

О мультипликаторе симметричного пространства относительно тензорного произведения

© 1996. С. В. Асташкин

Пусть $x = x(s)$ и $y = y(t)$ — измеримые функции на $I = [0, 1]$. Определим билинейный оператор

$$B(x, y)(s, t) = x \otimes y(s, t) = x(s)y(t), \quad (s, t) \in I \times I.$$

Напомним, что банахово пространство E измеримых функций на I называется симметричным (с.п.), если из того, что $y \in E$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$ (здесь $z^*(t)$ — убывающая перестановка функции $|z(u)|$ [1, с. 93]), следует, что $x \in E$ и $\|x\| \leq \|y\|$.

Если E — с.п. на I , то соответствующее с.п. на квадрате $E(I \times I)$ состоит из всех измеримых функций $x = x(s, t)$ на $I \times I$, для которых $x^* \in E$ и $\|x\|_{E(I \times I)} = \|x^*\|_E$.

Если X, Y, Z — с.п. на I , то непрерывность оператора B из $X \times Y$ в $Z(I \times I)$ эквивалентна непрерывности вложения проективного тензорного произведения $X \otimes Y$ в Z [2, р. 51]. По этой причине его называют оператором тензорного произведения.

Важность изучения оператора B обусловлена тем, что он естественным образом возникает при решении целого ряда задач, связанных с изучением геометрических свойств с.п. (см., например, [3, р. 169–171; 4, 5]).

Большая часть работ по изучению тензорного произведения в с.п. посвящена нахождению условий его непрерывности в их конкретных классах: в пространствах Лоренца, Марцинкевича, Орлича и некоторых других [2, 6–9]. В этой заметке речь пойдет о произвольных с.п. Введем основное для дальнейшего понятие мультипликатора с.п. относительно оператора B .

Пусть E — с.п. на I . Его мультипликатором назовем множество $M(E)$ всех измеримых на I функций $x = x(s)$, для которых $x \otimes y \in E(I \times I)$ с произвольной функцией $y \in E$. Тогда $M(E)$ линейно, а после введения нормы

$$\|x\|_{M(E)} = \sup \{ \|x \otimes y\|_{E(I \times I)} ; \|y\|_E \leq 1 \}$$

становится с.п. на I . Очевидно, что всегда $M(E) \subset E$.

Рассмотрим пример. Пусть E — пространство Лоренца $\Lambda(\phi)$, где $\phi(u)$ — неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $(0, 1]$. Напомним, что оно состоит из всех измеримых функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\phi)} = \int_0^1 x^*(s) d\phi(s) < \infty.$$

Предположим, что для функции растяжения

$$\mathcal{M}_\phi(v) = \sup \{ \phi(tv) / \phi(t), 0 < t \leq \min(1, 1/v) \}$$

выполнено условие

$$\mathcal{M}_\phi(v) = \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(tv)/\phi(t),$$

где $t_0 \in [0, 1]$ не зависит от $v \in [0, 1]$. Тогда несложные вычисления показывают, что $M(\Lambda(\phi)) = \Lambda(\mathcal{M}_\phi)$.

Пусть $\chi_e(s) = 1$ ($s \in e$), $\chi_e(s) = 0$ ($s \notin e$) (e — измеримое подмножество в I или в $I \times I$). Важную роль в теории с.п. играют фундаментальная функция с.п. $\phi_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$, а также непрерывный в любом с.п. оператор растяжения $\sigma_t y(u) = y(u/t) \chi_{[0,1]}(u/t)$ ($t > 0$).

ТЕОРЕМА 1. Для любого с.п. E на I

$$\phi_{M(E)}(t) = \|\sigma_t\|_{E \rightarrow E}, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$\|\sigma_t\|_{M(E) \rightarrow M(E)} = \|\sigma_t\|_{E \rightarrow E}, \quad 0 < t \leq 1, \quad (1)$$

$$\|\sigma_{1/t}\|_{E \rightarrow E}^{-1} \leq \|\sigma_t\|_{M(E) \rightarrow M(E)} \leq \|\sigma_t\|_{E \rightarrow E}, \quad t > 1. \quad (2)$$

Неравенства (2), вообще говоря, нельзя заменить равенством, аналогичным (1). Чтобы это показать, достаточно рассмотреть случай, когда $\phi_\alpha(s) = s^\alpha \ln^{-1}(C/s)$, $E = \Lambda(\phi_\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), $C > \exp\{1/(1-\alpha)\}$, и воспользоваться результатом приведенного выше примера.

