

О дополняемости подпространств в симметричных пространствах со свойством Круглова*

© 2013. С. В. Асташкин

1. Введение. Свойства независимых функций, а также связанные с ними вероятностные неравенства широко применяются при изучении геометрии функциональных пространств (см., например, [1]–[3]). Во многих случаях ключевым при этом является вопрос о том, дополняемо или нет подпространство, порожденное той или иной системой функций (т. е. существует ли нет ограниченный проектор на это подпространство).

Главный результат, анонсированный в данной заметке, — теорема 1 — говорит о том, что для широкого класса симметричных пространств (с.п.) X на $[0, 1]$, обладающих вместе со своим двойственным так называемым свойством Круглова, дополняемость подпространства, порожденного независимыми функциями f_k ($k = 1, 2, \dots$), эквивалентна дополняемости подпространства, порожденного их дизъюнктными копиями в с.п. Z_X^2 на полуоси $[0, \infty)$, состоящем из всех функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{Z_X^2} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)} < \infty, \quad (1)$$

где f^* — непрерывная слева невозрастающая перестановка функции $|f|$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} m(\text{supp } f_k) \leq 1$, то в последнем утверждении Z_X^2 можно заменить самим пространством X (следствие 1). Отметим, что эти результаты являются новыми даже в случае L_p -пространств.

Тесная связь между свойствами независимых функций и их дизъюнктных копий была замечена достаточно давно, по крайней мере, после замечательной работы Розенталя 1970 г. об изоморфной классификации подпространств L_p -пространств [4]. В 1989 г. Джонсон и Шехтман [5] обобщили неравенства Розенталя на класс с.п. Они установили, что для произвольного с.п. X на $[0, 1]$ существует такая константа $\beta > 0$, что любая последовательность независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), удовлетворяет неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \leq \beta \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Более того, если существует такое $p < \infty$, что $X \supset L_p$, то для некоторого $\alpha > 0$, зависящего лишь от пространства X , выполнено противоположное соотношение:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \leq \alpha \left\| \sum_{k=1}^n \bar{f}_k \right\|_{Z_X^2} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 10-01-00077.

Не так давно автором заметки совместно с Сукочевым было показано [6, теорема 3.1] (см. также [7, теорема 25]), что неравенство (3) справедливо и при менее ограничительном и уже точном условии, когда с.п. X обладает так называемым свойством Круглова, введенным Браверманом [8] на основе некоторых вероятностных конструкций Круглова [9] (определение см. в следующем разделе). Например, (3) выполнено в важных в приложениях экспоненциальных пространствах Орлича L_{N_γ} , где $N_\gamma(u) = e^{u^\gamma} - 1$, если $0 < \gamma \leq 1$ (условию « $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$ » они, конечно, не удовлетворяют). Неравенства (2) и (3) — основной инструмент в доказательстве как теоремы 1, так и теоремы 2 о дополняемости подпространств, порожденных последовательностями независимых функций, эквивалентными стандартному базису пространства l_p . В теореме 3 рассматривается важный частный случай пространств Лоренца $L_{p,q}$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$). И наконец, в последней части работы приведена еще одна характеристика гильбертова пространства L_2 на основе дополняемости его подпространств (теорема 4).

2. Определения и обозначения. Пусть $J = [0, 1]$ или $J = [0, \infty)$ и m — мера Лебега на J . Для измеримой на J функции $x = x(t)$ и $\tau > 0$ введем функцию распределения $n_x(\tau) := m\{t \in J : |x(t)| > \tau\}$. Две функции x и y будем называть *равноизмеримыми*, если $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ ($\tau > 0$). В частности, любая измеримая на J функция x равноизмерима с непрерывной слева невозрастающей *перестановкой* $x^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) < t\}$ функции $|x|$.

