

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА

С. В. Асташкин, Ю. Е. Ким

В связи с тем, что функторы вещественного метода интерполяции, параметры которых – l -пространства с “весами”, интерполируют билинейные операторы [1], нетрудно получить следующую интерполяционную теорему для пространств Лоренца $\Lambda(\varphi)$ [2]. Если T – билинейный оператор, ограниченный из $\Lambda(\varphi_0) \times \Lambda(\psi_0)$ в $\Lambda(\theta_0)$ и из $\Lambda(\varphi_1) \times \Lambda(\psi_1)$ в $\Lambda(\theta_1)$, то для любой квазивогнутой функции $\rho = \rho(t)$ T ограничен из $\Lambda(\varphi_\rho) \times \Lambda(\psi_\rho)$ в $\Lambda(\theta_\rho)$, где

$$\varphi_\rho = \varphi_0 \rho \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right), \quad \psi_\rho = \psi_0 \rho \left(\frac{\psi_1}{\psi_0} \right), \quad \theta_\rho = \theta_0 \rho \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right).$$

Основная цель этой работы – доказательство подобной теоремы для пространств Марцинкевича. По аналогии с приведенным случаем весьма естественным выглядит использование для этого функторов вещественного метода с ℓ_∞ -параметрами. Однако, таким образом мы не получим требуемого результата даже в случае степенной функции $\rho(t)$ (см. теорему 3 из [1]). Заметим, кроме того, что функции $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ ($i = 0, 1$) должны удовлетворять определенным условиям, так как в общей ситуации билинейная интерполяционная теорема для пространств Марцинкевича неверна (см. замечание 3 ниже). В статье теорема доказана при условии, что показатели растяжения этих функций нетривиальны. Она оказывается следствием общих билинейных интерполяционных теорем для функторов Петре [3] и Петре–Густавсона [4].

В заключение несколько слов о структуре статьи. Первая часть содержит определения и обозначения из теории интерполяции, играющие в дальнейшем важную роль. Во второй получены теоремы для функторов Петре и Петре–Густавсона. И, наконец, третья посвящена приложениям: здесь речь идет об интерполяции билинейных операторов в ℓ_∞ -пространствах последовательностей, а также в пространствах Марцинкевича.

1. Введение. Напомним некоторые определения из теории интерполяции линейных операторов (подробнее см. [2] или [5]).

Тройка банаховых пространств (X_0, X_1, X) называется *интерполяционной относительно тройки* (Y_0, Y_1, Y) , если непрерывность линейного оператора T из X_i в Y_i ($i = \overline{0, 1}$) влечет за непрерывность T из X в Y . Под интерполяционным функтором понимается функтор F , действующий из категории банаховых пар в категорию банаховых пространств так, что для произвольных пар $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ тройка $(X_0, X_1, F(\vec{X}))$ интерполяционна относительно тройки $(Y_0, Y_1, F(\vec{Y}))$.

В дальнейшем $\rho = \rho(t)$ – положительная квазивиогнутая функция, т.е. $\rho(t)$ возрастает, а $\rho(t)/t$ убывает при $t > 0$; функция растяжения

$$\mathcal{M}(t) = \sup_{s>0} \frac{\rho(st)}{\rho(s)} \quad (t > 0).$$

Как известно [2], существуют числа

$$\gamma_\rho = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}(t)}{\ln t}, \quad \delta_\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}(t)}{\ln t},$$

которые называют нижним и верхним показателями растяжения функции ρ . Если ρ квазивиогнута, то $0 < \gamma_\rho \leq \delta_\rho \leq 1$.

Определим интерполяционные функторы Петре $\langle \vec{X} \rangle_\rho$ [3] и Петре–Густавсона $\langle \vec{X}, \rho \rangle$ [4], введенные в связи с интерполяцией пространств Орлица.

