

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЕЩЕСТВЕННЫМ МЕТОДОМ

С. В. Асташкин

1. Введение. Напомним некоторые определения теории интерполяции линейных операторов (подробнее см. [1] или [2]).

Тройка банаховых пространств (X_0, X_1, X) называется интерполяционной относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , если непрерывность линейного оператора T из X_i в Y_i влечет непрерывность T из X в Y . Под интерполяционным функтором (и.ф.) понимается функтор F [1], действующий из категории банаховых пар в категорию банаховых пространств так, что для произвольных пар $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ тройка $(X_0, X_1, F(\vec{X}))$ интерполяционна относительно тройки $(Y_0, Y_1, F(\vec{Y}))$. Через sR обозначим одномерное пространство R с нормой $\|x\|_{sR} = s|x|$, через tR — пространство R с нормой $\|x\|_{tR} = t|x|$ ($s, t > 0$). Тогда для и.ф. F

$$F(sR, tR) = \psi(s, t)R,$$

где $\psi(s, t)$ — характеристическая функция (х.ф.) и.ф. F — неотрицательна, однородна и возрастает по каждому аргументу. Поэтому $\psi(s, t) = t\varphi\left(\frac{s}{t}\right)$, где функцию $\varphi(u) = \psi(u, 1)$ также назовем х.ф. соответствующего и.ф.; $\varphi(u)$ ($u > 0$) неотрицательна и квазिवогнута, т. е. $\varphi(u)$ возрастает, а $\frac{\varphi(u)}{u}$ убывает.

Введем основное определение. Будем говорить, что и.ф. F интерполирует билинейные операторы, если для любых банаховых пар $\vec{X} = (X_0, X_1)$, $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$, $\vec{Z} = (Z_0, Z_1)$ и для всякого билинейного оператора $B: X_i \times Y_i \rightarrow Z_i$ ($i=0, 1$) выполнено $B: F(\vec{X}) \times F(\vec{Y}) \rightarrow F(\vec{Z})$.

Важным примером и.ф. являются функторы вещественного метода. Для банаховой пары (X_0, X_1) и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{F}$ -функционалы Петре [3]:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf_{\substack{n=x_0+x_1 \\ x_i \in X_i}} \{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}\} \quad (x \in X_0 + X_1),$$

$$\mathcal{F}(t, x; X_0, X_1) = \max\{\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}\} \quad (x \in X_0 \cap X_1).$$

Пусть E — банахово идеальное пространство (б.и.п.) [4] двусторонних числовых последовательностей $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$. Обозначим через $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{X}}$ пространство всех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна $\|x\| = \|(\mathcal{X}(2^j, x; X_0, X_1))_j\|_E$, через $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ — пространство всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j, \quad (1)$$

где $u_j \in X_0 \cap X_1$. Норма в $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ определяется как $\inf \|(\mathcal{J}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E$ по всем представлениям (1). Для б.и.п. последовательностей G и функции $f \geq 0$ через $G(f)$ будет обозначаться пространство с «весом», норма которого $\|(a_k)\| = \|(a_k f(2^k))\|_G$. Если $l_{\infty}(\max(1, 1/t)) \subset E \subset l_1(\min(1, 1/t))$, то отображение $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{X}}$ (соответственно $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$) определяет и.ф.; их совокупность называют вещественным $\mathcal{X}$ -методом (соответственно $\mathcal{J}$ -методом) интерполяции. Если, в частности, тройка $(l_1, l_1(1/t), E)$ интерполяционна относительно тройки $(l_{\infty}, l_{\infty}(1/t), E)$, то E называется параметром вещественного метода и тогда для всякой пары $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{X}} = (X_0, X_1)_E^{\mathcal{J}}$ [5, p. 432].

Важный и хорошо изученный частный случай приведенной конструкции — пространства

$$(X_0, X_1)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{l_p(\cdot)^{\theta}}^{\mathcal{X}} = (X_0, X_1)_{l_p(\cdot)^{\theta}}^{\mathcal{J}} \quad (0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty).$$

