.sci.,Ser.sci.math.1979.V.27, No.9.P.689-694.
19. Asmar N.H.,Montgomery-Smith S. On the distribution of Sidon series//Arkiv for matematik.1993.V.31,№.1.P.13-26.
20. Кисляков С.В.,Куанхуа Шу. Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы//Алгебра и анализ.1996.Т.8,№4.С.75-109.
21. Асташкин С.В. $\mathcal{K}$ -монотонные весовые пары, порожденные пространством, не инвариантным относительно сдвига (в печати).
22. Родин В.А.,Семенов Е.М. Функции распределения рядов Радемахера//Тезисы докладов 3 Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам.Туапсе.1996.

СЛОВАРЬ

измеримая функция – measurable function
симметричное пространство – symmetric space
пространства Лоренца, Марцинкевича, Орлича – Lorentz, Marcinkiewicz, Orlicz spaces
перестановка – rearrangement
функции Радемахера – Rademacher functions
неравенство Хинчина – Khintchine's inequality
банахова пара – the Banach couple
подпара – subcouple
интерполяционное пространство – interpolation space
вещественный К-метод – the real K-method
оператор растяжения – the dilation operator
Петре – Peetre