

О КОНУСАХ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Асташкин

1. Напомним, что *симметричным пространством* (СП) называется банахово пространство X измеримых функций на $[0, 1]$, для которого:

- 1) из $y \in X$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$ следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$;
- 2) если $y \in X$ и функция $|x(t)|$ равноизмерима с функцией $|y(t)|$, то $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

Теория СП изложена в [1].

Пусть X — СП на $[0, 1]$. Тогда оно однозначно определяется конусом функций $y \in X$ вида

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t),$$

где $c_k \geq 0$, $c_k \leq c_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$), а χ_e — характеристическая функция множества $e \subset [0, 1]$. Действительно, для $x \in X$ положим

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k+1}) \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]}(t),$$

где $x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$ [1]. Тогда $y \leq x^* \leq \sigma_2 y$, где $\sigma_s z(u) = z(u/s) \chi_{[0,1]}(u/s)$ — оператор растяжения. Так как $\|\sigma_s\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, s)$ [1], то из предыдущего неравенства вытекает $\|y\|_X \leq \|x\|_X \leq 2\|y\|_X$.

Пусть Φ — некоторый класс СП, $X_0 \in \Phi$. Будем говорить, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ подмножеств $[0, 1]$ *определяет* X_0 в классе Φ , если из эквивалентности норм X_0 и произвольного СП $X \in \Phi$ на конусе функций вида

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{e_k}(t) \quad (c_k \geq 0, c_k \leq c_{k+1}, k = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

следует равенство $X = X_0$ (изоморфизм).

В случае, когда Φ — класс всех максимальных СП [1], эта задача рассматривалась в [2]. Ответ, полученный там, свидетельствует об определенной вырожденности задачи в такой постановке: так, если фундаментальная функция X_0 степенная, то система попарно дизъюнктивных подмножеств $\{e_k\}$ определяет X_0 тогда и только тогда, когда для мер $\mu(e_k) = a_k$ выполнено $\sup_{k=1,2,\dots} a_k/a_{k+1} < \infty$ (по сути дела,

приходим к изученному ранее случаю: $a_k = 2^{-k}$). Причина этого — «слишком» сильное влияние фундаментальной функции СП. Более содержательной, на наш взгляд, задача становится при рассмотрении классов, состоящих из СП с одной и той же фундаментальной функцией.

Напомним ряд определений. Кроме L_p ($1 \leq p \leq \infty$) важные примеры СП — пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и Марцинкевича $M(\varphi)$:

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(s) d\varphi(s), \quad \|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\int_0^t x^*(s) ds}{\varphi(t)},$$

где $\varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$. Равенством

$$\mathcal{M}_\varphi(t) = \sup_{0 < s \leq \min(1, 1/t)} \frac{\varphi(st)}{\varphi(s)} \quad (t > 0)$$

определяется функция растяжения функции $\varphi(t)$. Поведение величины $\mathcal{M}_\varphi(t)$ характеризует нижний и верхний показатели растяжения

$$\gamma_\varphi = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_\varphi(t)}{\ln t}, \quad \delta_\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_\varphi(t)}{\ln t}. \quad (2)$$

В частности, если в качестве $\varphi(t)$ взять $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$ — фундаментальную функцию СП X (для L_p она равна $t^{1/p}$, для $\Lambda(\varphi)$ — $\varphi(t)$, для $M(\varphi)$ — $\tilde{\varphi}(t) = t/\varphi(t)$), то получим числа $\gamma_X = \gamma_{\varphi_X}$ и $\delta_X = \delta_{\varphi_X}$. Если в (2) вместо $\mathcal{M}_\varphi(t)$ подставить норму оператора растяжения $\|\sigma_t\|_{X \rightarrow X}$, то придем к определению индексов Бойда α_X и β_X пространства X .