Напомним, что для любого с.п. E существуют числа

$$\alpha_E = \lim_{t \rightarrow 0} \ln \|\sigma_t\|_{E \rightarrow E} / \ln t, \quad \beta_E = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|\sigma_t\|_{E \rightarrow E} / \ln t,$$

которые называются нижним и верхним индексами Бойда пространства E [1]. Всегда $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$ [1, с. 134].

СЛЕДСТВИЕ 1. Для индексов Бойда с.п. E и $M(E)$ выполнены неравенства $\alpha_E \leq \alpha_{M(E)} \leq \beta_{M(E)} \leq \beta_E$.

ТЕОРЕМА 2 (оценка сверху). Пусть E — с.п. на I и $p = 1/\alpha_E$, где α_E — нижний индекс Бойда с.п. E . Тогда $M(E) \subset L_p$, и константа вложения не зависит от E .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\alpha_E = 0$, то $M(E) = L_\infty$.

Если E — с.п. на I , то ассоциированное с ним пространство E' состоит из всех измеримых на I функций $y = y(t)$, для которых

$$\|y\|_{E'} = \sup \left\{ \int_0^1 x(t)y(t) dt; \|x\|_E \leq 1 \right\} < \infty.$$

Норма с.п. E называется порядково полунепрерывной, если из монотонной сходимости $x_n \uparrow x$ п.в. ($x_n, x \in E$) следует, что $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть E — с.п. с порядково полунепрерывной нормой. Если $B: E \times E \rightarrow E(I \times I)$ и $B: E' \times E' \rightarrow E'(I \times I)$, то $E = L_p$ для некоторого $p \in [1, \infty]$.

ТЕОРЕМА 3 (оценка снизу). Для любого с.п. E на I

$$M(E) \supset \Lambda(\psi),$$

где $\psi(t) = \|\sigma_t\|_{E \rightarrow E}$ ($0 < t \leq 1$).

Константа вложения при этом не зависит от E .

Перейдем к конкретным результатам. Напомним, что пространство L_{pq} ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$) состоит из всех измеримых на I функций $x = x(t)$, для которых эквивалентной норме функционал

$$\|x\|_{pq} = \begin{cases} \{\int_0^1 (x^*(t)t^{1/p})^q dt/t\}^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{0 < t \leq 1} (x^*(t)t^{1/p}), & \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

конечен.

ТЕОРЕМА 4. Пусть с.п. E интерполяционно между L_p и $L_{p,\infty}$ при некотором $p \in (1, \infty)$ (т. е. из ограниченности произвольного линейного оператора в L_p и $L_{p,\infty}$ следует его непрерывность в E). Тогда $M(E) = L_p$.

Так как L_{pq} ($p \leq q \leq \infty$) интерполяционно между L_p и $L_{p,\infty}$ [1, с. 142], получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $1 < p < \infty$, $p \leq q \leq \infty$, то $M(L_{pq}) = L_p$.

В случае $q = \infty$ последнее утверждение было доказано в [9].

В заключение приведем одно приложение полученных результатов в связи с известной теоремой Р. О'Нейла о непрерывности оператора тензорного произведения в пространствах $L_{p,q}$.

ТЕОРЕМА 5 [8]. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q, r, s \leq \infty$. Оператор B является непрерывным оператором из $L_{pr} \times L_{ps}$ в $L_{pq}(I \times I)$, если и только если выполнены условия

- (1) $\max(s, r) \leq q$;
- (2) $1/p + 1/q \leq 1/s + 1/r$.

Следствие 4 показывает, что в случае $s = p < r = q$ теорема 5 точна относительно класса всех с.п. (а не только пространств L_{pq}). А именно, L_p — максимальное среди с.п. E , для которых B является ограниченным оператором из $L_{pr} \times E$ в $L_{pq}(I \times I)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
2. Milman M. Notas Mat., **20**, 1–128 (1978).
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
4. Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L. Symmetric Structures in Banach Spaces. Mem. Am. Math. Soc., Vol. 217, 1979, pp. 1–298.
5. Carothers N. L. Israel J. Math., **40**, No. 3–4, 217–228 (1981).
6. Milman M. Notas Mat., **13**, 1–7 (1977).
7. Milman M. Anal. Math., **4**, No. 3, 215–223 (1978).
8. O'Neil R. J. d'Analyse Math., **21**, 129–142 (1968).
9. Асташкин С. В. В сб.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль (1982), с. 3–15.