Банахово пространство X вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале J , называется *симметричным* (с.п.), если 1) из того, что $x \in X$ и $|y(t)| \leq |x(t)|$ п.в., следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$; 2) из того, что функции $x \in X$ и y равноизмеримы, следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Если X — с.п. на J , то *двойственное* пространство X' состоит из всех y , для которых $\|y\|_{X'} = \sup\{\int_J x(t)y(t)dt : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$. Пространство X' также симметрично; оно изометрически вложено в сопряженное X^* ; при этом $X' = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. С.п. X называется *максимальным*, если из того, что $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \rightarrow x$ п.в., следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Далее, следуя [1], будем считать, что все рассматриваемые с.п. сепарабельны или максимальны. Важнейшие среди с.п. — пространства $L_p(J)$ — являются как частью семейства пространств Лоренца $L_{p,q}(J)$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$), так и частным случаем пространств Орлича (подробнее о с.п. см. [1], [10], [11]).

Пусть f — измеримая функция на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим функцию (случайную величину) $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i — независимые копии функции f , а N — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром 1, независимая относительно последовательности $\{f_i\}$. С.п. X на $[0, 1]$ *обладает свойством Круглова* ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует, что $\pi(f) \in X$. Упрощая ситуацию, можно сказать, что $X \in \mathbb{K}$, если оно расположено достаточно «далеко» от пространства L_∞ . В частности, это верно, если $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$. Например, $L_{p,q} \in \mathbb{K}$ для всех $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Кроме того, если L_{N_γ} — экспоненциальное пространство Орлича, то $L_{N_\gamma} \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $0 < \gamma \leq 1$ [8, с. 42]. О свойстве Круглова и его применении в изучении геометрии с.п. см. [8] и [7].

Определенное соотношением (1) множество Z_X^2 (X — с.п. на $[0, 1]$) впервые появилось в [2]. Так как функционал $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ эквивалентен некоторой симметричной норме, Z_X^2 является с.п. на $[0, \infty)$. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность функций, определенных на $[0, 1]$, то через $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty$ далее будет обозначаться произвольная последовательность их попарно дизъюнктивных копий (т.е. равноизмеримых с ними функций) на $[0, \infty)$, например, $\bar{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$.

Говорят, что с.п. X допускает *нижнюю p -оценку* ($1 \leq p < \infty$), если существует такая константа $C_X > 0$, что для любых попарно дизъюнктивных функций $x_1, \dots, x_n$ из X выполнено неравенство $(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^p)^{1/p} \leq C_X \|\sum_{k=1}^n x_k\|_X$.

3. Основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что X — такое с.п. на $[0, 1]$, что $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ — произвольная последовательность независимых функций, то их замкнутая линейная оболочка $[f_k]$ дополняема в X тогда и только тогда, когда в пространстве Z_X^2 дополняемо подпространство $[\bar{f}_k]$, порожденное их дизъюнктивными копиями.*

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 учитывается, что дополняемость оболочки $[\bar{f}_k]$ в Z_X^2 — свойство, не зависящее от выбора дизъюнктивных копий $\bar{f}_k$. Более того, если функции g_k и h_k из с.п. Z на полуоси $[0, \infty)$ равноизмеримы для каждого $k = 1, 2, \dots$, $\text{supp } g_k \subset [k-1, k]$, $\text{supp } h_k \subset [k-1, k]$ ($k = 1, 2, \dots$), то подпространства $[g_k]$ и $[h_k]$ дополняемы или нет в Z одновременно.

Замечание 2. Ни одно из условий $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$ в теореме 1 отбросить, вообще говоря, нельзя. Действительно, система функций Радемахера $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$ ($k = 1, 2, \dots$) порождает в с.п. X дополняемое подпространство тогда и только тогда, когда $G \subset X \subset G'$, где G — замыкание пространства L_∞ в пространстве Орлича L_{N_2} (см. [12] или [1, теорема 2.b.4(ii)]). В то же время последовательность их дизъюнктивных копий $\{\chi_{[k-1, k-1/2]} - \chi_{[k-1/2, k]}\}$ (или, что эквивалентно, $\{\chi_{[k-1, k]}\}$) порождает в Z_X^2 дополняемое подпространство для любого с.п. X [10, неравенство (3.11), с. 112, и теорема 2.4.3].