2. В дальнейшем будут рассматриваться системы $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ подмножеств $[0, 1]$, для мер которых $\mu(e_k) = a_k$ выполнены соотношения

$$0 < a_{k+1} \leq a_k, \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \leq 1, \quad (3)$$

$$\sup_{k=1,2,\dots} \frac{1}{a_k} \sum_{n=k}^\infty a_n < \infty. \quad (4)$$

Условие (4), как известно, означает, что последовательность $\{a_k\}$ можно разбить на конечное число подпоследовательностей так, что члены каждой из них убывают не медленнее, чем геометрическая прогрессия [3, с. 22].

Напомним, что пространство X называют интерполяционным между банаховыми пространствами X_0 и X_1 , если любой линейный оператор, ограниченный в X_0 и X_1 , ограничен в X .

Теорема 1. Пусть $\psi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$, $0 < \gamma_\psi \leq \sigma_\psi < 1$, X — СП на $[0, 1]$, интерполяционное между $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$, $\bar{\chi}_b = \chi_b / \|\chi_b\|_X$ ($b \subset [0, 1]$). Если $\Delta_1 = \{e_k\}_{k=1}^\infty$ и $\Delta_2 = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ — две системы подмножеств $[0, 1]$, для которых выполнены условия (3) и (4), то для любых чисел $c_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X \approx \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{f_k} \right\|_X,$$

т. е. существует $A > 0$, не зависящее от $\{c_k\}$, такое что

$$A^{-1} \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{f_k} \right\|_X \leq A \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для системы попарно дизъюнктивных множеств $\Delta = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $g_k \subset [0, 1]$, через T_{Δ} обозначим оператор усреднения

$$T_{\Delta} x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(g_i)} \int_{g_i} x(s) ds \chi_{g_i}(t).$$

Так как $\|T_{\Delta}\|_{L_{\infty} \rightarrow L_{\infty}} = \|T_{\Delta}\|_{L_1 \rightarrow L_1} = 1$ и $\Lambda(\psi)$, $M(\tilde{\psi})$ — точные интерполяционные пространства между L_1 и L_{∞} [1, § 5], имеем

$$\|T_{\Delta}\|_{\Lambda(\psi) \rightarrow \Lambda(\psi)} \leq 1, \quad \|T_{\Delta}\|_{M(\tilde{\psi}) \rightarrow M(\tilde{\psi})} \leq 1.$$

Поэтому T_{Δ} ограничен в X .

Из условий теоремы следует, что величина $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X$ зависит лишь от чисел $c_k \geq 0$ и $\mu(e_k)$ [4]. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать множества e_k (и аналогично f_k) попарно дизъюнктивными.

На образе $T_{\Delta_1}(M(\tilde{\psi}))$ определим оператор S :

$$S \left(\sum d_k \bar{\chi}_{e_k} \right) = \sum d_k \bar{\chi}_{f_k}.$$

Как показано в [4], при условии $0 < \gamma_{\psi} \leq \delta_{\psi} < 1$

$$\begin{aligned} \left\| \sum d_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_{\Lambda(\psi)} &\approx \left\| \sum d_k \bar{\chi}_{f_k} \right\|_{\Lambda(\psi)} \approx \sum_k |d_k|, \\ \left\| \sum d_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_{M(\tilde{\psi})} &\approx \left\| \sum d_k \bar{\chi}_{f_k} \right\|_{M(\tilde{\psi})} \approx \sup_k |d_k| \end{aligned} \quad (5)$$

для любых d_k ($k = 1, 2, \dots$). Поэтому оператор ST_{Δ_1} непрерывен в X и

$$\left\| \sum c_k \bar{\chi}_{f_k} \right\|_X = \left\| ST_{\Delta_1} \left(\sum c_k \bar{\chi}_{e_k} \right) \right\|_X \leq A_1 \left\| \sum c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X,$$

где $A_1 > 0$ не зависит от c_k , $k = 1, 2, \dots$. Аналогично, меняя местами Δ_1 и Δ_2 , для некоторого $A_2 > 0$ получим

$$\left\| \sum c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X \leq A_2 \left\| \sum c_k \bar{\chi}_{f_k} \right\|_X.$$

Обозначим через $I(\psi)$ класс всех СП, интерполяционных между $\Lambda(\psi)$ и $M(\tilde{\psi})$.