В пространство $\langle \vec{X} \rangle_\rho$ входят все $x \in X_0 + X_1$, допускающие представление

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1), \quad \text{где } x_n \in X_0 \cap X_1 \quad (1)$$

и последовательности $\{x_n/\rho(2^n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{2^n x_n/\rho(2^n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ сходятся безусловно в X_0 и X_1 соответственно. Норма в этом пространстве $\|x\|_\rho = \inf C$, где

$$C = \max \left\{ \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n x_n}{\rho(2^n)} \right\|_{X_0}, \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n 2^n x_n}{\rho(2^n)} \right\|_{X_1} \right\} \quad (2)$$

и $\inf$ берется по всем представлениям x . Через $\langle \vec{X}, \rho \rangle$ обозначим множество всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление (1), где $x_n \in X_0 \cap X_1$ и последовательности $\{x_n/\rho(2^n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{2^n x_n/\rho(2^n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ сходятся слабо безусловно в X_0 и X_1 соответственно [4]. Норма в пространстве $\langle \vec{X}, \rho \rangle$ $\|x\| = \inf C$, где

$$C = \max \left\{ \sup_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ F \subset \mathbb{Z}}} \left\| \sum_{k \in F} \frac{\varepsilon_k x_k}{\rho(2^k)} \right\|_{X_0}, \sup_{\substack{\varepsilon_k = \pm 1 \\ F \subset \mathbb{Z}}} \left\| \sum_{k \in F} \frac{\varepsilon_k 2^k x_k}{\rho(2^k)} \right\|_{X_1} \right\}$$

($F \subset \mathbb{Z}$ – конечное множество) и $\inf$ берется по всем представлениям x .

В заключение напомним определения функторов вещественного метода интерполяции, построенных по ℓ_∞ -параметрам. Для банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{F}$ -функционалы Петре [6]:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(t, x; \vec{X}) &= \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}; x_0 + x_1 = x, x_i \in X_i \} \\ &\quad (x \in X_0 + X_1); \\ \mathcal{F}(t, x; \vec{X}) &= \max \{ \|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1} \} \quad (x \in X_0 \cap X_1).\end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \sup_j \frac{\mathcal{K}(2^j, x; \vec{X})}{\rho(2^j)}.$$

Пространство $\mathcal{F}$ -метода $(X_0, X_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{F}}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление (1), где $x_n \in X_0 \cap X_1$, и норма определяется следующим образом:

$$\|x\| = \inf_n \sup \frac{\mathcal{F}(2^n, x_n; \vec{X})}{\rho(2^n)},$$

где $\inf$ берется по всем представлениям x .

2. Общие интерполяционные теоремы для билинейных операторов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho = \rho(t)$ – квазивогнутая функция на полуоси $(0, \infty)$, удовлетворяющая условиям

- 1) $0 < \gamma_\rho \leq \delta_\rho < 1$;
- 2) существует такое $\alpha > 0$, что для любых $u > 0$, $v > 0$ выполнено неравенство

$$\rho(u) \cdot \rho(v) \leq \alpha \rho(u, v). \quad (3)$$

Предположим, что $\vec{X} = (X_0, X_1)$, $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, $\vec{Z} = (Z_0, Z_1)$ произвольные банаховы пары и T – билинейный оператор, непрерывный из $X_0 \times Y_0$ в Z_0 и $X_1 \times Y_1$ в Z_1 . Тогда T можно продолжить до билинейного оператора, непрерывного из $\langle \vec{X} \rangle_\rho \times \langle \vec{Y} \rangle_\rho$ в $(Z_0, Z_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть X, Y – банаховы пространства, $F \subset \mathbb{Z}$ конечно, $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset Y$ и

$$C_1 = \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n \in F} \varepsilon_n x_n \right\|_X, \quad C_2 = \sup_{\delta_m = \pm 1} \left\| \sum_{m \in F} \delta_m y_m \right\|_Y.$$

