

Интерполяция операторов в квазинормированных группах измеримых функций

С.В. Асташкин

Напомним, что квазинормой на абелевой группе X называется вещественнозначная функция $\|\cdot\|$, определенная на X и удовлетворяющая условиям:

$$a) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$b) \| -x \| = \|x\|;$$

$$c) \|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \quad (C \geq 1).$$

Группа X в этом случае называется квазинормированной. Как известно, без ограничения общности можно считать, что $C = 1$ [1, с.80-81]. В работе изучаются полные квазинормированные группы X вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на полуоси $(0, \infty)$, с обычным сложением.

Квазинормированную группу X будем называть симметричной (СГ), если выполнены условия:

1) если $|x| \leq |y|$ (т.е. $|x(s)| \leq |y(s)|$ п.в.) и $y \in X$, то $x \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$;

2) если функции $|x|$ и $|y|$ равноизмеримы, т.е. $n_{|x|}(\tau) = n_{|y|}(\tau)$, где $n_z(\tau) = |\{s > 0 : z(s) > \tau\}|$ ($|E|$ – мера Лебега), и $y \in X$, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$.

Важнейшим примером СГ является шкала пространств $L_p = L_p(0, \infty)$, $0 < p \leq \infty$, определяемая обычным образом. В частности, для $0 < p \leq 1$ квазинорма в L_p

$$\|x\|_p = \int_0^\infty |x(s)|^p ds.$$

Как и в [2], рассмотрим также предельный случай: $p = 0$. Через L_0 обозначим множество всех измеримых функций $x = x(t)$, для которых $\|x\|_0 = |\text{supp } x| < \infty$, где $\text{supp } x = \{t > 0 : x(t) \neq 0\}$. Тогда L_0 превращается в СГ, непрерывно вложенную в пространство S всех измеримых п.в. конечных функций, снабженное, как обычно, сходимостью по мере на множествах конечной меры. В связи с этим можно рассматривать банахову пару СГ (L_0, L_∞) , роль которой в классе всех СГ аналогична роли пары (L_1, L_∞) в классе симметричных пространств на $(0, \infty)$ [3].

Главная цель работы – описание орбиты $\mathcal{O}(a; L_0, L_\infty)$ произвольной функции $a \in L_0 + L_\infty$ в паре (L_0, L_∞) . Как следствие получена теорема о том, что все СГ, промежуточные между L_0 и L_∞ , интерполяционны относительно этой пары. Будет показано также, что пара (L_0, L_∞) $\mathcal{K}$ -монотонна, но в отличие от пары (L_1, L_∞) с константой 2, а не 1 [3, гл.2].

1. ОПИСАНИЕ $\mathcal{O}(a; L_0, L_\infty)$.

Под гомоморфизмом в дальнейшем понимается отображение $T : X \rightarrow X$ (X – СГ), такое, что $T(x + y) = Tx + Ty$ и $T(-x) = -T(x)$ ($x, y \in X$). Как обычно, гомоморфизм называется ограниченным, если

$$\|T\|_{X \rightarrow X} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty.$$

Пусть (X_0, X_1) – банахова пара СГ. Тогда $X_0 + X_1$ – СГ, состоящая из всех измеримых функций $x = x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, где $x_i = x_i(t) \in X_i$ ($i = 0, 1$), с квазинормой

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_i \in X_i\}.$$

В СГ $X_0 \cap X_1$ квазинорма определяется следующим образом:

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max_{i=0,1} \|x\|_{X_i}.$$

Орбитой элемента $a \in X_0 + X_1$ будем называть множество $\mathcal{O}(a; X_0, X_1)$ всех $x \in X_0 + X_1$, представимых в виде $x = Ta$, где T – гомоморфизм, ограниченно действующий в X_0 и в X_1 . Определим квазинорму:

$$\|x\|_{\mathcal{O}} = \inf \|T\|_{(X_0, X_1)},$$

где нижняя грань берется по всем гомоморфизмам $T : X_i \rightarrow X_i$ ($i = 0, 1$), таким, что $Ta = x$ и

$$\|T\|_{(X_0, X_1)} = \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow X_i}.$$

Легко проверить, что она превращает множество $\mathcal{O}(a; X_0, X_1)$ в СГ.