Ж.-Л. Лионс и Я. Петре в работе [6] (см. также [1, с. 100]) доказали теорему: если T — билинейный оператор, $T: X_i \times Y_i \rightarrow Z_i$ ($i=0, 1$), то $T: (X_0, X_1)_{\theta, p} \times (Y_0, Y_1)_{\theta, p} \rightarrow (Z_0, Z_1)_{\theta, p}$, где $0 < \theta < 1$ и

$$\frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} - 1. \quad (2)$$

Рассмотрим пример: $(X_0, X_1) = (Y_0, Y_1) = (Z_0, Z_1) = (l_1, l_1(t))$ и оператор свертки последовательностей $x = (x_i)$, $y = (y_i)$

$$S(x, y) = x * y = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_{k-i} \right)_k.$$

Условия теоремы Лионса — Петре выполнены, а так как $(l_1, l_1(t))_{\theta, p} = = l_p(t^{\theta})$, то $S: (X_0, X_1)_{\theta, p_0} \times (Y_0, Y_1)_{\theta, p_1} \rightarrow (Z_0, Z_1)_{\theta, p_2} \Leftrightarrow l_{p_0} * l_{p_1} \subset l_{p_2} \Leftrightarrow \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} - 1$. Следовательно, эта теорема точна, и среди функторов $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$) билинейные операторы интерполируются лишь функторами $(\cdot, \cdot)_{\theta, 1}$ ($0 < \theta < 1$). (В то же время при определенных условиях на банаховы пары соотношение (2) может быть ослаблено [7].)

В настоящей работе задача изучения и.ф., интерполирующих билинейные операторы, рассматривается в рамках общего вещественного метода. Показано, что в случае степенной х.ф. $\varphi(t) = t^{\theta}$ и.ф. $(\cdot, \cdot)_{1-\theta, 1}$ — единственный с таким свойством. В то же время в «слоях» функторов с некоторыми другими х.ф. их запас значительно богаче.

Докажем, прежде всего, один результат, показывающий принципиальный характер примера с оператором свертки.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольных параметров вещественного метода E_0, E_1 и E_2 следующие два условия эквивалентны:

- 1) свертка $E_0 * E_1 \subset E_2$;
- 2) для любых банаховых пар $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1), (Z_0, Z_1)$ и всякого билинейного оператора $T: X_i \times Y_i \rightarrow Z_i$ ($i=0, 1$) выполнено:

$$T: (X_0, X_1)_{E_0} \times (Y_0, Y_1)_{E_1} \rightarrow (Z_0, Z_1)_{E_2}.$$

Доказательство. Пусть сначала имеется 2). Возьмем $(X_0, X_1) = (Y_0, Y_1) = (Z_0, Z_1) = (l_1, l_1(1/t))$ в качестве T — свертку S . Так как $S: X_i \times Y_i \rightarrow Z_i$, то 1) следует из соотношения $(l_1, l_1(1/t))_{E_i}^{\mathcal{X}} = (l_1, l_1(1/t))_{E_i}^{\mathcal{Y}} = E_i$ [5, р. 424].

Идея доказательства обратного утверждения фактически из [6]. Итак, пусть T — билинейный оператор, $T: X_i \times Y_i \rightarrow Z_i$. Представим $x \in (X_0, X_1)_{E_0}^{\mathcal{X}}$ и $y \in (Y_0, Y_1)_{E_1}^{\mathcal{X}}$ в виде

$$x = x_0 + x_1 (x_i \in X_i), y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k (u_k \in Y_0 \cap Y_1)$$

(последнее можно сделать, так как E_1 — параметр). Тогда в силу билинейности T для всех $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t, T(x, y); Z_0, Z_1) &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(t, T(x, u_k); Z_0, Z_1) \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\|T(x_0, u_k)\|_{Z_0} + t \|T(x_1, u_k)\|_{Z_1}) \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (M_0 \|x_0\|_{X_0} + 2^{-k} t M_1 \|x_1\|_{X_1}) \mathcal{Y}(2^k, u_k; Y_0, Y_1), \end{aligned}$$

где $M_i = \|T\|_{X_i \times Y_i \rightarrow Z_i}$. Выбирая для каждого $k \in \mathbb{Z}$ представление $x = x_0 + x_1$ подходящим образом, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t, T(x, y); Z_0, Z_1) &\leq \\ &\leq \max(M_0, M_1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(t 2^{-k}, x; X_0, X_1) \mathcal{Y}(2^k, u_k; Y_0, Y_1). \end{aligned}$$

Применим это неравенство при $t=2^s$ ($s \in \mathbb{Z}$) вместе с условием 1) для оценки $\|T(x, y)\|$ в пространстве $(Z_0, Z_1)_{E_2}^{\mathcal{X}}$:

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\| &= \|\mathcal{X}(2^s, T(x, y); Z_0, Z_1)\|_{E_2} \leq \\ &\leq \max(M_0, M_1) \|a_x * b_y\|_{E_2} \leq C \max(M_0, M_1) \|a_x\|_{E_0} \|b_y\|_{E_1}, \end{aligned}$$

где $a_x = \mathcal{X}(2^s, x; X_0, X_1)$, $b_y = \mathcal{Y}(2^s, u_i; Y_0, Y_1)$, а представление $y = \sum u_k$ выбрано соответствующим образом.