Если T – билинейный оператор, непрерывный из $X \times Y$ в банахово пространство Z , то

$$\left\| \sum_{n \in F} T(x_n, y_n) \right\|_Z \leq C_1 C_2 \|T\|. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, ввиду непрерывности и билинейности T

$$\left\| \sum_{n \in F} \sum_{m \in F} T(\varepsilon_n x_n, \delta_m y_m) \right\|_Z = \left\| T \left(\sum_{n \in F} \varepsilon_n x_n, \sum_{m \in F} \delta_m y_m \right) \right\|_Z \leq \|T\| C_1 C_2. \quad (5)$$

Пусть $\min F = s$. Применяя (5) сначала для $\delta_s = \varepsilon_s = 1$, а потом для $\delta_s = \varepsilon_s = -1$, получим

$$\begin{aligned} & \left\| T(x_s, y_s) + \sum_{m \in G} T(x_s, \delta_m y_m) + \sum_{n \in G} T(\varepsilon_n x_n, y_s) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n \in G} \sum_{m \in G} T(\varepsilon_n x_n, \delta_m y_m) \right\|_Z \leq \|T\| C_1 C_2, \\ & \left\| T(x_s, y_s) + \sum_{m \in G} T(x_s, \delta_m y_m) - \sum_{n \in G} T(\varepsilon_n x_n, y_s) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n \in G} \sum_{m \in G} T(\varepsilon_n x_n, \delta_m y_m) \right\|_Z \leq \|T\| C_1 C_2, \end{aligned}$$

где $G = F \setminus \{s\}$. Переходя к среднему арифметическому левых частей последних неравенств, приходим к соотношению

$$\left\| T(x_s, y_s) + \sum_{n \in G} \sum_{m \in G} T(\varepsilon_n x_n, \delta_m y_m) \right\|_Z \leq \|T\| C_1 C_2.$$

Применяя последовательно этот прием, в итоге получим неравенство (4). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $x \in \langle \vec{X} \rangle_\rho$ и $y \in \langle \vec{Y} \rangle_\rho$. Тогда

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \quad (u_k \in X_0 \cap X_1, \text{ сходимость в } X_0 + X_1),$$

причем последовательности $\{u_k/\rho(2^k)\}$ и $\{2^k u_k/\rho(2^k)\}$ сходятся безусловно в X_0 и X_1 соответственно. Аналогично,

$$y = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v_i \quad (v_i \in Y_0 \cap Y_1, \text{ сходимость в } Y_0 + Y_1)$$

и последовательности $\{v_i/\rho(2^i)\}$ и $\{2^i v_i/\rho(2^i)\}$ сходятся безусловно в Y_0 и Y_1 соответственно. Обозначим

$$w_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(u_k, v_{m-k})$$

и докажем, что последовательность $\{T(u_k, v_{m-k})\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для каждого $m \in \mathbb{Z}$ сходится безусловно в Z_0 и Z_1 . Представим

$$\frac{w_m}{\rho(2^m)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{m,k} T\left(\frac{u_k}{\rho(2^k)}, \frac{v_{m-k}}{\rho(2^{m-k})}\right),$$

где

$$a_{m,k} = \frac{\rho(2^k)\rho(2^{m-k})}{\rho(2^m)}.$$

Заметим, что ввиду (3)

$$a_{m,k} \leq \alpha. \quad (6)$$

По лемме 1 для произвольного конечного $F \subset \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k \in F} T\left(\frac{u_k}{\rho(2^k)}, \frac{v_{m-k}}{\rho(2^{m-k})}\right) \right\|_{Z_0} \\ & \leq \|T\| \sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum_{k \in F} \frac{\varepsilon_k u_k}{\rho(2^k)} \right\|_{X_0} \sup_{\delta_k = \pm 1} \left\| \sum_{k \in F} \frac{\delta_k v_{m-k}}{\rho(2^{m-k})} \right\|_{Y_0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) в силу безусловной сходимости $\{u_k/\rho(2^k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $\{v_i/\rho(2^i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$ в X_0 и Y_0 соответственно следует безусловная сходимость $\{T(u_k/\rho(2^k), v_{m-k}/\rho(2^{m-k}))\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в Z_0 . Ввиду (6) безусловно сходится в Z_0 и $\{a_{m,k} T(u_k/\rho(2^k), v_{m-k}/\rho(2^{m-k}))\}_{k=-\infty}^{\infty}$, причем применяя опять (7), получаем

$$\left\| \frac{w_m}{\rho(2^m)} \right\|_{Z_0} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2, \quad \|T\| = \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \times Y_i \rightarrow Z_i}, \quad (8)$$

