

**О ПОДПРОСТРАНСТВАХ,
ПОРОЖДЕННЫХ НЕЗАВИСИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ,
В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
СО СВОЙСТВОМ КРУГЛОВА**

© С. В. АСТАШКИН

Доказано, что для широкого класса симметричных пространств дополняемость подпространства, порожденного независимыми функциями f_k ($k = 1, 2, \dots$), эквивалентна дополняемости подпространства, порожденного их дизъюнктивными сдвигами $\tilde{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$, в некотором симметричном пространстве Z_X^2 на полуоси $[0, \infty)$. При этом если $\sum_{k=1}^{\infty} m(\text{supp } f_k) \leq 1$, то Z_X^2 в последнем утверждении можно заменить самим X . Этот результат является новым даже в случае L_p -пространств. Получен ряд следствий, в частности, показано, что для симметричных пространств справедлив аналог хорошо известной теоремы Дора–Стабеда о дополняемости в $L_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$) замкнутой линейной оболочки $[f_k]$, порожденной независимыми функциями, при условии, что она изоморфна пространству l_p .

§1. Введение

Хорошо известно, что свойства независимых функций, а также вероятностные неравенства, связанные с ними, являются эффективным средством при изучении геометрии функциональных пространств (см., например, монографии [1, 2, 3] и литературу в них). Особая роль при этом принадлежит решению вопроса о том, дополняемо или нет подпространство, порожденное той или иной системой независимых функций (т.е. существует или нет ограниченный проектор, образ которого совпадает с ним). Как было показано в [4] (и независимо в [1, теорема 2.b.4(ii)]), в наиболее простом и важном случае функций Радемахера $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$ ($k = 1, 2, \dots$), рассматриваемых на отрезке $[0, 1]$, их замкнутая линейная оболочка $[r_k]$ дополняема в симметричном пространстве X , если и только если имеют место вложения $G \subset X \subset G'$, где G — замыкание L_∞

Ключевые слова: дополняемое подпространство, независимые функции, функции Радемахера, симметричное пространство, свойство Круглова, индексы Бойда, нижняя p -оценка.

Работа частично поддержана РФФИ, гранты 10-01-00077 и 12-01-00198.

в пространстве Орлича L_{N_2} , построенном по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$, а G' — пространство, двойственное к нему (определения см. в следующем параграфе). В частности, последнее условие выполнено для пространства $L_p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $1 < p < \infty$. Этот результат вскоре был обобщен Браверманом на последовательности как независимых одинаково распределенных [5], так и независимых равномерно ограниченных функций [6]. Отметим также работу Дора и Стабеда [7], в которой доказана дополняемость в $L_p[0, 1]$ ($1 \leq p < \infty$) замкнутой линейной оболочки $[f_k]$, порожденной независимыми функциями, при условии, что она изоморфна пространству l_p .

Главный результат данной работы — теорема 1 — говорит о том, что для широкого класса симметричных пространств (с.п.), имеющих вместе со своим двойственным так называемое свойство Круглова, дополняемость подпространства, порожденного независимыми функциями f_k ($k = 1, 2, \dots$), эквивалентна дополняемости подпространства, порожденного их дизъюнктными копиями (например, сдвигами $\bar{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$), в с.п. Z_X^2 на полуоси $[0, \infty)$, состоящем из всех таких функций f , что

$$\|f\|_{Z_X^2} := \|f^* \chi_{[0, 1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1, \infty)}\|_{L_2[1, \infty)} < \infty, \quad (1)$$

где f^* — непрерывная слева убывающая перестановка $|f|$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} m(\text{supp } f_k) \leq 1$ (m — мера Лебега), то Z_X^2 в последнем утверждении можно заменить самим X (следствие 2). Отметим, что эти результаты являются новыми даже в случае L_p -пространств.

Тесная связь между свойствами независимых функций и их дизъюнктных копий была замечена достаточно давно, по крайней мере, после замечательной работы Розенталя 1970 г. об изоморфной классификации подпространств L_p -пространств [8]. В 1989 г. Джонсон и Шехтман [9] обобщили неравенства Розенталя на класс с.п. Они установили, что для произвольного с.п. X на $[0, 1]$ существует такая константа $\beta > 0$, что любая последовательность независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), удовлетворяет неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \leq \beta \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Более того, если $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$, то для некоторого $\alpha > 0$, зависящего лишь от пространства X , выполнено противоположное неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \leq \alpha \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

Позднее автором совместно с Сукочевым было показано [10, теорема 3.1] (см. также теорему 25 в обзоре [11]), что неравенство (3) справедливо и при менее ограничительном (и уже точном) условии, когда с.п. X имеет так называемое свойство Круглова. Например, оно выполнено в важных в приложениях экспоненциальных пространствах Орлича $L_{N,\gamma}$, если $0 < \gamma \leq 1$ (условию „ $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$ “ эти пространства, конечно, не удовлетворяют). Неравенства (2) и (3) будут основным инструментом в доказательстве как теоремы 1, так и теоремы 2, являющейся аналогом ранее упоминавшейся теоремы Дора–Стабеда в классе с.п. В теореме 3 рассматривается важный частный случай пространств Лоренца $L_{p,q}$ ($1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$). И наконец, в последней части работы показано, что применяемый в этой работе подход позволяет значительно упростить для с.п. со свойством Круглова доказательства результатов Бравермана о дополняемости подпространств, порожденных последовательностями независимых одинаково распределенных (равномерно ограниченных) функций. Здесь же получена еще одна характеристика гильбертова пространства L_2 на основе дополняемости его подпространств (теорема 5).

Частично результаты настоящей работы анонсированы в заметке [12].

§2. Определения и обозначения

Пусть $J = [0, 1]$ или $(0, \infty)$, m — мера Лебега на J . Для измеримой на J функции $x = x(t)$ введем функцию распределения, принятую в теории функций: $n_x(\tau) := m\{t \in J : |x(t)| > \tau\}$ ($\tau > 0$). Две функции x и y будем называть *равноизмеримыми*, если $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ ($\tau > 0$). В частности, для каждой измеримой функции x ее модуль $|x|$ равноизмерим с его невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) < t\} \quad (t \in J).$$

Банахово пространство X вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале J , называется *симметричным* (с.п.), если 1) из того, что $x \in X$ и $|y(t)| \leq |x(t)|$ п.в., следует $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$; 2) из того, что $x \in X$ и функции x и y равноизмеримы, следует $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Если X и Y — банаховы пространства, то запись $X \subset Y$ всюду в дальнейшем означает, что X линейно и непрерывно вложено в Y ; тогда для некоторой константы $C > 0$ и всех $x \in X$ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$. Не ограничивая общности, будем всегда предполагать, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$. Тогда для произвольного с.п. X на $[0, 1]$ выполнено $L_\infty \subset X \subset L_1$, причем $\|x\|_X \leq \|x\|_{L_\infty}$ ($x \in L_\infty$) и $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_X$ ($x \in X$) [13, теорема 2.4.1].