Следствие 1. *Пусть с.п. X удовлетворяет условиям теоремы 1, $\{f_k\} \subset X$ — такая последовательность независимых функций, что $\sum_{k=1}^\infty m(\text{supp } f_k) \leq 1$. Тогда подпространства $[f_k]$ и $[\bar{f}_k]$ дополняемы или нет в X одновременно.*

Доказательство. Прежде всего, как легко видеть, X дополняемо в Z_X^2 . Кроме того, если $f \in Z_X^2$ такова, что $m(\text{supp } f) \leq 1$, то $\|f\|_{Z_X^2} = \|f\|_X$. Поэтому дополняемость подпространства $[\bar{f}_k]$ в Z_X^2 эквивалентна его дополняемости в X . Применяя теорему 1, получаем нужный результат. $\square$

4. О последовательностях независимых функций, эквивалентных стандартному базису в l_p . С помощью теоремы 1 можно получить следующий результат о дополняемости подпространств с.п., порожденных последовательностями независимых функций, в случае, когда последние эквивалентны стандартному базису в l_p .

Теорема 2. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Предположим, что с.п. X допускает нижнюю p -оценку, $X' \in \mathbb{K}$ и $\{f_k\} \subset X$ — последовательность независимых функций, эквивалентная в X стандартному базису пространства l_p . Тогда если либо (а) $p > 2$, либо (б) $p = 2$ и $X \supset L_2$, либо (с) $\|f_k\chi_{A_k}\|_X \geq \delta > 0$*

($k = 1, 2, \dots$) для некоторой последовательности множеств $A_k \subset [0, 1]$, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \infty$, то подпространство $[f_k]$ дополняемо в X .

Замечание 3. Условие почти дизъюнктности последовательности $\{f_k\} \subset X$ в п. (с) последней теоремы существенно. Действительно, хорошо известно, что последовательность независимых p -устойчивых случайных величин эквивалентна в $L_r = L_r[0, 1]$ стандартному базису пространства l_p , если $1 \leq r < p < 2$, и порождает при этом в L_r недополняемое подпространство (см., например, [13, теоремы 6.4.18 и 6.4.21]).

Рассмотрим частный случай пространств Лоренца $L_{p,q} = L_{p,q}[0, 1]$. Так как $L_{p,q}$ допускает нижнюю $\max(p, q)$ -оценку (см. [14] или [15, теорема 3]), $L_{p,q} \in \mathbb{K}$ и $(L_{p,q})' = L_{p',q'} \in \mathbb{K}$, где $1/p + 1/p' = 1$ и $1/q + 1/q' = 1$, из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Пусть $\{f_k\} \subset L_{p,q}$ — последовательность независимых функций, эквивалентная в $L_{p,q}$ стандартному базису пространства l_q . Тогда подпространство $[f_k]$ дополняемо в $L_{p,q}$, если либо $p \geq 2$, либо $\|f_k \chi_{A_k}\|_{L_{p,q}} \geq \delta > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) для некоторой последовательности множеств $A_k \subset [0, 1]$, таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \infty$.

Предположим, что $1 \leq p < \infty$ и последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых функций из $L_p = L_p[0, 1]$, $\|f_k\|_p = 1$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), такова, что замкнутая линейная оболочка $[f_k]$ изоморфна l_p . Используя аргументы работ [4] (см. теорему 4 и лемму 7) и [16] (начало доказательства теоремы А), нетрудно показать, что тогда $\{f_k\}$ эквивалентна в L_p стандартному базису пространства l_p . Следовательно, так как при $p \neq 2$ неравенство $\|f_k \chi_{A_k}\|_{L_p} \geq \delta > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) выполнено для некоторой последовательности дизъюнктных множеств $A_k \subset [0, 1]$ [17, теорема В] и $L_{p,p} = L_p$ ($1 < p < \infty$), из теорем 2 и 3 вытекает следующая хорошо известная теорема Дора–Стабеда.