В дальнейшем запись: $u(t) \leq v(t)$ ($t \in E$) означает выполнение этого неравенства для п.в. $t \in E$.

Теорема 1. Для любого $a \in L_0 + L_\infty$ орбита $\mathcal{O}(a; L_0, L_\infty)$ совпадает со множеством всех измеримых функций $x = x(t)$, для которых существует $C > 0$, такое, что

$$x^*(t) \leq Ca^*(t/C) \quad (t > 0) \quad (1)$$

При этом $\|x\|_{\mathcal{O}}$ равна точной нижней грани всех C , для которых выполнено неравенство (1).

Получим сначала одно вспомогательное утверждение. Для пары СГ (X_0, X_1) введем функционал

$$\mathcal{E}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x - x_0\|_{X_1} : \|x_0\|_{X_0} \leq t\} \quad (x \in X_0 + X_1, t > 0),$$

играющий важную роль в теории аппроксимации [1, гл.7].

Лемма 1. Если T – гомоморфизм, ограниченный в квазинормированных группах X_0 и X_1 , то для $x \in X_0 + X_1$ выполнено неравенство

$$\mathcal{E}(t, Tx; X_0, X_1) \leq \|T\| \mathcal{E}(t/\|T\|, x; X_0, X_1) \quad (t > 0),$$

где $\|T\| = \|T\|_{(X_0, X_1)}$.

Доказательство. Пусть $y_0 = Tx_0$, $x_0 \in X_0$. Если $\|T\| \|x_0\|_{X_0} \leq t$, то $\|y_0\|_{X_0} \leq t$. Значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, Tx; X_0, X_1) &= \inf\{\|Tx - y_0\|_{X_1} : \|y_0\|_{X_0} \leq t\} \leq \\ &\leq \inf\{\|Tx - Tx_0\|_{X_1} : \|x_0\|_{X_0} \leq t/\|T\|\} \leq \|T\| \mathcal{E}(t/\|T\|, x; X_0, X_1). \end{aligned}$$

Ввиду того, что $\mathcal{E}(t, x; L_0, L_\infty) = x^*(t)$ [1, с.227], получаем

Следствие. Если T – гомоморфизм, ограниченный в L_0 и в L_∞ , то для $x \in L_0 + L_\infty$ справедливо неравенство:

$$(Tx)^*(t) \leq \|T\| x^*(t/\|T\|) \quad (t > 0), \quad (2)$$

где $\|T\| = \|T\|_{(L_0, L_\infty)}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $x \in \mathcal{O}(a; L_0, L_\infty)$. Для любого $\epsilon > 0$ найдется гомоморфизм T , такой, что $Ta = x$ и $\|T\| = \|T\|_{(L_0, L_\infty)} \leq \|x\|_{\mathcal{O}} + \epsilon$. Применяя (2), получаем оценку

$$x^*(t) \leq \|T\|a^*(t/\|T\|) \leq (\|x\|_{\mathcal{O}} + \epsilon)a^*(t/(\|x\|_{\mathcal{O}} + \epsilon)).$$

Ввиду произвольности $\epsilon > 0$ и непрерывности перестановки $a^*(s)$ п.в. имеем

$$x^*(t) \leq \|x\|_{\mathcal{O}}a^*(t/\|x\|_{\mathcal{O}}) \quad (t > 0) \quad (3)$$

Значит, неравенство (1) выполнено для $C = \|x\|_{\mathcal{O}}$.

Предположим, что, наоборот, имеет место (1) для $C = 1$, т.е.

$$x^*(t) \leq a^*(t) \quad (t > 0) \quad (4)$$

Обозначим $a^*(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} a^*(t)$, $x^*(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t)$ и рассмотрим две ситуации: (а) $a^*(\infty) = 0$ и (б) $a^*(\infty) > 0$.

(а) В этом случае $x^*(\infty) = 0$. Для произвольного $\epsilon > 0$ нужно найти гомоморфизм T со свойствами: $x = Ta$ и $\|T\|_{(L_0, L_\infty)} \leq 1 + \epsilon$. Он будет построен в виде суперпозиции пяти гомоморфизмов.