Если X — с.п. на J , то двойственное (или ассоциированное) пространство X' состоит из всех y , для которых

$$\|y\|_{X'} = \sup \left\{ \int_J x(t)y(t) dt : \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty.$$

Пространство X' также симметрично; оно изометрически вложено в сопряженное X^* ; при этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Любое с.п. X непрерывно вложено в свое второе двойственное, которое будет обозначаться через X'' . С.п. X называется *максимальным* (имеет *свойство Фату*), если из того, что $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \rightarrow x$ п.в., следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Если с.п. X обладает аналогичным свойством при дополнительном условии $x \in X$, то говорят, что X имеет *порядково полунепрерывную норму*. Последнее эквивалентно тому, что X вложено в X'' изометрически [14, теорема 6.1.6]. Пространство X *максимально*, если и только если его естественное вложение в X'' является сюръективной изометрией [14, теорема 6.1.7]. Всюду далее, следуя [1], будем считать, что все с.п. сепарабельны или максимальны. В частности, норма любого такого пространства порядково полунепрерывна.

Самые известные из с.п. — пространства L_p — являются частью семейства пространств Лоренца $L_{p,q} = L_{p,q}(J)$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$), состоящих из измеримых на J функций x , для которых конечна величина

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \left[\frac{q}{p} \int_J (t^{1/p} x^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in J} (t^{1/p} x^*(t)), & q = \infty. \end{cases}$$

Хотя функционал $\|\cdot\|_{p,q}$ не субаддитивен, он эквивалентен норме $\|x\|'_{p,q} = \|x^{**}\|_{p,q}$, где $x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds$. Нетрудно проверить [13, лемма 2.6.5], что $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$ ($1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$) и $L_{p,p} = L_p$.

Другое естественное обобщение L_p -пространств — пространства Орлича. Если $M(u)$ — функция Орлича, т.е. возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$, то *пространство Орлича* $L_M = L_M(J)$ состоит из всех измеримых на J функций x , для которых $\int_J M(|x(t)|/\lambda) dt \leq 1$ при некотором $\lambda > 0$. В качестве нормы в нем берется $\inf \lambda$ по всем λ , для которых выполнено последнее неравенство. Наконец, если ψ — неотрицательная вогнутая функция на J , то пространство Лоренца $\Lambda_\psi = \Lambda_\psi(J)$ состоит из всех измеримых на J функций x , для которых

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} := \int_J x^*(t) d\psi(t) < \infty.$$

Важной характеристикой с.п. X является его *фундаментальная функция* $\varphi_X(s) := \|\chi_{(0,s)}\|_X$ ($s \in J$). В частности, $\varphi_{L_{p,q}}(s) = s^{1/p}$, $\varphi_{\Lambda_\psi}(s) = \psi(s)$. Фундаментальная функция любого с.п. эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\tilde{\varphi}_X(t)$ [13, теорема 2.1.1], точнее, $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_X(t) \leq \varphi_X(t) \leq \tilde{\varphi}_X(t)$ ($t \in J$).

В каждом с.п. X непрерывен *оператор растяжения*

$$\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \cdot \chi_{[0,1]}(t/\tau), \text{ если } J = [0, 1],$$

и

$$\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau), \text{ если } J = [0, \infty) \quad (\tau > 0),$$

и $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, \tau)$ [13, теорема 2.4.5]. С помощью него определяются *нижний и верхний индексы Бойда* пространства X :

$$\alpha_X = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} \text{ и } \beta_X = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$ [13, §2.1, с. 138]. В частности, $\alpha_{L_{p,q}} = \beta_{L_{p,q}} = 1/p$. Говорят, что с.п. X удовлетворяет *нижней p -оценке* (соответственно *верхней p -оценке*), где $1 \leq p \leq \infty$, если существует такая константа $C_X > 0$, что для произвольных попарно дизъюнктных функций $x_1, x_2, \dots, x_n$ из X выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p} \leq C_X \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|$$

$$\left(\text{соответственно } \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq C_X \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p} \right)$$

(если $p = \infty$, то $(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p)^{1/p}$ надо заменить на $\max_{k=1, \dots, n} \|x_k\|$).

Определенное соотношением (1) пространство Z_X^2 (X — с.п. на $[0, 1]$) впервые появилось в [2]. Нетрудно показать, что квазинорма $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ эквивалентна некоторой норме, и поэтому Z_X^2 является с.п. на $[0, \infty)$ [11, §4.1, с. 27]. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность функций, определенных на $[0, 1]$, то через $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ далее будет обозначаться последовательность их попарно дизъюнктных копий (т.е. равноизмеримых с ними функций) на $[0, \infty)$, например, $\bar{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$. Подробнее о с.п. см. монографии [13, 1, 15].

Пусть f — измеримая функция (случайная величина) на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим функцию (случайную величину) $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i — независимые копии f , а N — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром 1, независимая относительно последовательности

$\{f_i\}$. Следующее свойство было введено и интенсивно изучалось Браверманом [5], использовавшим при этом некоторые вероятностные конструкции Круглова [16].

Определение 1. С. п. X на $[0, 1]$ имеет свойство Круглова ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует $\pi(f) \in X$.

Грубо говоря, с.п. $X \in \mathbb{K}$, если оно расположено достаточно „далеко“ от пространства L_∞ . В частности, это верно, если $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$, и тем более, если $\alpha_X > 0$ [5, теоремы 1.2 и 1.3, с. 16]. Например, $L_{p,q} \in \mathbb{K}$ для всех $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$. Кроме того, если L_{N_γ} — экспоненциальное пространство Орлича, построенное по функции $N_\gamma(u) = e^{u^\gamma} - 1$, то $L_{N_\gamma} \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $0 < \gamma \leq 1$ [5, с. 42]. Подробнее о свойстве Круглова и его применении см. монографию [5] и обзор [11].

Через $\text{supp } f$ далее будет обозначаться носитель измеримой функции f . Если f и g — две неотрицательные величины (квазинормы), определенные на множестве T , то выражение $f \asymp g$ ($t \in T$) означает, что для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in T$ выполнено $C^{-1}f(t) \leq g(t) \leq Cf(t)$.

§3. Вспомогательные результаты

Доказательство первых двух лемм стандартно, и поэтому мы его опускаем.

Лемма 1 (см. [7, факт 2.2]). Пусть X — банахово пространство, а Y и E — его подпространства, причем E конечномерно. Тогда Y дополняемо в X тогда и только тогда, когда в нем дополняемо $Y + E$.

Лемма 2. Если X — сепарабельное (максимальное) с.п. на $[0, 1]$, то Z_X^2 — сепарабельное (соответственно максимальное) с.п. на $[0, \infty)$. При этом $(Z_X^2)' = Z_{X'}^2$.

Лемма 3. Пусть с.п. X на $[0, 1]$ удовлетворяет нижней p -оценке, $p > 2$. Тогда существует такая константа $B_X > 0$, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|_X^p \right)^{1/p} \leq B_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{Z_X^2} \quad (4)$$

для любой последовательности $\{x_k\} \subset Z_X^2$ такой, что $\text{supp } x_k \subset [k-1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$).