где C_1 и C_2 определяются так же, как в (2). Из (8), в частности, для произвольного конечного $F \subset \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}$

$$\left\| \sum_{k \in F} T(u_k, v_{m-k}) \right\|_{Z_0} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2 \rho(2^m). \quad (9)$$

Аналогично доказываются безусловная сходимости последовательности $\{a_{m,k} T(2^k u_k / \rho(2^k), 2^{m-k} v_{m-k} / \rho(2^{m-k}))\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в Z_1 и оценки

$$\left\| \frac{2^m w_m}{\rho(2^m)} \right\|_{Z_1} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2, \quad (10)$$

$$\left\| \sum_{k \in F} T(v_k, v_{m-k}) \right\|_{Z_1} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2 \rho(2^m) 2^{-m}. \quad (11)$$

Значит, $w_m \in Z_0 + Z_1$ и ввиду (8)–(11)

$$\|w_m\|_{Z_0+Z_1} = \mathcal{K}(1, w_m; \vec{Z}) \leq \alpha \|T\| C_1 C_2 \min\{\rho(2^m), \rho(2^m) 2^{-m}\}, \quad (12)$$

$$\left\| \sum_{k \in F} T(u_k, v_{m-k}) \right\|_{Z_0+Z_1} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2 \min\{\rho(2^m), \rho(2^m) 2^{-m}\} \quad (13)$$

для произвольного конечного $F \subset \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}$.

Ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m$, сумму которого обозначим через S , сходится в $Z_0 + Z_1$ абсолютно, так как из (12) следует

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \|w_m\|_{Z_0+Z_1} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2 C_\rho,$$

где ввиду условия 1) на функцию ρ

$$C_\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \min\{\rho(2^m), \rho(2^m) 2^{-m}\} < \infty.$$

Кроме того, из (8) и (10) получаем

$$\mathcal{F}(2^m, w_m; \vec{Z}) = \max\{\|w_m\|_{Z_0}, 2^m \|w_m\|_{Z_1}\} \leq \alpha \|T\| C_1 C_2 \rho(2^m).$$

Так как $0 < \gamma_\rho \leq \delta_\rho < 1$, то справедливо равенство (изоморфизм) (см. [7] или [8])

$$(Z_0, Z_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} = (Z_0, Z_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{F}}. \quad (14)$$

Поэтому $S \in (Z_0, Z_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}$, причем норма S в этом пространстве оценивается следующим образом:

$$\|S\|_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} \leq \alpha \beta \|T\| C_1 C_2, \quad (15)$$

где β – постоянная изоморфизма (14).

Покажем, что сумма S не зависит от последовательностей $\{u_k\}$ и $\{v_i\}$, а определяется лишь элементами x и y .

Для этого докажем равенство

$$S = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{|k| \leq M \\ |i| \leq N}} T(u_k, v_i) \quad (\text{сходимость в } Z_0 + Z_1). \quad (16)$$

В дальнейшем речь пойдет о норме пространства $Z_0 + Z_1$. Для любого $\varepsilon > 0$, пользуясь абсолютной сходимостью ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m$ и соотношением (13), найдем номер m_0 , для которого

$$\left\| \sum_{|m| \leq m_0} w_m - S \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (17)$$

$$\sum_{|m| > m_0} \left\| \sum_{k \in F_m} T(u_k, v_{m-k}) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (18)$$