Теорема 2. Пусть система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $e_k \subset [0, 1]$, удовлетворяет условиям (3) и (4), $X_0 \in I(\psi)$, $0 < \gamma_{\psi} \leq \delta_{\psi} < 1$. Тогда система $\{e_k\}$ определяет X_0 относительно $I(\psi)$, т. е. из эквивалентности

$$\left\| \sum c_k \chi_{e_k} \right\|_X \approx \left\| \sum c_k \chi_{e_k} \right\|_{X_0} \quad (0 \leq c_k \leq c_{k+1}, k = 1, 2, \dots)$$

для $X \in I(\psi)$ следует $X = X_0$.

Доказательство следует из теоремы 1 с $f_k = (2^{-k}, 2^{-k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots$) и замечаний в начале работы.

Следствие. Пусть X — СП на $[0, 1]$, интерполяционное между $\Lambda(t^{1/p})$ и $M(t^{1-1/p})$, $1 < p < \infty$. Если существует система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k \subset [0, 1]$, удовлетворяющая (3) и (4), такая, что для всех c_k , $0 \leq c_k \leq c_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{e_k} \right\|_X \approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^p \mu(e_k) \right)^{1/p},$$

то $X = L_p$.

Доказательство следует из интерполяционности L_p между $\Lambda(t^{1/p})$ и $M(t^{1-1/p})$ [5, с.148].

Аналогичный результат справедлив и для общих пространств Орлича [6].

3. Покажем, что при «незначительном» расширении класса СП утверждения типа теорем 1 и 2 из предыдущего пункта перестают быть справедливыми.

Для возрастающей вогнутой функции ψ на $[0, 1]$ через $J(\psi)$ обозначим класс всех СП X , фундаментальная функция которых эквивалентна $\psi(t)$, а индексы Бойда совпадают с соответствующими показателями растяжения: $\alpha_X = \gamma_\psi$, $\beta_X = \delta_\psi$. Нетрудно показать, что $I(\psi) \subset J(\psi)$, причем вложение строгое (это, в частности, следует из теоремы 3).

Напомним определение вещественного метода интерполяции.

Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, E — идеальная структура двусторонних числовых последовательностей $a = (a_j)_{j=-\infty}^\infty$, интерполяционная между l_∞ и $l_\infty(2^{-k})$ (если F — идеальная структура, $v = (v_k)$, $v_k \geq 0$, то $\|(a_j)\|_{F(v_k)} = \|(a_j v_j)\|_F$). Пространство $\mathcal{K}$ -метода $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ (оно интерполяционно между X_0 и X_1) состоит из $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))\|_E,$$

где

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf_{\substack{x=x_0+x_1, \\ x_i \in X_i}} \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} \}.$$

Далее некоторое время нам будет удобнее иметь дело с симметричными пространствами функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$. Из равенства

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty) = \int_0^t x^*(s) ds \quad (t > 0)$$

следует, что для $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $l_{\theta,p} = l_p(2^{k(\theta-1)})$

$$\Lambda(t^\theta) = (L_1, L_\infty)_{l_{\theta,1}}^{\mathcal{K}}, \quad (6)$$

$$M(t^{1-\theta}) = (L_1, L_\infty)_{l_{\theta,\infty}}^{\mathcal{K}}, \quad (7)$$

где пространства Лоренца и Марцинкевича на $(0, \infty)$ определяются аналогично случаю $[0, 1]$ [1].