Доказательство. Прежде всего, если с.п. X удовлетворяет нижней p -оценке, то $L_{p,1}[0, 1] \subset X$. Действительно, для каждого $t \in (0, 1]$ найдется

такое $n \in \mathbb{N}$, что $1/2 < nt \leq 1$. Так как $\chi_{(0,tn)} = \sum_{k=1}^n \chi_{(t(k-1),tk)}$, то по условию для фундаментальной функции φ_X пространства X выполнено

$$\varphi_X(tn) = \|\chi_{(0,tn)}\|_X \geq C_X^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \|\chi_{(t(k-1),tk)}\|^p \right)^{1/p} = C_X^{-1} \varphi_X(t) n^{1/p}.$$

Следовательно, из-за выбора n

$$\varphi_X(t) \leq C_X \varphi_X(nt) n^{-1/p} \leq C_X \varphi_X(1) 2^{1/p} t^{1/p} = C_1 t^{1/p},$$

откуда ввиду изометрического равенства $L_{p,1} = \Lambda_{t^{1/p}}$ и [13, теорема 2.5.5]

$$L_{p,1}[0,1] \subset \Lambda_{\tilde{\varphi}_X}[0,1] \subset X \text{ и } \|x\|_X \leq C_1 \|x\|_{L_{p,1}[0,1]} \quad (x \in L_{p,1}[0,1]) \quad (5)$$

($\tilde{\varphi}_X$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции φ_X).

Обозначим через $Z_X^{p,1}$ с.п. функций $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\|f\|_{Z_X^{p,1}} = \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_{p,1}[0,\infty)} < \infty,$$

и покажем, что с некоторым $C > 0$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|_X^p \right)^{1/p} \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{Z_X^{p,1}} \quad (6)$$

для произвольной последовательности $\{x_k\} \subset Z_X^{p,1}$, $\text{supp } x_k \subset [k-1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$). По определению функционала $\|\cdot\|_{Z_X^{p,1}}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{Z_X^{p,1}} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right)^* \right\|_X + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \right\|_{L_{p,1}[0,\infty)},$$

где $x_k = u_k + v_k$, $m(\text{supp } \sum_{k=1}^{\infty} u_k) \leq 1$, $\text{supp } u_k \subset [k-1, k]$, $\text{supp } v_k \subset [k-1, k]$ и функции u_k и v_k дизъюнкты для каждого $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, так как пространства X и $L_{p,1}(0, \infty)$ допускают нижнюю p -оценку (см., например, [17] или [18]) и $m(\text{supp } v_k) \leq 1$, то

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right)^* \right\|_X \geq C_X^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k^*\|_X^p \right)^{1/p}$$

и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \right\|_{L_{p,1}[0,\infty)} \geq C_{p,1}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k^*\|_{L_{p,1}[0,1]}^p \right)^{1/p}.$$

Тем самым ввиду (5)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{Z_X^{p,1}} &\geq \min(C_X^{-1}, C_{p,1}^{-1}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\|u_k^*\|_X + \|v_k^*\|_{L_{p,1}[0,1]})^p \right)^{1/p} \\ &\geq C_1^{-1} \min(C_X^{-1}, C_{p,1}^{-1}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\|u_k^*\|_X + \|v_k^*\|_X)^p \right)^{1/p} \\ &\geq C^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|_X^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

и, таким образом, неравенство (6) доказано.

Далее, так как $p > 2$ и $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$, то

$$\begin{aligned} \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_{p,1}[0,\infty)} &:= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} f^*(t+1) t^{1/p-1} dt \\ &\leq \frac{1}{p} \left(f^*(1)p + \left(\int_1^{\infty} f^*(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_1^{\infty} t^{2/p-2} dt \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + (p(p-2))^{-1/2} \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)}, \end{aligned}$$

откуда ввиду определения нормы в пространствах $Z_X^{p,1}$ и Z_X^2 получаем $\|f\|_{Z_X^{p,1}} \leq A \|f\|_{Z_X^2}$ ($f \in Z_X^2$) с некоторой константой $A = A(p) > 0$. Так как из последнего неравенства и (6) следует (4), то лемма доказана. $\square$

Доказательство следующего утверждения совершенно аналогично, и поэтому мы его не приводим.

Лемма 4. Пусть с.п. X допускает нижнюю 2-оценку и $X \supset L_2[0, 1]$. Тогда существует такая константа $B_X > 0$, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\|_X^2 \right)^{1/2} \leq B_X \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|_{Z_X^2}$$

для любой последовательности $\{x_k\} \subset Z_X^2$, удовлетворяющей условию: $\text{supp } x_k \subset [k-1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$).

Последнее утверждение этого параграфа показывает, что дополняемо или нет подпространство с.п., порожденное дизъюнктивными функциями, зависит лишь от их распределений.

Лемма 5. Если измеримые функции g_k и h_k из с.п. Z на полуоси $[0, \infty)$ равноизмеримы для любого $k = 1, 2, \dots$, $\text{supp } g_k \subset [k-1, k]$, $\text{supp } h_k \subset [k-1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$), то подпространства $[g_k]$ и $[h_k]$ дополняемы или нет в Z одновременно.

Доказательство. Предположим, например, что подпространство $[g_k]$ дополняемо в Z и Q — ограниченный проектор в Z , образ которого совпадает с $[g_k]$. Тогда (см. [13, теорема 2.2.1] или [15, предложение 2.7.4]) для произвольного $\delta > 0$ и каждого $k = 1, 2, \dots$ существуют взаимно-однозначное (с точностью до множества нулевой меры) сохраняющее меру отображение $w_k : [k-1, k] \rightarrow [k-1, k]$ и измеримая функция $\varepsilon_k : [k-1, k] \rightarrow \{\pm 1\}$ такие, что

$$\|h_k - \varepsilon_k g_k(w_k)\|_Z < \delta 2^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Легко видеть, что отображение $w : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, определенное соотношением $w(t) := \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \chi_{[k-1, k]}(t)$, сохраняет меру. Следовательно, оператор $T_{w, \varepsilon} x(t) := x(w(t)) \cdot \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(t) \chi_{[k-1, k]}(t)$, изометричен в Z , а $P := T_{w, \varepsilon} \cdot Q \cdot T_{w, \varepsilon}^{-1}$ — ограниченный проектор пространства Z на подпространство $[T_{w, \varepsilon} g_k] = [\varepsilon g_k(w)]$. Таким образом, последнее также дополняемо в Z .

В то же время ввиду (7) $\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k - \varepsilon g_k(w)\|_Z \leq \delta$. Ввиду устойчивости свойства дополняемости подпространства, порожденного последовательностью векторов, относительно их малых возмущений (см., например, [19, теорема 1.3.9]) число $\delta > 0$ можно взять настолько малым, что последнее неравенство будет гарантировать дополняемость в Z также и подпространства $[h_k]$. $\square$

§4. Основной результат

Предложение 1. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$, $X \in \mathbb{K}$. Тогда если подпространство $[f_k]$, порожденное последовательностью независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, дополняемо в X , то подпространство $[\bar{f}_k]$, порожденное последовательностью из попарно дизъюнктивных копий $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$, дополняемо в пространстве Z_X^2 .