где F_m – произвольное конечное подмножество $\mathbb{Z}$. Далее, найдется k_0 такое, что для произвольных $k_m \geq k_0$ ($|m| \leq m_0$) выполнено

$$\sum_{|m| \leq m_0} \left\| \sum_{|k| > k_m} T(u_k, v_{m-k}) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (19)$$

Пусть целые числа $M > k_0$ и $N > m_0 + k_0$. Введем множества

$$P = \{(k, i) \in \mathbb{Z}^2 : |k| \leq M, |i| \leq N\},$$

$$Q = \{(k, i) \in \mathbb{Z}^2 : |k| \leq k, |i + k| \leq m_0\}.$$

Заметим, что из условий на M и N следует $Q \subset P$. Пусть $F_m = \{k \in \mathbb{Z} : (k, m - k) \in P\}$ и $k_m = \max F_m$. Из вложения $Q \subset P$ получаем, что в случае $|m| \leq m_0$ $k_m \geq k_0$, и значит, для выбранных F_m и k_m выполнены неравенства (18) и (19). Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|k| \leq M \\ |i| \leq N}} T(u_k, v_i) &= \sum_{|m| \leq m_0} w_m + \sum_{|m| > m_0} \sum_{k \in F_m} T(u_k, v_{m-k}) \\ &\quad - \sum_{|m| \leq m_0} \sum_{|k| > k_m} T(u_k, v_{m-k}). \end{aligned}$$

В итоге, применяя неравенства (17)–(19), получаем

$$\left\| \sum_{\substack{|k| \leq M \\ |i| \leq N}} T(u_k, v_i) - S \right\| \leq \varepsilon,$$

если только $M > k_0$, $N > m_0 + k_0$. Соотношение (16) доказано.

Пусть теперь

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u'_k \quad (u'_k \in X_0 \cap X_1, \text{ сходимость в } X_0 + X_1)$$

и для $\{u'_k\}$ выполнены те же условия, что и для $\{u_k\}$. Обозначим

$$w'_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(u'_k, v_{m-k}) \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad S' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w'_m,$$

где $\{v_i\}$ – та же, что и ранее. Тогда, как уже показано,

$$S' = \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{\substack{|k| \leq M \\ |i| \leq N}} T(u'_k, v_i) \quad (\text{сходимости в } Z_0 + Z_1).$$

Для $v \in Y_0 \cap Y_1$ линейный оператор $A_v u = T(u, v)$ непрерывен в $X_0 + X_1$ и поэтому, переходя от двойного предела к повторному, получим

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|i| \leq N} \lim_{M \rightarrow \infty} T\left(\sum_{|k| \leq M} u'_k, v_i\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|i| \leq N} T(x, v_i) = S.$$

Аналогично совершается переход к другому представлению и по второй переменной оператора, что опять не меняет суммы S .

Итак, эта сумма зависит лишь от x и y , в связи с чем ее естественно обозначать через $T(x, y)$. Воспользовавшись абсолютной сходимостью ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m$, легко доказать билинейность $T(x, y)$, а из неравенства (15) следует

$$\|T(x, y)\|_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} \leq \alpha \beta \|T\| C_1 C_2.$$

Отсюда по определению нормы в пространствах типа $\langle \vec{X} \rangle_{\rho}$, получаем

$$\|T(x, y)\|_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} \leq \alpha \beta \|T\| \|x\|_{\rho} \|y\|_{\rho}.$$

Таким образом,

$$T: \langle \vec{X} \rangle_{\rho} + \langle \vec{Y} \rangle_{\rho} \rightarrow (Z_0, Z_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}$$

с нормой, не превосходящей $\alpha \beta \|T\|$, $\|T\| = \max_{i=\overline{0,1}} \|T\|_{X_i \times Y_i \rightarrow Z_i}$. Теорема доказана.

Рассуждая подобным образом, можно доказать аналогичную теорему для интерполяционного функтора Петре–Густавсона $\langle \cdot, \rho \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho = \rho(t)$ – квазивогнутая функция на полуоси $(0, \infty)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы 1.