Следствие 2 [16, теорема А]. Предположим, что $1 \leq p < \infty$ и $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых функций из $L_p = L_p[0, 1]$. Если подпространство $[f_k]$ изоморфно l_p , то оно дополняемо в L_p .

5. Характеризация L_2 . В работе [18] Семенов и Эрнандес рассмотрели вопрос о дополняемости в с.п. X на $[0, \infty)$ подпространства, порожденного сдвигами $a_k = a(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) фиксированной функции $a \in X$, $a = a^* \neq 0$, $\text{supp } a \subset [0, 1]$. Применяя теорему 1 из данной работы и теорему 5.4 из [18], можно получить следующую характеризацию гильбертова пространства L_2 .

Теорема 4. Пусть X — с.п. на $[0, 1]$, $X \in \mathbb{K}$, $X' \in \mathbb{K}$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) для любых последовательностей $\{f_k\} \subset X$ и $\{f'_k\} \subset X'$ независимых одинаково распределенных функций, таких, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$, подпространства $[f_k]$ и $[f'_k]$ дополняемы в X и X' соответственно;
- (ii) $X = L_2[0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II. Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979. [2] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **19**:217 (1979). [3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999. [4] Н. Р. Rosenthal, *Israel J. Math.*, **8**

(1970), 273–303. [5] W. B. Johnson, G. Schechtman, *Ann. Probab.*, **17**:2 (1989), 789–808. [6] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **345** (2007), 25–50. [7] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *УМН*, **65**:6 (2010), 3–86. [8] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994. [9] В. М. Круглов, *ТВП*, **15**:2 (1970), 331–336. [10] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [11] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston, MA, 1988. [12] В. А. Родин, Е. М. Семенов, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:2 (1979), 91–92. [13] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Math., vol. 233, Springer-Verlag, New York, 2006. [14] J. Creekmore, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **43**:2 (1981), 145–152. [15] S. J. Dilworth, in: *Handbook of the geometry of Banach spaces*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 2001, 497–532. [16] L. E. Dor, T. Starbird, *Compositio Math.*, **39**:2 (1979), 141–175. [17] L. E. Dor, *Ann. of Math.*, **102**:3 (1975), 463–474. [18] F. L. Hernandez, E. M. Semenov, *J. Funct. Anal.*, **169**:1 (1999), 52–80.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
10 октября 2011 г.

УДК 519.217

Непрерывность асимптотических характеристик для случайных блужданий на гиперболических группах*

© 2013. В. А. КАЙМАНОВИЧ, А. Г. ЭРШЛЕР

Имеется целый ряд естественных численных инвариантов, связанных со случайным блужданием на счетной группе G , задаваемым вероятностной мерой μ . В частности, это норма переходного оператора, его спектральный радиус, показатель экспоненциального убывания вероятностей возвращения, скорость ухода на бесконечность, асимптотическая энтропия. Близким родственником скорости ухода на бесконечность также является спектр показателей Ляпунова, определенный для линейных групп.

Для отдельно взятого случайного блуждания (G, μ) эти инварианты и взаимоотношения между ними были предметом изучения, начиная с основополагающей работы Кестена, вышедшей еще в 1959 г. Тем не менее вопрос об их зависимости от переходной меры μ на одной и той же группе G исследован в куда меньшей степени.

Мы описываем новый метод, основанный на использовании условных случайных блужданий и позволяющий устанавливать непрерывность асимптотической энтропии как функции переходной меры при достаточно слабых предположениях о мерах (конечность первого момента). Он сводится к проверке равномерности в ленточном критерии описания границы Пуассона.

Несмотря на то, что в настоящей заметке мы ограничиваемся рассмотрением словарно гиперболических групп, наш подход также применим и в ряде других

*Работа над этой заметкой осуществлялась при поддержке European Research Council в рамках European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013), ERC grant agreement 257110-RAWG; ANR (France) в рамках проекта “DiscGroup: facettes des groupes discrets”; программы Canada Research Chairs; NSERC (Canada).