Положим: $T_1 y(t) = \text{sign } a(t) y(t)$. Тогда $\|T_1\|_{(L_0, L_\infty)} = 1$ и $T_1 a = |a|$.

Для построения T_2 введем множества

$$E_0 = \{t : |a(t)| > 1\}, \quad E_n = \{t : 1/(n+1) < |a(t)| \leq 1/n\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Через E_n^* обозначим аналогичные множества для функции a^* . Ввиду равноизмеримости $|a|$ и a^* , а также равенства $a^*(\infty) = 0$ имеем

$$|E_n| = |E_n^*| < \infty, \quad \text{supp } a = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n, \quad \text{supp } a^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n^*.$$

Следовательно, функции $|a|\chi_{E_n}$ и $a^*\chi_{E_n^*}$ равноизмеримы для любого $n = 0, 1, \dots$ (Через χ_E обозначается характеристическая функция множества E , т.е. $\chi_E(s) = 1(s \in E)$ и $\chi_E(s) = 0(s \notin E)$.)

Ввиду [3, с.84] для любых $\epsilon > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ существует сохраняющее меру отображение $\omega_n : E_n^* \rightarrow E_n$, такое, что

$$\|a^*\chi_{E_n^*} - (|a|\chi_{E_n})(\omega_n)\|_{\infty} \leq \epsilon/(n+1) \quad (5)$$

Обозначим

$$z_n = a^*\chi_{E_n^*} - (|a|\chi_{E_n})(\omega_n), \quad \alpha_n(t) = z_n(t)/(|a|\chi_{E_n})(\omega_n(t)), \quad t \in E_n^*, \quad \alpha_n(t) = 0, \quad t \notin E_n^*.$$

Тогда из (5) и определения E_n следует:

$$\|\alpha_n\|_{\infty} \leq \epsilon(n+1, \dots) \quad (6)$$

Кроме того, $a^*\chi_{E_n^*} = |a|\chi_{E_n}(\omega_n) + z_n = (1 + \alpha_n)(|a|\chi_{E_n})(\omega_n)$, и, если просуммировать по всем n , то $a^*(t) = (1 + \alpha(t))|a(\omega(t))|$, где отображения ω и α для $t \in \text{supp } a^*$ получены "склеивкой" из ω_n и α_n ($n = 0, 1, \dots$) соответственно. Если $\text{supp } a^* \neq (0, \infty)$, то множества $(0, \infty) \setminus \text{supp } a^*$ и $(0, \infty) \setminus \text{supp } a$ имеют бесконечную меру, и мы

полагаем: $\alpha(t) = 0$ ($t \notin \text{supp } a^*$), а ω определяем так, чтобы оно отображало $(0, \infty) \setminus \text{supp } a^*$ в $(0, \infty) \setminus \text{supp } a$ с сохранением меры.

В итоге отображение $\omega : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ сохраняет меру множеств и ввиду (6) $\|\alpha\|_\infty \leq \epsilon$. Определим гомоморфизм $T_2 y(t) = (1 + \alpha(t))y(\omega(t))$. Тогда $\|T_2\|_{(L_0, L_\infty)} \leq 1 + \epsilon$ и $T_2|a| = a^*$.

Далее, полагаем $T_3 y(t) = \beta(t)y(t)$, где $\beta(t) = x^*(t)/a^*(t)$, если $a^*(t) > 0$, и $\beta(t) = 0$, если $a^*(t) = 0$. Ввиду (4) $|\beta(t)| \leq 1$. Значит, $\|T_3\|_{(L_0, L_\infty)} \leq 1$ и $T_3 a^* = x^*$.

Гомоморфизм T_4 строится аналогично T_2 , но вместо E_0 и E_n рассматриваются множества

$$F_0^* = \{t : x^*(t) > 1\}, \quad F_n^* = \{t : 1/(n+1) < x^*(t) \leq 1/n\},$$

а вместо E_0^* и E_n^* —

$$F_0 = \{t : |x(t)| > 1\}, \quad F_n = \{t : 1/(n+1) < |x(t)| \leq 1/n\}.$$

Тогда $\|T_4\|_{(L_0, L_\infty)} \leq 1 + \epsilon$ и $T_4 x^* = |x|$.