Доказательство. Прежде всего, по лемме 1 мы можем (и будем) считать, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Далее нетрудно проверить, что подпространство

$$\bar{N}(X) := \left\{ y \in Z_X^2 : \int_{k-1}^k y(s) ds = 0 \text{ для всех } k = 1, 2, \dots \right\}$$

замкнуто в Z_X^2 . Кроме того, так как ввиду [13, 2.3.2, с. 111] линейный оператор

$$Uy(t) := y(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^k y(s) ds \chi_{[k-1, k)}(t) \quad (8)$$

является ограниченным проектором в Z_X^2 , образ которого совпадает с $\bar{N}(X)$, подпространство $\bar{N}(X)$ дополняемо в Z_X^2 .

Обозначим через Σ_k σ -алгебру $\sigma(f_k)$ подмножеств $[0, 1]$, порожденную функцией f_k , а через $\mathbb{E}_k$ — соответствующий ей оператор условного математического ожидания, т.е. $\mathbb{E}_k f := \mathbb{E}(f | \Sigma_k)$. Тогда если $y_k(s) := y(s+k-1)$ ($0 \leq s \leq 1$), где $y \in \bar{N}(X)$ произвольна, то вместе с σ -алгебрами Σ_k функции $\mathbb{E}_k y_k$ независимы и

$$\int_0^1 \mathbb{E}_k y_k(t) dt = \int_0^1 y_k(t) dt = \int_{k-1}^k y(s) ds = 0.$$

Поэтому, применяя (3), получим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k y_k \right\|_X \leq \alpha \left\| \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}_k y_k) (t - k + 1) \chi_{[k-1, k)}(t) \right\|_{Z_X^2}. \quad (9)$$

С другой стороны, ввиду ограниченности операторов $\mathbb{E}_k$ в пространствах $L_p[0, 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$) (см., например, [20, замечание 1.14]) оператор

$$Ty(t) := \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}_k y_k) (t - k + 1) \chi_{[k-1, k)}(t) \quad (10)$$

ограничен в $L_1[0, \infty)$ и в $L_\infty[0, \infty)$ с нормой 1. По лемме 2 пространство Z_X^2 сепарабельно или максимально вместе с X . Поэтому оно интерполяционно относительно пары $(L_1[0, \infty), L_\infty[0, \infty))$ с константой 1 [13, теорема 2.4.9], и тем самым оператор T ограничен в Z_X^2 также с нормой 1. Теперь нетрудно проверить, что оператор

$$Vy(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_k y_k(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (11)$$

ограниченно действует из $\bar{N}(X)$ в X . Действительно, если X , а вместе с ним и Z_X^2 сепарабельны, то ряд в правой части (10) сходится в Z_X^2 для произвольной $y \in Z_X^2$. Тем самым ввиду (9) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_k y_k$ сходится в X и

$$\|Vy\|_X \leq \alpha \|Ty\|_{Z_X^2} \leq \alpha \|y\|_{Z_X^2}. \quad (12)$$

Предположим теперь, что пространство X максимально. Тогда из (9) следует равномерная ограниченность норм $\|\sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k y_k\|_X$ ($n = 1, 2, \dots$) для каждой $y \in Z_X^2$, откуда ввиду [21, следствие 5.2.3] ряд в правой части (11) сходится почти всюду на $[0, 1]$. Так как пространство X максимально, то $Vy \in X$ и снова выполнено (12).

Далее, по условию существует ограниченный проектор $R : X \rightarrow [f_k]$. Рассмотрим оператор $S := LRVU : Z_X^2 \rightarrow [f_k]$, где оператор $L : [f_k] \rightarrow [f_k]$

определяется соотношением $L(\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{f}_k$ ($a_k \in \mathbb{R}$). Так как f_k независимы, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), то ввиду (2) L ограничен из $[f_k]$ в $[\bar{f}_k]$. Поэтому оператор S также ограничен и его образ совпадает с подпространством $[\bar{f}_k]$. Кроме того, так как $\mathbb{E}_i f_i = f_i$, то для каждого $i \in \mathbb{N}$

$$S\bar{f}_i = LRV\bar{f}_i = LRf_i = Lf_i = \bar{f}_i.$$

В итоге S — ограниченный проектор из Z_X^2 на $[\bar{f}_k]$, и утверждение доказано. $\square$

При дополнительном условии $X' \in \mathbb{K}$ справедливо и обратное утверждение.

Предложение 2. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$ такое, что $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Тогда если последовательность независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ такова, что подпространство $[\bar{f}_k]$ дополняемо в пространстве Z_X^2 , то подпространство $[f_k]$ дополняемо в X .

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущего предложения, можно считать, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Далее

$$N(X) := \left\{ f \in X : \int_0^1 f(s) ds = 0 \right\}$$

— дополняемое подпространство в X . Действительно, если $Qf(t) := f(t) - \int_0^1 f(s) ds$, то ввиду неравенства $\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_X$ ($f \in X$) [13, теорема 2.4.1] имеем $\|Qf\|_X \leq 2\|f\|_X$. Кроме того, $Qf = f$ для $f \in N(X)$.

Пусть по-прежнему $\mathbb{E}_k$ — оператор условного математического ожидания относительно σ -алгебры $\sigma(f_k)$ подмножеств $[0, 1]$, порожденной функцией f_k . Определим на $N(X)$ оператор

$$Gf(t) := \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}_k f)(t - k + 1) \chi_{[k-1, k)}(t) \quad (t > 0)$$

и покажем, что он ограничен в Z_X^2 . Так как по лемме 2 пространство Z_X^2 сепарабельно или максимально вместе с X , оно изометрически вложено в свое второе двойственное $(Z_X^2)'' = Z_{X''}^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|Gf\|_{Z_X^2} &= \sup \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}_k f)(s - k + 1) \chi_{[k-1, k)}(s) y(s) ds : \|y\|_{Z_{X'}^2} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 (\mathbb{E}_k f)(s) y_k(s) ds : \|y\|_{Z_{X'}^2} \leq 1 \right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $y_k(s) := y(s+k-1)$ ($0 \leq s \leq 1$). Заметим, что ввиду свойств условного математического ожидания и того, что $f \in N(X)$, для произвольного $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\mathbb{E}_k f)(s) y_k(s) ds &= \int_0^1 \mathbb{E}_k (\mathbb{E}_k f \cdot y_k)(s) ds = \int_0^1 (\mathbb{E}_k f)(s) \cdot (\mathbb{E}_k y_k)(s) ds \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}_k (f \cdot \mathbb{E}_k y_k)(s) ds - \int_0^1 \int_0^1 y_k(t) dt f(s) ds \\ &= \int_0^1 f(s) \cdot \left((\mathbb{E}_k y_k)(s) - \int_0^1 y_k(t) dt \right) ds. \end{aligned}$$