Предположим, что T – билинейный оператор, непрерывный из $X_0 \times Y_0$ в Z_0 и $X_1 \times Y_1$ в Z_1 . Тогда T можно продолжить до билинейного оператора, непрерывного из $\langle \vec{X}, \rho \rangle \times \langle \vec{Y}, \rho \rangle$ в $(Z_0^{**}, Z_1^{**})_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если пространства Z_0 и Z_1 рефлексивны и выполнены условия теоремы 2, то T продолжается до билинейного оператора, непрерывного из $\langle \vec{X}, \rho \rangle \times \langle \vec{Y}, \rho \rangle$ в $(Z_0, Z_1)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}$.

3. Конкретные интерполяционные теоремы.

а) Пространства последовательностей. Для неотрицательной числовой последовательности $w = \{w_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ через $\ell_{\infty}(w)$ обозначим ℓ_{∞} с “весом” w , норма в котором

$$\|\{a_j\}\|_{\ell_{\infty}(w)} = \|\{a_j w_j\}\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |a_j w_j|.$$

Аналогичным образом определяется пространство $c_0(w)$.

Последовательность $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ называется разреженной для функции $\rho = \rho(t)$, если для любых $A, B > 0$ множество $n \in \mathbb{Z}$, для которых

$$A \leq \rho(t_n) \leq B \quad \text{или} \quad A \leq \rho(t_n) t_n^{-1} \leq B$$

конечно [7].

В дальнейшем, если $\rho(t)$ – квазивогнутая функция, а $f^0 = \{f_i^0\}$, $f^1 = \{f_i^1\}$ – двусторонние положительные числовые последовательности, то функция $\rho^*(t)$ и последовательность f_{ρ} определяются следующим образом:

$$\rho^*(t) = \frac{1}{\rho(t-1)}, \quad f_{\rho} = f^0 \rho \left(\frac{f^1}{f^0} \right).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть билинейный оператор T непрерывен из $c_0(u^0) \times c_0(v^0)$ в $\ell_{\infty}(w^0)$ и из $c_0(u^1) \times c_0(v^1)$ в $\ell_{\infty}(w^1)$.

Если квазивогнутая функция $\rho = \rho(t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1, то оператор T можно продолжить до билинейного оператора, непрерывного из $c_0(u_{\rho^*}) \times c_0(v_{\rho^*})$ в $\ell_{\infty}(w_{\rho^*})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольных весовых последовательностей $f^0 = \{f_n^0\}$ и $f^1 = \{f_n^1\}$ обозначим

$$\vec{c}_0(f) = \{c_0(f^0), c_0(f^1)\}, \quad \vec{\ell}_{\infty}(f) = \{\ell_{\infty}(f^0), \ell_{\infty}(f^1)\}.$$

Известно (см. [7] или [9, с. 461]), что

$$\langle \vec{c}_0(u) \rangle_{\rho} = c_0(u_{\rho^*}), \quad \langle \vec{c}_0(v) \rangle_{\rho} = c_0(v_{\rho^*}).$$

Поэтому по теореме 1

$$T: c_0(u_{\rho^*}) \times c_0(v_{\rho^*}) \rightarrow (\ell_{\infty}(w^0), \ell_{\infty}(w^1))_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}.$$

Известно (см., например, [9], с. 422), что

$$(\ell_{\infty}(w^0), \ell_{\infty}(w^1))_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} = \ell_{\infty}(w_{\rho^*}). \quad (20)$$

Применяя теперь (20), получим утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть билинейный оператор T непрерывен из $c_0(u^0) \times c_0(v^0)$ в $c_0(w^0)$ и из $c_0(u^1) \times c_0(v^1)$ в $c_0(w^1)$, причем последовательности $\{u_n^0/u_n^1\}$ и $\{v_n^0/v_n^1\}$ разреженные для квазивогнутой функции $\rho(t)$, удовлетворяющей условиям 1), 2) теоремы 1.