Наконец, $T_5 y(t) = \text{sign } x(t) y(t)$, $\|T_5\|_{(L_0, L_\infty)} = 1$, $T_5 |x| = x$.

Гомоморфизм $T = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1$ ограничен в L_0 и в L_∞ , $Ta = x$ и

$$\|T\|_{(L_0, L_\infty)} \leq (1 + \epsilon)^2.$$

б) Пусть $a^*(\infty) = \delta > 0$. Гомоморфизм T_1 , $T_1 a = |a|$ определяется так же, как в случае (а).

Используя [3, с.84], опять найдем сохраняющее меру отображение $\omega = \omega(t)$ полуоси в себя, для которого

$$\|a^* - |a(\omega)|\|_\infty \leq \epsilon \delta / 2 \quad (0 < \epsilon < 1).$$

Так как $a^*(t) \geq \delta$, имеем: $|a(\omega(t))| \geq \delta/2$ п.в. Следовательно, обозначив $z = a^* - |a(\omega)|$ и $\alpha(t) = z(t)/(|a(\omega(t))|)$, если $a(\omega(t)) \neq 0$, и $\alpha(t) = 0$, если $a(\omega(t)) = 0$, получим:

$$\|\alpha\|_\infty \leq \epsilon \quad (7)$$

Таким образом, $a^* = |a(\omega)| + z = (1 + \alpha)|a(\omega)|$. Определим

$$T_2 y(t) = (1 + \alpha(t))y(\omega(t)).$$

Тогда $T_2|a| = a^*$ и ввиду (7) $\|T_2\|_{(L_0, L_\infty)} \leq 1 + \epsilon$. $T_2|a| = a^*$.

Гомоморфизм T_3 , $T_3 a^* = x^*$, определяется так же, как в случае (а).

Если $x^*(\infty) = 0$, то гомоморфизм T_4 такой же, как в предыдущем случае. Если $x^*(\infty) = \delta_1 > 0$, то для $x_1(t) = \max(|x(t)|, \delta_1)$ найдем сохраняющее меру отображение $\omega_1 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, для которого

$$\|x_1 - x^*(\omega_1)\|_\infty \leq \epsilon \delta_1 / 2.$$

Определим функции $z_1 = x_1 - x^*(\omega_1)$, а также $\alpha_1(t) = z_1(t)/x^*(\omega_1(t))$, если $x^*(\omega_1(t)) \neq 0$, и $\alpha_1(t) = 0$, если $x^*(\omega_1(t)) = 0$. Так как ввиду последнего неравенства $x^*(\omega_1(t)) \geq \delta_1/2$, то $\|\alpha_1\|_\infty \leq \epsilon$. Следовательно, гомоморфизм

$$T_4 y(t) = (1 + \alpha_1(t))y(\omega_1(t))$$

ограничен в L_0 и в L_∞ .

Наконец, $T_5 y(t) = \beta_1(t)y(t)$, где $\beta_1(t) = x(t)/x_1(t)$, если $x_1(t) \neq 0$, и $\beta_1(t) = 0$, если $x_1(t) = 0$. Так как $|\beta_1(t)| \leq 1$, то $\|T_5\|_{(L_0, L_\infty)} \leq 1$ и $T_5 x_1 = x$.

Полагая $T = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1$, получим, как и в случае (а), $\|T\|_{(L_0, L_\infty)} \leq (1 + \epsilon)^2$ и $Ta = x$.

Пусть теперь неравенство (1) выполнено для некоторого $C > 0$. Обозначим $y(t) = x(t)/C$, $b(t) = a(t/C)$. Тогда $y^*(t) \leq b^*(t)$, и, по-доказанному, для произвольного $\epsilon > 0$ существует гомоморфизм T , такой, что

$$\|T\|_{(L_0, L_\infty)} \leq (1 + \epsilon)^2, \quad Tb = y.$$

Определим гомоморфизмы $R_C z(t) = z(t/C)$ и $Q_C z(t) = Cz(t)$. Так как $\|R_C\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} = \|Q_C\|_{L_0 \rightarrow L_0} = 1$, $\|Q_C\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} = \|R_C\|_{L_0 \rightarrow L_0} = C$, то для $V = Q_C T R_C$ имеем: $\|V\|_{(L_0, L_\infty)} \leq (1 + \epsilon)^2 C$ и $Va = x$.