Поэтому ввиду (13)

$$\begin{aligned} \|Gf\|_{Z_X^2} &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f(s) \left((\mathbb{E}_k y_k)(s) - \int_0^1 y_k(t) dt \right) ds : \|y\|_{Z_{X'}^2} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|f\|_X \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left((\mathbb{E}_k y_k)(s) - \int_0^1 y_k(t) dt \right) \right\|_{X'} : \|y\|_{Z_{X'}^2} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Функции $g_k(s) := (\mathbb{E}_k y_k)(s) - \int_0^1 y_k(t) dt$ независимы и $\int_0^1 g_k(s) ds = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Следовательно, так как $X' \in \mathbb{K}$, то ввиду (3) получаем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^n \left((\mathbb{E}_k y_k)(s) - \int_0^1 y_k(t) dt \right) \right\|_{X'} \\ &\leq \alpha \left\| \sum_{k=1}^n \left((\mathbb{E}_k y_k)(s-k+1) - \int_0^1 y_k(t) dt \right) \chi_{[k-1,k)}(s) \right\|_{Z_{X'}^2} \\ &\leq \alpha \|Ty\|_{Z_{X'}^2} + \alpha \left\| \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k y(t) dt \chi_{[k-1,k)} \right\|_{Z_{X'}^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

где оператор T определен равенством (10). Как и в доказательстве предложения 1, $\|Ty\|_{Z_{X'}^2} \leq \|y\|_{Z_X^2}$ ($y \in Z_X^2$). Кроме того, ввиду [13, 2.3.2, с. 111]

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^k y(t) dt \chi_{[k-1,k)} \right\|_{Z_{X'}^2} \leq \|y\|_{Z_{X'}^2}.$$

Тем самым, так как пространство X' максимально, из (15) следует, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left((\mathbb{E}_k y_k)(s) - \int_0^1 y_k(t) dt \right) \right\|_{X'} \leq 2\alpha \|y\|_{Z_X^2}, \quad (y \in Z_X^2).$$

Таким образом, ввиду (14) оператор G ограниченно действует из $N(X)$ в Z_X^2 .

По условию существует ограниченный проектор $N : Z_X^2 \rightarrow [\bar{f}_k]$. Рассмотрим оператор $S := MNGQ : X \rightarrow [f_k]$, где оператор $M : [\bar{f}_k] \rightarrow [f_k]$, $M(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{f}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ ($a_k \in \mathbb{R}$). Так как f_k независимы, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), а $X \in \mathbb{K}$, то, в очередной раз применяя (3), заключаем, что M ограничен из $[\bar{f}_k]$ в $[f_k]$. В итоге оператор S ограничен и его образ совпадает с подпространством $[f_k]$. Кроме того, учитывая, что $\mathbb{E}_k f_i = 0$, если $k \neq i$, и $\mathbb{E}_i f_i = f_i$, для каждого $i \in \mathbb{N}$ получаем

$$Sf_i = MNGf_i = MN(f_i(t - i + 1)\chi_{[i-1, i)}(t)) = MN\bar{f}_i = M\bar{f}_i = f_i.$$

Таким образом, S — ограниченный проектор из X на $[f_k]$, и предложение доказано. $\square$

Замечание 1. Ни одно из условий $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$ в последнем предложении отбросить, вообще говоря, нельзя. Действительно, система функций Радемахера (см. введение) порождает в с.п. X дополняемое подпространство тогда и только тогда, когда имеют место вложения $G \subset X \subset G'$, где G — замыкание L_{∞} в пространстве Орлича L_{N_2} , построенном по функции $N_2(u) = e^{u^2} - 1$ (см. [4] или [1, теорема 2.b.4(ii)]). В то же время последовательность их дизъюнктивных копий $\{\chi_{[k-1, k-1/2]} - \chi_{[k-1/2, k]}\}$ (или эквивалентно ввиду леммы 5 последовательность $\{\chi_{[k-1, k]}\}$) порождает в Z_X^2 дополняемое подпространство для любого с.п. X .

Из предложений 1 и 2 вытекает основной результат работы.

Теорема 1. *Предположим, что X — такое с.п. на $[0, 1]$, что $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ — произвольная последовательность независимых функций, а $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность их попарно дизъюнктивных копий, определенных на полуоси $[0, \infty)$. Тогда подпространство $[f_k]$ дополняемо в X тогда и только тогда, когда подпространство $[\bar{f}_k]$ дополняемо в пространстве Z_X^2 .*

Следствие 1. *Пусть с.п. X удовлетворяет условиям теоремы 1. Если $\{f_k\}$ и $\{f'_k\}$ — две последовательности независимых функций из X таких, что f_k и f'_k равноизмеримы для каждого $k = 1, 2, \dots$, то подпространства $[f_k]$ и $[f'_k]$ дополняемы или нет в X одновременно.*

Доказательство. Если $\{\bar{f}_k\}$ и $\{\bar{f}'_k\}$ — последовательности дизъюнктивных копий для последовательностей $\{f_k\}$ и $\{f'_k\}$ соответственно, то функция $\bar{f}_k$ равноизмерима с $\bar{f}'_k$ для каждого $k = 1, 2, \dots$. Поэтому по лемме 5 подпространства $[\bar{f}_k]$ и $[\bar{f}'_k]$ дополняемы или нет в пространстве Z_X^2 одновременно. Применяя теорему 1, получаем нужное утверждение. $\square$

Следствие 2. Пусть с.п. X удовлетворяет условиям теоремы 1, $\{f_k\} \subset X$ — такая последовательность независимых функций, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(\text{supp } f_k) \leq 1$. Тогда подпространства $[f_k]$ и $[\bar{f}_k]$ дополняемы или нет в пространстве X одновременно.

Доказательство. Прежде всего, как легко видеть, X дополняемо в Z_X^2 . Кроме того, если $f \in Z_X^2$ такова, что $m(\text{supp } f) \leq 1$, то $\|f\|_{Z_X^2} = \|f^*\|_X$. Поэтому дополняемость подпространства $[\bar{f}_k]$ в Z_X^2 эквивалентна его дополняемости в X . Применяя теорему 1, получаем нужный результат. $\square$

§5. О последовательностях независимых функций, эквивалентных стандартному базису l_p

Покажем, что в классе с.п. справедлив следующий вариант хорошо известной теоремы Дора–Стабеда [7, теорема А] о дополняемости в $L_p[0, 1]$ подпространств, порожденных независимыми функциями и изоморфных стандартному базису l_p .

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < \infty$. Предположим, что с.п. X допускает нижнюю p -оценку, $X' \in \mathbb{K}$, а $\{f_k\} \subset X$ — последовательность независимых функций, эквивалентная в X стандартному базису l_p . Тогда если либо (а) $p > 2$; либо (б) $p = 2$ и $X \supset L_2$; либо (с) $\|f_k \chi_{A_k}\|_X \geq \delta > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) для некоторой последовательности множеств $A_k \subset [0, 1]$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \infty$, то подпространство $[f_k]$ дополняемо в X .