Докажем сначала вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Предложение. Пусть X — СП на $(0, \infty)$,

$$X = (L_1, L_\infty)_E^{\mathcal{K}},$$

причем $l_\infty \not\subset E$. Тогда

$$\|\sigma_{2^k}\|_X \approx 2^k \|P_{-k}\|_E \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где $P_k(a_j) = (a_{j+k})_{j=-\infty}^\infty$ — оператор сдвига в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для $x \in X$

$$\|\sigma_{2^k} x\|_X = 2^k \|P_{-k}(f(2^j))\|_E, \quad (8)$$

где $f(t) = \mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\sigma_{2^k} x\|_X &= \|(\mathcal{K}(2^j, x(2^{-k}s); L_1, L_\infty))_j\|_E \\ &= \left\| \left(\int_0^{2^j} x^*(2^{-k}s) ds \right)_j \right\|_E = 2^k \|P_{-k}(f(2^j))\|_E. \end{aligned}$$

Из (8), в частности, следует

$$\|\sigma_{2^k}\| \leq 2^k \|P_{-k}\|.$$

Далее, так как E интерполяционно между l_∞ и $l_\infty(2^{-k})$, найдется $C_1 > 0$ такое, что для любого $a = (a_j) \in E$ последовательность $\bar{a} = (\bar{a}_k)$,

$$\bar{a}_k = \mathcal{K}(2^k, a; l_\infty, l_\infty(2^{-j})) = \sup_{j=0, \pm 1, \dots} [\min(1, 2^{k-j}) |a_j|],$$

также принадлежит E и $\|\bar{a}\|_E \leq C_1 \|a\|_E$ [7, § 7]. Дополнительно отметим, что $|a_k| \leq \bar{a}_k$ и

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \bar{a}_k = 0 \quad (9)$$

ввиду монотонности $\{\bar{a}_k\}$ и условия $l_\infty \not\subset E$. Для $a \in E$ введем функцию

$$f_a(t) = \sum_{k=-\infty}^\infty \bar{a}_k \chi_{[2^k, 2^{k+1})}(t). \text{ Так как для } t_1 < t_2 \text{ будет}$$

$$f_a(t_1) \leq f_a(t_2), \quad \frac{f_a(t_2)}{t_2} \leq 2 \frac{f_a(t_1)}{t_1},$$

функция f_a эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\bar{f}_a$ [1, с. 63]. Ввиду (9) $\bar{f}_a$ абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$, и поэтому

$$\mathcal{K}(2^k, \bar{f}_a'; L_1, L_\infty) = \bar{f}_a(2^k) \approx f_a(2^k) = \bar{a}_k.$$

Следовательно, $\bar{f}_a' \in X$, и из-за (8) и монотонности P_k

$$\begin{aligned} 2^k \|P_{-k} a\|_E &\leq 2^k \|P_{-k} \bar{a}\|_E \leq 2^k \|P_{-k}(\bar{f}_a(2^j))\|_E \\ &= \|\sigma_{2^k}(\bar{f}_a')\|_X \leq \|\sigma_{2^k}\| \|(\bar{f}_a(2^j))\|_E \leq C_1 C_2 \|\sigma_{2^k}\| \|a\|_E, \end{aligned}$$

где C_2 — константа последней эквивалентности. Предложение доказано.

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем $\psi(t) = t^{1/2}$.

Теорема 3. Существует СП Y на $[0, 1]$, $Y \in J(t^{1/2})$, такое, что $Y \neq \Lambda(t^{1/2})$ и для некоторой системы $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ попарно дизъюнктивных подмножеств $[0, 1]$, удовлетворяющей условиям (3) и (4), и всех $c_k \geq 0$

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_Y \approx \|(c_k)\|_{l_1}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует инвариантная относительно сдвига идеальная структура G (т. е. $\sup_{k=0, \pm 1, \dots} \|P_k\|_{G \rightarrow G} < \infty$) такая, что для