Таким образом, в силу произвольности $\epsilon > 0$ из (1) следует, что $x \in \mathcal{O}(a; L_0, L_\infty)$ и $\|x\|_{\mathcal{O}} \leq C$. Вместе с неравенством (3) это означает, что теорема 1 доказана.

2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПАРЕ (L_0, L_∞)

Напомним, что СГ X называется интерполяционной между СГ X_0 и X_1 , если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ (вложения непрерывны) и любой гомоморфизм, ограниченный в X_0 и в X_1 , ограничен в X .

Приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *Для любой СГ X на $(0, \infty)$ справедливы утверждения:*

1) *если $x \in X$, $C > 0$, то $Cx \in X$ и $\|Cx\| \leq ([C] + 1)\|x\|$ ($[C]$ – целая часть числа C);*

2) *для всякого $\tau > 0$ гомоморфизм растяжения $R_\tau x(t) = x(t/\tau)$ ограничен в X и $\|R_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq [\tau] + 1$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы – непосредственное следствие свойств квазинормы: монотонности и субаддитивности.

Для натурального τ так же, как и в случае симметричных пространств можно показать, что $\|R_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \tau$ [3, с.131-132]. Для остальных τ второе утверждение вытекает из того, что

$$(R_{\tau_1} x)^*(t) = (R_{\tau_1} x^*)(t) \leq (R_{\tau_2} x^*)(t) = (R_{\tau_2} x)^*(t) \quad (\tau_1 < \tau_2).$$

Лемма 3. *Пусть X – СГ с квазинормой $\|\cdot\|$. Тогда, если для $x_n \in X$ выполнено: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|$ сходится п.в.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. существует множество E , такое, что $|E| < \infty$ и $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)| = \infty$ для $t \in E$.

Обозначим $E_n^m = \left\{ t \in E : \sum_{i=n}^m |x_i(t)| \geq 1 \right\}$ ($n \leq m$). Для любого $n = 1, 2, \dots$ имеем: $E_n^m \subset E_{m+1}^{m+1}$ и $E = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_n^m$. Следовательно, $|E| = \lim_{m \rightarrow \infty} |E_n^m|$. Выберем m_n так, что $|E \setminus E_n^{m_n}| < |E|/2^{n+1}$. Тогда $E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^{m_n} \subset E$ и

$$|E_0| = |E| - |E \setminus E_0| = |E| - \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus E_n^{m_n}) \right| > |E|/2 > 0.$$

С другой стороны, так как по определению E_0 выполнено: $\chi_{E_0} \leq \sum_{i=n}^{m_n} |x_i|$, то

$$\|\chi_{E_0}\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|x_i\| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Таким образом, $\|\chi_{E_0}\| = 0$, т.е. $|E_0| = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Предположим, что квазинорма $\|\cdot\|$ на СГ X обладает свойством

$$\inf\{\|x\| : x \neq 0\} > 0 \quad (8)$$

Тогда она порождает на X дискретную топологию, и квазинорму со свойством (8) также будем называть дискретной.

Теорема 2. Пусть X – непустая СГ с не дискретной квазинормой, $X \neq S$, где S – множество всех измеримых п.в. конечных функций на полуоси. Тогда $L_0 \cap L_\infty \subset X \subset L_0 + L_\infty$, причем вложения непрерывны.

Доказательство. Предположим, что $x \in L_0 \cap L_\infty$, т.е. $\alpha = |\text{supp } x| < \infty$ и $\|x\|_\infty < \infty$ (можно считать, что $\alpha > 0$). Так как X непусто, найдется $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Далее, существуют измеримое множество E и $\epsilon > 0$, такие, что $0 < |E| = \beta < \|x\|_{L_0 \cap L_\infty}$, $\epsilon < \|x\|_{L_0 \cap L_\infty}$ и $z = \epsilon \chi_E \leq |x_0|$. Тем самым $z \in X$ и $\|z\|_X \leq \|x_0\|_X$.