Доказательство. Так как X допускает нижнюю p -оценку, то, рассуждая примерно так же, как в начале доказательства леммы 3, нетрудно показать, что $\|\sigma_t\|_{X \rightarrow X} \leq Ct^{1/p}$ ($0 < t \leq 1$). Значит, $\alpha_X > 0$, откуда, в частности, следует, что $X \in \mathbb{K}$ [5, теорема 1.3]. Таким образом, X удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|f_k\|_X = 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Далее, предполагая сначала, что $\int_0^1 f_k(s) ds = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), рассмотрим в зависимости от условий три случая.

(а) Пусть $\bar{f}_k$ — дизъюнктные копии функций f_k , $\text{supp } \bar{f}_k \subset [k-1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$). Найдем такие функции $g_k \in Z_{X'}^2$, что $\|g_k\|_{Z_{X'}^2} = 1$, $\text{supp } g_k \subset [k-1, k]$, $\int_0^\infty \bar{f}_k(s) g_k(s) ds = 1$ ($k = 1, 2, \dots$), и определим на пространстве Z_X^2 оператор

$$Pf(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty f(s) g_k(s) ds \cdot \bar{f}_k(t) \quad (t > 0).$$

Тогда ввиду (2), условий теоремы, а также леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{Z_X^2} &\leq \beta \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s)g_k(s) ds \cdot f_k \right\|_X \leq \beta C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} f(s)g_k(s) ds \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \beta C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{Z_{X'}^2}^p \|f\chi_{[k-1,k]}\|_{Z_X^2}^p \right)^{1/p} \\ &= \beta C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|(f\chi_{[k-1,k]})^*\|_X^p \right)^{1/p} \leq \beta C C_X \|f\|_{Z_X^2}. \end{aligned}$$

Тем самым проектор P ограничен из Z_X^2 на подпространство $[\bar{f}_k]$, и поэтому нам нужно утверждение — непосредственное следствие теоремы 1.

(б) Доказательство проводится точно так же, как и в случае (а), только вместо леммы 3 нужно использовать лемму 4.

(с) Обозначим $f'_k = f_k \chi_{A_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Так как по условию $\|f'_k\|_X \geq \delta$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то найдутся функции $h_k \in X'$, $\|h_k\|_{X'} \leq \delta^{-1}$, $\text{supp } h_k \subset A_k$ такие, что

$$\int_0^1 f_k(s)h_k(s) ds = \int_0^1 f'_k(s)h_k(s) ds = 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда если $\bar{f}_k(t) = f_k(t-k+1)\chi_{[k-1,k]}(t)$, $\bar{h}_k(t) = h_k(t-k+1)\chi_{[k-1,k]}(t)$, то

$$\int_0^{\infty} \bar{h}_k(t)\bar{f}_k(t) dt = 1 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \int_0^{\infty} \bar{h}_k(t)\bar{f}_i(t) dt = 0 \quad (k \neq i) \quad (16)$$

и

$$\|\bar{h}_k\|_{Z_{X'}^2} = \|h_k\|_{X'} \leq \delta^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Предположим, что $m_0 := \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) > 1$ (если $m_0 \leq 1$, то рассуждения только упрощаются). Так как $m(\text{supp } h_k) \leq m(A_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\|\sigma_{\tau}\|_{Y \rightarrow Y} \leq \max(1, \tau)$ ($\tau > 0$) для любого с.п. Y [13, следствие 2.4.1], то по определению нормы пространства $Z_{X'}^2$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{h}_k \right\|_{Z_{X'}^2} \leq m_0 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_{m_0^{-1}} \bar{h}_k \right\|_{Z_{X'}^2} = m_0 \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_{m_0^{-1}} \bar{h}_k \right)^* \right\|_{X'}.$$

По условию пространство X' допускает верхнюю q -оценку, где $1/p + 1/q = 1$ [1, предложение 1.f.5]. Поэтому ввиду дизъюнктности функций $\sigma_{m_0^{-1}} \bar{h}_k$, неравенства $\|(\sigma_{m_0^{-1}} \bar{h}_k)^*\|_{X'} \leq \|\bar{h}_k^*\|_{X'} \leq \delta^{-1}$, а также (17) из предыдущего

соотношения следует

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{h}_k \right\|_{Z_{X'}^2} &\leq C_{X'} m_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \|(\sigma_{m_0^{-1}} \bar{h}_k)^*\|_{X'}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_{X'} m_0 \delta^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (18)$$

(если $p = 1$, то $(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q)^{1/q}$ нужно заменить на $\sup_{k=1,2,\dots} |a_k|$).

С другой стороны, так как $X \in \mathbb{K}$, то ввиду соотношений (2) и (3)

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k \right\|_X \asymp \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \quad (19)$$

и, значит, по условию последовательность $\{\bar{f}_k\}$ эквивалентна в Z_X^2 стандартному базису l_p . Кроме того, соотношения (16) показывают, что последовательность $\{\bar{h}_k\}$ биортогональна по отношению к ней. Таким образом, ввиду (18) и известного критерия дополняемости последовательности, эквивалентной базису l_p (см., например, [7, факт 2.1]), подпространство $[\bar{f}_k]$ дополняемо в Z_X^2 . Но тогда по теореме 1 подпространство $[f_k]$ дополняемо в X .

В общем случае рассмотрим функции $u_k := f_k - \int_0^1 f_k(s) ds$ ($k = 1, 2, \dots$). Они независимы и $\int_0^1 u_k(s) ds = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Докажем, что последовательность $\{u_k\}$ тоже удовлетворяет условиям теоремы.

Для того чтобы показать, что она эквивалентна стандартному базису l_p , ввиду известного результата об устойчивости базисов из [22] достаточно проверить, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - u_k\|_X^q < \infty$. Действительно, так как $\{f_k\}$ эквивалентна стандартному базису l_p , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - u_k\|_X^q &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f_k(s) ds \right|^q \\ &\leq \sup \left\{ \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(s) \right| ds \right)^q : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(s) \right\|_X^q : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \leq 1 \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, если для последовательности $\{f_k\}$ выполнено условие (с), то ввиду того, что $\int_0^1 f_k(s) ds \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, его можно считать выполненным (начиная с некоторого номера) также и для $\{u_k\}$ с теми же множествами A_k и, возможно, несколько меньшим $\delta > 0$.

Таким образом, так как по лемме 1 из дополняемости подпространства $[u_k]$ следует дополняемость подпространства $[f_k]$, то доказательство теоремы сводится к уже рассмотренному случаю. $\square$

Замечание 2. Условие „почти дизъюнктности“ последовательности $[f_k] \subset X$ (если $1 \leq p \leq 2$) в части (с) последней теоремы является существенным. Действительно, хорошо известно, что последовательность независимых p -устойчивых случайных величин эквивалентна в $L_r = L_r[0, 1]$ стандартному базису l_p , если $1 \leq r < p < 2$, и порождает при этом в L_r недополняемое подпространство (см., например, [19, теоремы 6.4.18 и 6.4.21]).