Тогда оператор T продолжается до билинейного оператора, непрерывного из $\ell_\infty(u_{\rho^*}) \times \ell_\infty(v_{\rho^*})$ в $\ell_\infty(w_{\rho^*})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно ([7] или [9, с. 461]), что в условиях теоремы

$$\langle \tilde{c}_0(u), \rho \rangle = \ell_\infty(u_{\rho^*}), \quad \langle \tilde{c}_0(v), \rho \rangle = \ell_\infty(v_{\rho^*}).$$

Поэтому ввиду равенства $c_0^{**} = \ell_\infty$ по теореме 2

$$T: \ell_\infty(u_{\rho^*}) \times \ell_\infty(v_{\rho^*}) \rightarrow (\ell_\infty(w^0), \ell_\infty(w^1))_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}.$$

Осталось воспользоваться равенством (20) из доказательства предыдущей теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как $0 < \gamma_\rho \leq \delta_\rho < 1$, то для разреженности, например, последовательности $\{u_n^0/u_n^1\}$ относительно ρ достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{u_n^0}{u_n^1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^1}{u_n^0} = 0$$

или

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{u_n^1}{u_n^0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^0}{u_n^1} = 0.$$

б) **Функциональные пространства.** Напомним, что для положительной квазивогнутой функции φ на полуоси $(0, \infty)$ пространство Мардинкевича $M(\varphi)$ – это банахово пространство измеримых функций на $(0, \infty)$ с нормой

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{t>0} [\varphi(t)]^{-1} \int_0^t x^*(s) ds.$$

Через $M^0(\varphi)$ обозначим множество всех $x \in M(\varphi)$, для которых

$$\lim_{h \rightarrow 0, \infty} [\varphi(h)]^{-1} \int_0^h x^*(t) dt = 0.$$

Пусть функция f определена на $(0, \infty)$, $f \geq 0$. Тогда $\ell_\infty(f)$ – пространство ℓ_∞ с “весом” $\{f(2^j)\}_{j=-\infty}^\infty$. Аналогично определяется пространство $c_0(f)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть билинейный оператор T непрерывен из $M^0(\psi_0) \times M^0(\varphi_0)$ в $M^0(\theta_0)$ и из $M^0(\psi_1) \times M^0(\varphi_1)$ в $M^0(\theta_1)$, причем функции $\psi_i = \psi_i(t)$, $\varphi_i = \varphi_i(t)$, $\theta_i = \theta_i(t)$ ($i = \overline{0,1}$) обладают следующими свойствами:

- 1) $0 < \gamma_{\psi_i} \leq \delta_{\psi_i} < 1$, $0 < \gamma_{\varphi_i} \leq \delta_{\varphi_i} < 1$, $0 < \gamma_{\theta_i} \leq \delta_{\theta_i} < 1$ ($i = \overline{0,1}$);
- 2) последовательности $\{\psi_1(2^j)/\psi_0(2^j)\}$, $\{\varphi_1(2^j)/\varphi_0(2^j)\}$ являются разреженными для квазивогнутой функции $\rho(t)$, удовлетворяющей условиям 1), 2) теоремы 1.

Тогда оператор T можно продолжить до билинейного оператора, непрерывного из $M(\psi_\rho) \times M(\varphi_\rho)$ в $M(\theta_\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для квазивогнутых функций $f_0 = f_0(t)$ и $f_1 = f_1(t)$ обозначим

$$\vec{M}^0(f) = \{M^0(f_0), M^0(f_1)\}, \quad \vec{M}(f) = \{M(f_0), M(f_1)\}.$$

Как известно ([2] или [3]), для лебеговых пространств L_1 и L_∞ на полуоси $(0, \infty)$ и $x \in L_1 + L_\infty$

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty) = \int_0^t x^*(s) ds.$$

Поэтому для произвольной квазивогнутой f

$$M(f) = (L_1, L_\infty)_{\ell_\infty(1/f)}^{\mathcal{K}}, \quad M^0(f) = (L_1, L_\infty)_{c_0(1/f)}^{\mathcal{K}}.$$