Определим функцию $w(t) = \|x\|_\infty \chi_E((\beta/\alpha)t)$. По лемме 2 $w \in X$ и

$$\|w\|_X \leq ([\alpha/\beta] + 1)([\|x\|_\infty/\epsilon] + 1)\|z\|_X \leq (4/\epsilon\beta)\|x_0\|_X \|x\|_{L_0 \cap L_\infty}^2$$

(ϵ и β зависят от функции x). Так как $x^* \leq w^*$, получаем: $x \in X$.

Докажем непрерывность вложения $L_0 \cap L_\infty \subset X$. Пусть $\|x_n\|_{L_0 \cap L_\infty} \rightarrow 0$. Так как $\|\cdot\|_X$ не дискретна, то для любого $\delta > 0$ можно найти $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$ и $\|x_1\|_X < \delta$. Как и ранее, существуют $\gamma > 0$ и измеримое множество F , $|F| > 0$, для которых $z = \gamma \chi_F \leq |x_1|$. Значит, $\|z\|_X < \delta$. Найдем N , такое, что при $n \geq N$ $\|x_n\|_{L_0 \cap L_\infty} \leq \min(\gamma, |F|)$. Тогда $x_n^* \leq z^*$, откуда $\|x_n\|_X = \|x_n^*\|_X \leq \|z\|_X < \delta$. Следовательно, $\|x_n\|_X \rightarrow 0$.

Покажем, что $X \not\subset L_0 + L_\infty$ только в том случае, когда $X = S$. Действительно, пусть существует $x_2 \in X$, $x_2 \notin L_0 + L_\infty$. Последнее означает, что функция распределения $n_{|x_2|}(\tau)$ тождественно бесконечна. Так как X – СГ, в X попадают все функции $z = z(t)$, для которых $n_{|z|}(\tau) \equiv \infty$ ($\tau > 0$). Если теперь $x(t)$ произвольна, то $|x| \leq z = \max(|x_2|, |x|)$, где $n_{|z|}(\tau) \equiv \infty$. Значит, $x \in X$.

В заключение докажем непрерывность вложения $X \subset L_0 + L_\infty$. Предположим, что, напротив, существует последовательность $\{x_n\} \subset X$, такая, что $\|x_n\|_X \rightarrow 0$ и

$$\|x_n\|_{L_0 + L_\infty} \geq \sigma > 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

Найдем подпоследовательность $\{\tilde{x}_n\} \subset \{x_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{x}_n^*\|_X < \infty.$$

По лемме 3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n^*(t)$ сходится п.в. на $(0, \infty)$, и, значит, $\tilde{x}_n^*(t) \rightarrow 0$ п.в. Следовательно, по теореме Рисса существует подпоследовательность $\{\tilde{x}_n\} \subset \{\tilde{x}_n^*\}$, такая, что $|\{t \in [0, 1] : \tilde{x}_n^*(t) > \tau\}| \rightarrow 0$ для $\tau > 0$. Так как функции $\tilde{x}_n^*$ не возрастают, то $\tilde{x}_n^* \rightarrow 0$ по мере на всей полуоси.

Как известно [1, с.223],

$$\|x\|_{L_0 + L_\infty} = \inf_{t>0} \{t + x^*(t)\} \quad (10)$$

Непосредственная проверка показывает, что эта квазинорма задает сходимость по мере на полуоси. Поэтому

$$\|\tilde{x}_n\|_{L_0 + L_\infty} = \|\tilde{x}_n^*\|_{L_0 + L_\infty} \rightarrow 0,$$

что противоречит (9). Теорема доказана.

Теорема 3. Любая непустая СГ X с не дискретной квазинормой, $X \neq S$, интерполяционна между группами L_0 и L_∞ , т.е. всякий гомоморфизм, ограниченный в L_0 и в L_∞ , ограничен в X .