Рассмотрим теперь частный случай пространств Лоренца $L_{p,q} = L_{p,q}[0, 1]$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$). Хорошо известно (см., например, [23, теорема 5.1] и [24, лемма 3.1]), что из всякой последовательности дизъюнктивных функций в $L_{p,q}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_k\}$, эквивалентную стандартному базису l_q и такую, что подпространство $[g_k]$ дополняемо в $L_{p,q}$. Заметим, что $L_{p,q} \in \mathbb{K}$ и $(L_{p,q})' = L_{p',q'} \in \mathbb{K}$ ($1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$) (см. введение). Поэтому ввиду следствия 2 подпространство $[f_k]$, где f_k — независимые копии функций g_k ($k = 1, 2, \dots$), также дополняемо в $L_{p,q}$. Более того, так как пространство $L_{p,q}$ допускает нижнюю $\max(p, q)$ -оценку (см. [17] или [25, теорема 3]), из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $1 < \max(p, q) \leq r < \infty$. Если $\{f_k\} \subset L_{p,q}$ — последовательность независимых функций, эквивалентная в $L_{p,q}$ стандартному базису l_r , то подпространство $[f_k]$ дополняемо в $L_{p,q}$, если либо $r > 2$, либо $p < r = 2$, либо $p = q = r = 2$, либо $\|f_k \chi_{A_k}\|_{L_{p,q}} \geq \delta > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) для некоторой последовательности множеств $A_k \subset [0, 1]$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \infty$.

В частности, так как $L_{p,p} = L_p$, отсюда получаем

Следствие 3. Если $1 < p < 2$ и $\{f_k\} \subset L_p$ — последовательность независимых функций, эквивалентная в L_p стандартному базису l_2 , то подпространство $[f_k]$ дополняемо в L_p .

В связи с последним следствием напомним классический результат Кадца и Пелчинского [26, следствие 1] о том, что при условии $p > 2$ всякое подпространство пространства L_p , изоморфное l_2 , дополняемо в L_p . Следствие 3 показывает, что это утверждение распространяется также на случай $1 < p < 2$, если речь идет о подпространствах, порожденных независимыми функциями. В то же время хорошо известно [27, теорема 3.3],

что для каждого $p \in (1, 2)$ в L_p существует недополняемое подпространство, изоморфное l_2 .

Предположим, что $1 \leq p < \infty$ и $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых функций из $L_p = L_p[0, 1]$, $\|f_k\|_p = 1$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) такова, что замкнутая линейная оболочка $[f_k]$ изоморфна l_p . Покажем, что тогда $\{f_k\}$ эквивалентна в L_p стандартному базису l_p . Действительно, во-первых, произвольная последовательность независимых функций в любом с.п., в среднем равная нулю, является там безусловной базисной последовательностью [5, предложение 1.1.4]. Поэтому если $p = 1$ или $p = 2$, то нужное нам утверждение сразу вытекает из единственности (с точности до эквивалентности) нормированного безусловного базиса в l_1 [28] и в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве [29, предложение 1.1] соответственно. В случае $2 < p < \infty$ из теоремы 4 и леммы 7 работы [8] следует, что $\{f_k\}$ либо эквивалентна в L_p стандартному базису l_p , либо $[f_k]$ содержит подпространство, изоморфное l_2 , что в данном случае невозможно. И наконец, если $1 < p < 2$, то эквивалентность последовательности $\{f_k\}$ в L_p стандартному базису l_p является следствием аргументов, приведенных в начале доказательства теоремы А из [7] (см. с. 168–169).

Так как $L_{p,p} = L_p$ ($1 < p < \infty$) и так как при $p \neq 2$ неравенство $\|f_k \chi_{A_k}\|_{L_p} \geq \delta > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) выполнено для некоторой последовательности дизъюнктивных множеств $A_k \subset [0, 1]$ [30, теорема В], то из приведенных рассуждений, а также теорем 2 и 3 вытекает вышеупомянутая теорема Дора и Стабеда.

Следствие 4 (см. [7, теорема А]). *Предположим, что $1 \leq p < \infty$ и $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых функций из $L_p = L_p[0, 1]$. Если замкнутая линейная оболочка $[f_k]$ изоморфна l_p , то подпространство $[f_k]$ дополняемо в L_p .*

§6. О дополняемости подпространств,

порожденных последовательностями независимых функций,
которые одинаково распределены или равномерно ограничены

(а) Случай одинаково распределенных функций. С помощью теоремы 1, а также результатов работы [31] нетрудно охарактеризовать дополняемость подпространств, порожденных независимыми одинаково распределенными функциями в с.п. со свойством Круглова.

Теорема 4. *Пусть X — такое с.п. на $[0, 1]$, что $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Предположим, что функции $f_k \in X$ ($k = 1, 2, \dots$) независимы и одинаково*

распределены, $\int_0^1 f_1(t) dt = 0$. Для того, чтобы последовательность $\{f_k\}$ порождала в X дополняемое подпространство, необходимо и достаточно, чтобы она была эквивалентна в X стандартному базису l_2 .

Доказательство. Ясно, что дизъюнктивные копии $\bar{f}_k$ функций f_k — это соответствующие сдвиги функции $\bar{f}_1$. Поэтому ввиду [31, теорема 2.2 и следствие 2.4] подпространство $[\bar{f}_k]$ дополняемо в Z_X^2 , если и только если $\{\bar{f}_k\}$ эквивалентна в Z_X^2 последовательности характеристических функций $\{\chi_{[k-1,k]}\}$, которая, в свою очередь, очевидно, эквивалентна стандартному базису l_2 .

Так как $f_k \in X$ независимы и $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), а $X \in \mathbb{K}$, то ввиду (2) и (3) имеет место соотношение (19). Поэтому нужное нам утверждение является непосредственным следствием теоремы 1. $\square$

Следующий результат является еще одной характеристикой гильбертова пространства L_2 на основе дополняемости его подпространств.

Теорема 5. Пусть X — на $[0, 1]$, $X \in \mathbb{K}$, $X' \in \mathbb{K}$. Следующие условия эквивалентны:

(i) для любых последовательностей независимых одинаково распределенных функций $\{f_k\} \subset X$ и $\{f'_k\} \subset X'$ таких, что $\int_0^1 f_1(t) dt = \int_0^1 f'_1(t) dt = 0$, подпространства $[f_k]$ и $[f'_k]$ дополняемы в X и X' соответственно;

(ii) $X = L_2[0, 1]$.

Доказательство. Достаточно показать, что из (i) следует (ii). Заметим, что по теореме 1 условие (i) эквивалентно тому, что для произвольных последовательностей $\{a_k\} \subset X$ и $\{a'_k\} \subset X'$ одинаково распределенных функций таких, что $\text{supp } a_k \subset [k-1, k]$ и $\text{supp } a'_k \subset [k-1, k]$, подпространства $[a_k]$ и $[a'_k]$ дополняемы в пространствах Z_X^2 и $(Z_X^2)' = Z_{X'}^2$, соответственно. Но тогда ввиду [31, теорема 5.4] получаем, что $Z_X^2 = L_p[0, \infty)$ при некотором $1 < p < \infty$. Отсюда, конечно, следует $X = L_2[0, 1]$. $\square$

(b) Случай равномерно ограниченных функций.