В силу условий, наложенных на показатели растяжения функций ψ_i , φ_i и θ_i ($i = \overline{0,1}$), по теореме реитерации из [8] или [10]

$$\begin{aligned} \langle \vec{M}^0(\psi), \rho \rangle &= (L_1, L_\infty)_{\langle \vec{c}_0(1/\psi), \rho \rangle}^{\mathcal{K}}, & \langle \vec{M}^0(\varphi), \rho \rangle &= (L_1, L_\infty)_{\langle \vec{c}_0(1/\varphi), \rho \rangle}^{\mathcal{K}}, \\ (\vec{M}(\theta))_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} &= (L_1, L_\infty)_{(\vec{\ell}(1/\theta))_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}}}^{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Как уже говорилось в доказательствах теорем 3 и 4,

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{c}_0\left(\frac{1}{\psi}\right), \rho \right\rangle &= \ell_\infty\left(\frac{1}{\psi_\rho}\right), & \left\langle \vec{c}_0\left(\frac{1}{\varphi}\right), \rho \right\rangle &= \ell_\infty\left(\frac{1}{\varphi_\rho}\right), \\ \left(\vec{\ell}_\infty\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)_{\rho, \infty}^{\mathcal{K}} &= \ell_\infty\left(\frac{1}{\theta_\rho}\right). \end{aligned}$$

Поэтому ввиду равенства $(M^0(\theta))^{**} = M(\theta)$ [2, с. 153–159] по теореме 2 получаем утверждение теоремы 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С учетом замечания 1 легко получить условия, достаточные для того, чтобы последовательности $\{\psi_1(2^j)/\psi_0(2^j)\}$ и $\{\varphi_1(2^j)/\varphi_0(2^j)\}$ были разреженными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие нетривиальности показателей растяжения функций $\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ существенно.

Действительно, рассмотрим оператор тензорного произведения

$$B(x, y) = x(s)y(t).$$

Тогда $B: L_1 \times L_1 \rightarrow L_1, B: L_\infty \times L_\infty \rightarrow L_\infty$. Пространства L_1 и L_∞ являются “крайними” пространствами Марцинкевича, а именно, $L_1 = M(1)$, $L_\infty = M(t)$. Если бы теорема 5 была верна в этом случае, то, в частности, оператор B ограниченно действовал бы из $M(t^\theta) \times M(t^\theta)$ в $M(t^\theta)$ ($0 < \theta < 1$), что, как известно, не так [11].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В качестве конкретных операторов, к которым применима теорема 5, можно рассмотреть как оператор тензорного произведения B (см. предыдущее замечание), так и оператор свертки

$$S(x, y)(t) = \int_0^t x(s)y(t-s) ds.$$

Самарский государственный университет

Поступило

11.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Асташкин С.В. Об интерполяции билинейных операторов вещественным методом // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 1. С. 15–24.
- [2] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [3] Peetre F. Sur l'utilisation des suites inconditionnellement sommable dans la théorie des espaces d'interpolation // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1971. V. 46. P. 173–190.
- [4] Gustavsson F., Peetre F. Interpolation of Orlicx Spaces // Studia Math. 1977. V. 60. P. 33–59.
- [5] Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [6] Peetre F. A theory of interpolation of normed spaces // Notes Math. 1969. V. 39. P. 1–86.
- [7] Fanson S. Minimal and maximal methods of interpolation // J. Funct. Anal. 1981. V. 44. P. 50–73.
- [8] Брудный Ю.А., Кругляк Н.Я. Функторы вещественной интерполяции // Деп. ВИНТИ. № 2620-81.
- [9] Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 349–515.
- [10] Дмитриев В.И., Овчинников В.И. Об интерполяции в пространствах вещественного метода // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 4. С. 794–797.
- [11] Milman M. Tensor products of function spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82. № 4. P. 626–628.