Доказательство. По теореме 2 гомоморфизм, определенный на L_0 и L_∞ , определен на X , и для каждого $x \in X$ справедливо неравенство (2). Отсюда по лемме 2

$$\|T\|_X \leq ([\|T\|] + 1)^2 \|x\|_X.$$

Замечание 1. Из теоремы 1 непосредственно вытекает утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению теоремы 3: если квазинормированная группа измеримых функций интерполяционна между L_0 и L_∞ , то она симметрична.

Замечание 2. Как известно, для симметричных пространств ситуация иная: среди них есть пространства, промежуточные между L_1 и L_∞ , но не интерполяционные относительно этой пары [3, с.166-169].

3. О $\mathcal{K}$ -ОРБИТЕ В ПАРЕ (L_0, L_∞)

Пусть (X_0, X_1) – банахова пара СГ, $a \in X_0 + X_1$. Как и в случае банаховых пространств [4, р.407], $\mathcal{K}$ -орбитой элемента a назовем множество $\mathcal{KO}(a; X_0, X_1)$ всех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{KO}} = \sup_{t>0} \frac{\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)}{\mathcal{K}(t, a; X_0, X_1)} < \infty,$$

где

$$\mathcal{K}(t, z; X_0, X_1) = \inf\{\|z_0\|_{X_0} + t\|z_1\|_{X_1} : z = z_0 + z_1, z_i \in X_i\}.$$

Обозначим через $C - \mathcal{KO}(a; X_0, X_1)$ и $C - \mathcal{O}(a; X_0, X_1)$ замкнутые шары с центром в нуле и радиусом $C > 0$ в СГ $\mathcal{KO}(a; X_0, X_1)$ и $\mathcal{O}(a; X_0, X_1)$ соответственно. Легко проверить, что

$$1 - \mathcal{O}(a; X_0, X_1) \subset 1 - \mathcal{KO}(a; X_0, X_1).$$

Пара (X_0, X_1) называется $\mathcal{K}$ -монотонной с константой C , если

$$1 - \mathcal{KO}(a; X_0, X_1) \subset C - \mathcal{O}(a; X_0, X_1)$$

для любого $a \in X_0 + X_1$.

Классический пример $\mathcal{K}$ -монотонной пары с константой 1 – пара (L_1, L_∞) [5,6] (другие примеры $\mathcal{K}$ -монотонных пар см. в [4]).

Покажем, что пара (L_0, L_∞) не является $\mathcal{K}$ -монотонной с константой 1.

Теорема 4. Существуют $a \in L_0 + L_\infty$ и $x \in L_0 + L_\infty$, такие, что для всех $t > 0$

$$\mathcal{K}(t, a; L_0, L_\infty) = \mathcal{K}(t, x; L_0, L_\infty),$$

но $a^*(t) < x^*(t)$ ($t \in E$) для некоторого измеримого множества E , $|E| > 0$.

Доказательство. Пусть для чисел $0 < x_1 < x_0$, $0 < \tau_1 < \tau_2$ выполнено неравенство

$$x_1 \tau_1 < (\tau_2 - \tau_1)(x_0 - x_1) \quad (11)$$

Определим ступенчатую функцию

$$x(t) = x_0\chi_{(0,\tau_1]}(t) + x_1\chi_{(\tau_1,\tau_2)}(t).$$

Так как аналогично (10)

$$\mathcal{K}(t, y; L_0, L_\infty) = \inf_{s>0} \{s + ty^*(s)\} \quad (y \in L_0 + L_\infty), \quad (12)$$

то

$$\mathcal{K}(t, x; L_0, L_\infty) = \min\{tx_0, tx_1 + \tau_1, \tau_2\}.$$

Непосредственно проверяется, что ввиду (11)

$$\mathcal{K}(t, x; L_0, L_\infty) = \begin{cases} tx_0, & t \leq \tau_1/(x_0 - x_1) \\ tx_1 + \tau_1, & \tau_1/(x_0 - x_1) < t \leq (\tau_2 - \tau_1)/x_1 \\ \tau_2, & t > (\tau_2 - \tau_1)/x_1 \end{cases}$$

Определим функцию

$$a(s) = x_0\chi_{(0,\tau_1]}(s) + x_1 \frac{\tau_2 - s}{\tau_2 - \tau_1} \chi_{(\tau_1,\tau_2)}(s).$$