некоторых двух бесконечных множеств $U \subset \mathbb{Z}$ и $V \subset \mathbb{Z}$ сужения $G|_U$ и $G|_V$ совпадают с $l_1|_U$ и $c_0|_V$ соответственно [8, предложение 1]. Не ограничивая общности, можно считать, что $U \subset \mathbb{Z}_-$, $V \subset \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$. Обозначим $E = G(2^{-k/2})$, $X = (L_1, L_\infty)_E^X$. Тогда X — СП на $(0, \infty)$; так как $l_1 \subset G \subset l_\infty$, то $\Lambda(t^{1/2}) \subset X \subset M(t^{1/2})$ ввиду (6) и (7) и, значит, $\varphi_X(t) \approx t^{1/2}$. Непосредственно проверяется, что $\|P_k\|_E \approx 2^{k/2}$ (см. также [9]). Поэтому в силу предложения $\|\sigma_{2^k}\|_{X \rightarrow X} \approx 2^{k/2}$, откуда из-за квазивогнутости [1, с. 70] $\|\sigma_t\|_{X \rightarrow X} \approx t^{1/2}$ и $\gamma_X = \alpha_X = \delta_X = \beta_X = 1/2$.

Пусть $U = \{-n_k\}_{k=1}^\infty$, где $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$. Тогда система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k = (2^{-n_{k+1}}, 2^{-n_k})$, очевидно, удовлетворяет условиям (3) и (4). Если $c_k \geq 0$, то согласно вложению $\Lambda(t^{1/2}) \subset X$ и соотношению (5) для $y = \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{e_k}$

$$\|y\|_X \leq \|y\|_{\Lambda(t^{1/2})} \leq A_1 \|(c_k)\|_{l_1}.$$

Наоборот, если $-n_j < k \leq -n_{j-1}$, $j = 2, 3, \dots$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(2^k, y; L_1, L_\infty) &= \int_0^{2^k} y^*(s) ds \geq \int_0^{2^k} y(s) ds \geq \sum_{i=j}^\infty c_i 2^{n_i/2} (2^{-n_i} - 2^{-n_{i+1}}) \\ &\quad + c_{j-1} 2^{n_{j-1}/2} (2^k - 2^{-n_j}) \geq 1/2 \cdot 2^{k+n_{j-1}/2} c_{j-1}. \end{aligned}$$

Обозначим $b = (b_k)$, $b_k = 2^{-k/2} \mathcal{K}(2^k, y; L_1, L_\infty)$ для $-n_j < k \leq -n_{j-1}$, $j = 2, 3, \dots$, и $b_k = 0$ для остальных $k \in \mathbb{Z}$. Тогда ввиду предыдущего неравенства

$$\|y\|_X \geq \|b\|_E = \|(b_k 2^{-k/2})\|_G \geq \|(b_k 2^{-k/2})\|_{G|_U} = \|(b_k 2^{-k/2})\|_{l_1|_U} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty |c_j|.$$

Итак,

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty c_k \bar{\chi}_{e_k} \right\|_X \approx \|(c_k)\|_{l_1}.$$

Через Y обозначим множество всех функций $x = x(t)$, измеримых на $[0, 1]$, для которых их продолжение нулем на $[0, \infty)$ принадлежит X , с нормой, равной норме в X этого продолжения. Тогда Y — СП на $[0, 1]$, $\gamma_Y = \alpha_Y = \beta_Y = \delta_Y = 1/2$ и справедливо (10). Далее, пространства $l_1(2^{-k/2})$ и $E = G(2^{-k/2})$ интерполяционны между l_∞ и $l_\infty(2^{-k/2})$ [9]. Поэтому если предположить, что $Y = \Lambda(t^{1/2})$ на $[0, 1]$, то, рассуждая таким же образом, как во второй части доказательства предложения, можно показать, что $l_1(2^{-k/2})|_{\mathbb{Z}_-} = E|_{\mathbb{Z}_-}$, т. е. $G|_{\mathbb{Z}_-} = l_1|_{\mathbb{Z}_-}$ (см. также [10, предложение 2]). Последнее противоречит выбору пространства G . Теорема доказана.