Теорема 6. Пусть X — с.н. на $[0, 1]$, $X \in \mathbb{K}$, $X' \in \mathbb{K}$. Если $\{f_k\} \subset X$ — такая последовательность независимых функций, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и

$$M := \sup_k \|f_k\|_{L_\infty} < \infty, \quad \alpha := \inf_k \|f_k\|_{L_2} > 0, \quad (20)$$

то подпространство $[f_k]$ дополняемо в X .

Доказательство. Ввиду теоремы 1 достаточно показать, что подпространство $[f_k]$ дополняемо в Z_X^2 . По лемме 5 можно считать, что $\bar{f}_k \geq 0$. Рассмотрим на пространстве Z_X^2 оператор

$$Pf(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{k-1}^k \bar{f}_k(s) ds \right)^{-1} \int_{k-1}^k f(s) ds \cdot \bar{f}_k(t), \quad t > 0.$$

Тогда $P\bar{f}_k = \bar{f}_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Кроме того, так как ввиду (20)

$$\int_{k-1}^k \bar{f}_k(s) ds \geq \frac{1}{M} \int_{k-1}^k \bar{f}_k^2(s) ds \geq \frac{\alpha^2}{M} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то

$$Pf(t) \leq \frac{M}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{k-1}^k f(s) ds \right| \cdot \bar{f}_k(t) \leq \left(\frac{M}{\alpha} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{k-1}^k f(s) ds \right| \cdot \chi_{[k-1, k]}(t).$$

Тем самым в очередной раз применяя [13, 2.3.2, с. 111], получаем $\|Pf\|_{Z_X^2} \leq (M/\alpha)^2 \|f\|_{Z_X^2}$, и теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Теоремы 4 и 6 показывают, насколько упрощается изучение подпространств, порожденных независимыми одинаково распределенными и независимыми равномерно ограниченными функциями в с.п. со свойством Круглова, по сравнению с общим случаем, рассмотренным ранее Браверманом. В [5] (см. теорему 4.2) приведено гораздо более „трудоемкое“ доказательство утверждения теоремы 4 при условии $G \subset X \subset G'$, которое слабее условий $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Кроме того, там показано, что эти вложения, а также эквивалентность последовательности независимых одинаково распределенных функций $\{f_k\}$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) в X стандартному базису l_2 являются следствием дополняемости подпространства $[f_k]$ в X . В [6] сформулирован (без доказательства) аналогичный более сильный вариант теоремы 6; точность условия $G \subset X \subset G'$ при этом показывает пример системы Радемахера (см. [4] или [1, теорема 2.b.4(ii)]).

Заметим в заключение, что в [5, теорема 4.1] доказан ослабленный вариант этого утверждения, где во втором выражении из (20) норма пространства L_2 заменена на норму пространства L_1 .

Список литературы

- [1] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces. II. Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.

-
- [2] Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L., *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **19** (1979), no. 217, 298 pp.
 - [3] Кашин Б. С., Саакян А. А., *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
 - [4] Родин В. А., Семенов Е. М., *О дополняемости подпространства, порожденного системой Радемакера, в симметричном пространстве*, Функц. анализ и его прил. **13** (1979), №2, 91–92.
 - [5] Braverman M. Sh., *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
 - [6] Браверман М. Ш., *О дополняемости подпространств, порожденных независимыми функциями, в симметричном пространстве*, Функц. анализ и его прил. **16** (1982), №2, 66–67.
 - [7] Dor L. E., Starbird T., *Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables*, Compositio Mathematica **39** (1979), no. 2, 141–175.
 - [8] Rosenthal H. P., *On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables*, Israel. J. Math. **8** (1970), 273–303.
 - [9] Johnson W. B., Schechtman G., *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces*, Ann. Probab. **17** (1989), no. 2, 789–808.
 - [10] Асташкин С. В., Сукочев Ф. А., *Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова*, Зап. науч. семин. ПОМИ **345** (2006), 25–50.
 - [11] Асташкин С. В., Сукочев Ф. А., *Независимые функции и геометрия банаховых пространств*, Успехи мат. наук **65** (2010), №6, 3–86.
 - [12] Асташкин С. В., *О дополняемости подпространств в симметричных пространствах со свойством Круглова*, Функц. анализ и его прил., **47** (2013), №2, 80–84.
 - [13] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
 - [14] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
 - [15] Bennett C., Sharpley R., *Interpolation of Operators*, Acad. Press, Boston, 1988.
 - [16] Круглов В. М., *Замечание о бесконечно делимых распределениях*, Теория вероятн. и ее примен. **15** (1970), №2, 331–336.
 - [17] Creekmore J., *Type and cotype in Lorentz $L_{p,q}$ spaces*, Indag. Math. **43** (1981), no. 2, 145–152.

- [18] Kaminska A., Maligranda L., *Order convexity and concavity in Lorentz spaces* $\Lambda_{p,w}$, $0 < p < \infty$, *Studia Math.* **160** (2004), no. 3, 267–286.
- [19] Albiac F., Kalton N. J., *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 233, Springer, New York, 2006.
- [20] Эллиотт Р., *Стохастический анализ и его приложения*, Мир, М., 1986.
- [21] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А., *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [22] Гохберг И. Т., Маркус А. С., *Об устойчивости базисов в банаховых и гильбертовых пространствах*, Изв. АН Молд. ССР **5** (1962), 17–35.
- [23] Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L., *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure and applications to Lorentz function spaces*, *J. Approximation Theory* **13** (1975), 297–312.
- [24] Carothers N. L., Dilworth S. J., *Geometry of Lorentz spaces via interpolation*, Longhorn Notes, Univ. of Texas Functional Analysis Seminar Longhorn Notes 1985–1986, Univ. Texas, Austin, 1987, 107–134.
- [25] Dilworth S. J., *Special Banach lattices and their applications*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 1, 497–532, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [26] Kadec M. I., Pelczynski A., *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p* , *Studia Math.* **21** (1962), 161–176.
- [27] Bennett G., Dor L. E., Goodman V., Johnson W. B., Newman C. M., *On uncomplemented subspaces of L_p , $1 < p < 2$* , *Israel. J. Math.* **26** (1977), no. 2, 178–187.
- [28] Lindenstrauss J., Pelczynski A., *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications*, *Studia Math.* **29** (1968), 275–326.
- [29] Tzafriri L., *Uniqueness of structure in Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, 1635–1669, North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [30] Dor L. E., *On projections in L_1* , *Ann. of Math.*(2) **102** (1975), no. 3, 463–474.
- [31] Hernandez F. L., Semenov E. M., *Subspaces generated by translations in rearrangement invariant spaces*, *J. Funct. Anal.* **169** (1999), no. 1, 52–80.

Самарский
государственный университет
443011, Самара
ул. Академика Павлова, 1
Россия
E-mail: astash@samsu.ru

Поступило 10 октября 2012 г.