Тогда $a(s) = a^*(s) \leq x(s) = x^*(s)$ ($s > 0$) и $a(s) < x(s)$ ($\tau_1 < s < \tau_2$). Покажем, что

$$\mathcal{K}(t, a; L_0, L_\infty) = \mathcal{K}(t, x; L_0, L_\infty) \quad (t > 0) \quad (13)$$

Ввиду (12) и определения функций $x(s)$ и $a(s)$ для этого достаточно доказать, что

$$\mathcal{K}(t, x; L_0, L_\infty) \leq \min(\tau_1 + tx_1, \tau_2) \quad (t > 0) \quad (14)$$

В случае $t \leq \tau_1/(x_0 - x_1)$ (14) переходит в эквивалентное приведенному условию неравенство: $tx_0 \leq \tau_1 + tx_1$. Если же $\tau_1/(x_0 - x_1) < t \leq (\tau_2 - \tau_1)/x_1$ или $t > (\tau_2 - \tau_1)/x_1$, то получаем равенства: $tx_1 + \tau_1 = tx_1 + \tau_1$ и $\tau_2 = \tau_2$ соответственно.

Итак, соотношение (13), а с ним и теорема доказаны.

Из теорем 1 и 4 получаем

Следствие. *Существует функция $a \in L_0 + L_\infty$, для которой*

$$1 - \mathcal{O}(a; L_0, L_\infty) \neq 1 - \mathcal{K}\mathcal{O}(a; L_0, L_\infty).$$

Замечание 3. Тем не менее, пара (L_0, L_∞) $\mathcal{K}$ -монотонна с константой 2.

Для доказательства этого введем еще один функционал:

$$\mathcal{M}(t, y) = \mathcal{M}(t, y; L_0, L_\infty) = \inf_{s>0} \max(s, ty^*(s)).$$

Тогда ввиду (12) для $y \in L_0 + L_\infty$ и $t > 0$

$$\mathcal{M}(t, y) \leq \mathcal{K}(t, y) \leq 2\mathcal{M}(t, y) \quad (15)$$

Предположим, что для всех $t > 0$

$$\mathcal{K}(t, y) \leq \mathcal{K}(t, x).$$

Ввиду (15) тогда

$$\mathcal{M}(t, y) \leq 2\mathcal{M}(t, x) \quad (t > 0) \quad (16)$$

Пусть $s_0 > 0$ – точка непрерывности $y^*(s)$ и $y^*(s_0) > 0$. Нетрудно проверить, что для $t_0 = s_0/y^*(s_0)$

$$\mathcal{M}(t_0, y) = s_0 = t_0 y^*(s_0).$$

Предполагая для простоты функцию $x^*(s)$ непрерывной, найдем s_1 , такое, что

$$\mathcal{M}(t_0, x) = s_1 = t_0 x^*(s_1).$$

Из (16) следует: $s_0 \leq 2s_1$, откуда $x^*(s_1) \leq x^*(s_0/2)$. Опять ввиду (16)

$$t_0 y^*(s_0) \leq 2t_0 x^*(s_1) \leq 2t_0 x^*(s_0/2)$$

или

$$y^*(s_0) \leq 2x^*(s_0/2).$$

Последнее неравенство выполняется, конечно, и в случае $y^*(s_0) = 0$.

По теореме 1 отсюда получаем: $y \in 2 - \mathcal{O}(x; L_0, L_\infty)$.

Список литературы

- [1] Берг Й., Лёфстрём Й. *Интерполяционные пространства. Введение*. М.: Мир, 1980.-264с.
- [2] Peetre J., Sparr G. *Interpolation of normed Abelian groups*// Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1972. V. 92, No. 4. P. 217-262.
- [3] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов*. М.: Наука, 1978.-400 с.
- [4] Ovchinnikov V. I. *The method of orbits in interpolation theory* // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 349-515.
- [5] Митягин Б. С. *Интерполяционная теорема для модулярных пространств*// Матем. сборник. 1965. Т. 66, No. 4. С. 473-482.
- [6] Calderon A. P. *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*// Studia Math. 1966. V. 26. P. 273-299.