4. Обозначим через $F(\psi)$ класс СП на $[0, 1]$ с фундаментальной функцией $\psi(t)$. Покажем, что теорема 2 несправедлива для $F(\psi)$, даже если эквивалентность норм на конусе функций вида (1) заменить их изометрическим совпадением.

Напомним: для показателей растяжения фундаментальной функции и индексов Бойда СП всегда выполнено $0 \leq \alpha_X \leq \gamma_X \leq \delta_X \leq \beta_X \leq 1$,

причем для важнейших классов СП (пространств Лоренца, Марцинкевича, Орлича) $\alpha_X = \gamma_X$ и $\beta_X = \delta_X$. В [11] тем не менее был приведен первый пример СП на $[0, 1]$, для которого это не так. (В дальнейшем такие СП стали называть пространствами не фундаментального типа).

Здесь построим СП X на $[0, 1]$ не фундаментального типа, $\varphi_X(t) = t^{1/2}$ (и, значит, $\gamma_X = \delta_X = 1/2$), $\alpha_X = 0$, $\beta_X = 1$, и в то же время на некотором конусе ступенчатых функций вида (1) норма X будет совпадать с нормой L_2 . В дальнейшем

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 \leq i \leq n$ и $0 < b \leq 1$ положим

$$a_0 = 0, \quad a_i = 2^{2n(i-n)} n^{-1}, \quad h_b = b^{-1/2} \chi_{(0,b)},$$

$$h_i = h_{a_i}, \quad u_i = h_i \chi_{(a_{i-1}, a_i)}, \quad w_n = n^{-1/2} \sup_{i=1, \dots, n} h_i = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n u_i,$$

$$g_n(s) = \sigma_n w_n(s) = w_n(s/n), \quad r_n(s) = \sigma_{n-1} w_n(s) = w_n(sn).$$

Оценим, прежде всего, $\sup_{0 < b \leq 1} (g_n, h_b)$ и $\sup_{0 < b \leq 1} (r_n, h_b)$ ($n = 2, 3, \dots$). Для $1 < j \leq n$ после несложных вычислений получим

$$\int_0^1 \sum_{i < j} u_i dt = \sum_{i=1}^{j-1} a_i^{-1/2} (a_i - a_{i-1}) = \frac{2^{n(j-n)}}{(2^n - 1)n^{1/2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (w_n, h_j) &= n^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^j \int_0^1 u_i h_j dt + \sum_{i=j+1}^n \int_0^1 u_i h_j dt \right) = n^{-1/2} \left(\int_0^1 u_j h_j dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} \int_0^1 u_i h_j dt \right) \leq n^{-1/2} \left(1 + a_j^{-1/2} \int_0^1 \sum_{i < j} u_i dt \right) \leq n^{-1/2} [1 + (2^n - 1)^{-1}]. \end{aligned}$$

Если теперь $a_i \leq b < a_{i+1}$ ($1 < i < n$), то

$$(w_n, h_b) \leq \int_0^{a_i} w_n h_i dt + n^{-1/2} \int_{a_i}^b u_{i+1} h_b dt \leq n^{-1/2} [2 + (2^n - 1)^{-1}].$$

Последнее неравенство, очевидно, справедливо и для $0 < b \leq a_1$ и $a_n \leq b \leq 1$. Таким образом, для всех $0 < b \leq 1$

$$(w_n, h_b) \leq n^{-1/2} [2 + (2^n - 1)^{-1}]. \quad (11)$$

Если $c = b/n$, $d = bn$, то

$$\begin{aligned} (g_n, h_b) &= n \int_0^{1/n} w_n(t) h_b(tn) dt = n^{1/2} \int_0^1 w_n(t) h_c(t) dt, \\ (r_n, h_b) &= \frac{1}{n} \int_0^{1/n} w_n(t) h_b(t/n) dt = n^{-1/2} \int_0^1 w_n(t) h_d(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому ввиду (11)

$$\sup_{0 < b \leq 1} (g_n, h_b) \leq 2 + (2^n - 1)^{-1} \leq 3, \quad (12)$$

$$\sup_{0 < b \leq 1} (r_n, h_b) \leq \frac{1}{n} [2 + (2^n - 1)^{-1}] \leq \frac{3}{n}. \quad (13)$$

Определим конус V и вместе с ним пространство X . Зададим последовательность натуральных чисел: $n_1 = 2$,

$$n_{m+1} = 2^{2n_m(n_m-1)} n_m \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Если $(a_i^m)_{i=0}^{n_m}$ — серия точек, построенная по числу n_m , как и ранее, то их объединение по $m = 1, 2, \dots$ ввиду (14) при естественной нумерации образует последовательность, монотонно стремящуюся к нулю, а система всех промежутков $(a_{i-1}^m, a_i^m]$ является разбиением $[0, 1/2]$. Обозначим через V конус функций вида

$$v(t) = c_0 \chi_{[1/2, 1]}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{n_m} c_i^m \chi_{i,m}(t),$$

где

$$\chi_{i,m}(t) = \chi_{(a_{i-1}^m, a_i^m]}(t) \quad (m = 1, 2, \dots; i = 2, \dots, n_m),$$

$$0 \leq c_0 \leq c_{n_1}^1 \leq c_{n_1-1}^1 \leq \dots \leq c_2^1 \leq c_{n_2}^2 \leq \dots \leq c_2^2 \leq \dots \leq c_{n_k}^k \leq \dots \leq c_2^k \leq \dots$$

Если $Q = V \cup \{h_b, 0 < b \leq 1\}$, то по определению пространство X состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$, для которых

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{q \in Q, \\ \|q\|_2 \leq 1}} \int_0^1 x^*(t) q(t) dt < \infty.$$

Из свойств перестановки функции [1, с. 88–106] следует, что X — СП на $[0, 1]$. Кроме того, $\|q\|_X = \|q\|_2$ для $q \in Q$. Поэтому

$$\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X = t^{1/2} \|h_t\|_2 = t^{1/2},$$

и для $w_m = w_{n_m}$ будет $\|w_m\|_X = \|w_m\|_2 = 1 - 2^{-2n_m}$. Отсюда $L_2 \subset X \subset M(t^{1/2})$, и для всех $m = 1, 2, \dots$

$$3/4 \leq \|w_m\|_X = \|w_m\|_2 \leq 1. \quad (15)$$

Докажем, что $\alpha_X = 0$, $\beta_X = 1$. Ввиду (15) для этого достаточно проверить, что $\|g_m\|_X \approx 1$ и $\|r_m\|_X \approx n_m^{-1}$ ($g_m = g_{n_m}$, $r_m = r_{n_m}$). В силу соотношения (12) и (13) и определения X последнее эквивалентно равномерной ограниченности величин (g_m, v) и $n_m(r_m, v)$ по всем $v \in V$, $\|v\|_2 \leq 1$ и $m \in \mathbb{N}$.

Итак, пусть $v \in V$, $m \in \mathbb{N}$. Представим $v = v_1 + v_2 + v_3$, где

$$v_1 = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=2}^{n_j} c_i^j \chi_{i,j} + c_0 \chi_{[1/2, 1]}, \quad v_2 = \sum_{i=2}^{n_m} c_i^m \chi_{i,m}, \quad v_3 = v - v_1 - v_2.$$

Так как из-за (14) $n_m a_{n_m-1}^m \leq a_1^{m-1}$, для $n = n_m$ будет

$$\begin{aligned} (g_m, v_1) &= \int_{a_1^{m-1}}^1 g_m v_1 dt \leq n^{-1/2} \int_{a_1^{m-1}}^1 u_n^m(t/n) v_1(t) dt \\ &\leq n^{-1/2} \|\sigma_n(u_n^m)\|_2 \|v_1\|_2 \leq \|u_n^m\|_2 \|v_1\|_2. \end{aligned}$$

Но $\|u_n^m\|_2 \leq 1$, и поэтому

$$(g_m, v_1) \leq 1. \quad (16)$$

Если $\tau = 1/n_{m+1}$, то

$$(g_m, v_3) = \int_0^\tau g_m v_3 dt = \int_0^\tau w_m v_3 dt,$$

так как на $(0, \tau)$ функция w_m постоянна. Следовательно,

$$(g_m, v_3) \leq \|w_m\|_2 \|v_3\|_2 \leq 1. \quad (17)$$

Оценим, наконец, (g_m, v_2) . Представим $g_m = w'_m + w''_m$, где

$$w'_m = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n a_i^{-1/2} \chi_{(na_{i-1}, b_{i-1})}, \quad w''_m = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n a_i^{-1/2} \chi_{(b_{i-1}, na_i)},$$

$$b_{i-1} = na_{i-1} + a_i - a_{i-1}, \quad n = n_m, \quad a_i = a_i^m.$$

Так как функции w'_m и w_m равноизмеримы, то ввиду (15) $\|w'_m\|_2 = \|w_m\|_2 \leq 1$. Кроме того, легко проверить, что $a_i^{-1/2}(a_i - a_{i-1}) \leq 2^{-n}(a_{i+1} - a_i)^{1/2}$ для $1 \leq i \leq n-1$. Поэтому

$$\begin{aligned} (g_m, v_2) &= (w'_m, v_2) + (w''_m, v_2) \leq \|w'_m\|_2 \|v_2\|_2 \\ &+ n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}^m a_i^{-1/2} (n-1)(a_i - a_{i-1}) \leq 1 + \frac{n-1}{2^n \sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}^m (a_{i+1} - a_i)^{1/2} \\ &\leq 1 + \frac{n-1}{2^n \sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (c_{i+1}^m)^2 (a_{i+1} - a_i) \right]^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1 \right)^{1/2} \leq 1 + \frac{n-1}{2^n} \|v_2\|_2 \leq 2, \end{aligned}$$

т. е.

$$(g_m, v_2) \leq 2. \quad (18)$$

В итоге из (16)–(18) получаем

$$(g_m, v) \leq 4 \quad (19)$$

для любых $m \in \mathbb{N}$ и $v \in V$, $\|v\|_2 \leq 1$. Рассуждая аналогично, можно показать, что $(w_m, \sigma_{n_m} v) \leq 3$ для $m \in \mathbb{N}$ и $v \in V$, $\|v\|_2 \leq 1$. Поэтому

$$(r_m, v) = \frac{1}{n_m} (w_m, \sigma_{n_m} v) \leq \frac{3}{n_m}. \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20), как уже говорилось, следует $\alpha_X = 0$, $\beta_X = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
2. Маламид В. М. О конусах, определяющих симметричные пространства // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Изд-во Яросл. гос. ун-та, 1981. С. 45-54.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
4. Новиков И. Я. Последовательности характеристических функций в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 193-196.
5. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.

6. Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
7. Ovchinnikov V. I. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 349–515.
8. Овчинников В. И. О связи комплексного и вещественного методов интерполяции // Сб. докл. 16 Всесоюз. школы по теории операторов в функциональных пространствах. Нижний Новгород, 1991. С. 167.
9. Асташкин С. В. Описание интерполяционных пространств между $(l_1(\omega^0), l_1(\omega^1))$ и $(l_\infty(\omega^0), l_\infty(\omega^1))$ // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 4. С. 794–797.
10. Асташкин С. В. Об одном свойстве функторов вещественного метода интерполяции // Мат. заметки. 1985. Т. 39, № 3. С. 393–407.
11. Shimogaki T. A note on norms of compression on function spaces // Proc. Japan Akad. 1970. V. 46. P. 239–242.

г. Самара

Статья поступила 2 апреля 1992 г.