Доказанная теорема сводит вопрос о функторах, интерполирующих билинейные операторы, к изучению свертки в пространствах последовательностей.

В случае симметричных функциональных пространств [2] задачи такого рода рассматривались рядом авторов, отметим, например, работы [8—11]. Из результатов, полученных в них, и теоремы 1 следует непрерывность билинейных операторов в некоторых пространствах вещественного метода, параметры которых — симметричные пространства последовательностей со степенными весами. Однако это не дает (и как показывает теорема 3 из следующего пункта, не может дать) новых примеров функторов, интерполирующих билинейные операторы.

2. Степенной случай. Через e_k ($k \in \mathbb{Z}$) будем далее обозначать стандартные орты, т. е. последовательности $(\dots, \underbrace{0, 1, 0, \dots}_k)$.

ЛЕММА 1. Пусть G — б. и. п. двусторонних числовых последовательностей, $\|e_k\|_G = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Тогда существуют $C > 0$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^\infty$, для которых

$$\left\| \sum_{j=-2N_k}^{2N_k} e_j \right\|_G \leq C \left\| \sum_{j=-N_k}^{N_k} e_j \right\|_G.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{j=-2n}^{2n} e_j \right\|}{\left\| \sum_{j=-n}^n e_j \right\|} = \infty.$$

Тогда для $M > 2$ найдется $N = N(M)$ такое, что для $n \geq N$

$$\left\| \sum_{j=-2n}^{2n} e_j \right\| \geq M \left\| \sum_{j=-n}^n e_j \right\|.$$

Применяя это неравенство для $n = 2^s N$ ($s = 0, 1, \dots, p-1$), получим

$$\left\| \sum_{j=-2^p N}^{2^p N} e_j \right\| \geq M \left\| \sum_{j=-2^{p-1} N}^{2^{p-1} N} e_j \right\| \geq \dots \geq M^p \left\| \sum_{j=-N}^N e_j \right\|$$

для любого $p = 1, 2, \dots$

С другой стороны, по условию

$$\left\| \sum_{j=-2^p N}^{2^p N} e_j \right\| \leq \sum_{j=-2^p N}^{2^p N} \|e_j\| = 2^{p+1}N + 1.$$

Таким образом, при $p = 1, 2, \dots$

$$M^p \leq M^p \left\| \sum_{j=-N}^N e_j \right\| \leq 2^{p+2}N + 1,$$

что противоречит неравенству $M > 2$.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что G — б. и. п. последовательностей, $\|e_k\|_G = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) и оператор свертки $S: G \times G \rightarrow G$.

Тогда $G = l_1$.

Доказательство. Так как G — б. и. п. и $\|e_k\|_G=1$, то $l_1 \subset G$. Докажем обратное вложение.

Пусть $y=(y_i) \in E$, $y \geq 0$ и финитна, т. е. для всех i , $|i| \geq N$, $y_i=0$. По лемме 1 найдем $C_1 > 0$ и возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что для всех $k=1, 2, \dots$

$$\left\| \sum_{j=-2N_k}^{2N_k} e_j \right\|_G \leq C_1 \left\| \sum_{j=-N_k}^{N_k} e_j \right\|_G. \quad (3)$$

Выберем k_0 так, чтобы $N_{k_0} \geq N$, и обозначим $x = \sum_{j=-2N_{k_0}}^{2N_{k_0}} e_j$. Тогда

$$S(x, y) = (2_j)_{-\infty}^\infty, \quad z_j \geq 0 \text{ и для } |j| \leq N_{k_0} \quad z_j = \sum_{i=-N}^N y_i = \|y\|_{l_1}.$$

$$\text{Следовательно, } S(x, y) \geq Z' = \sum_{j=-N_{k_0}}^{N_{k_0}} z_j e_j = \|y\|_{l_1} \sum_{j=-N_{k_0}}^{N_{k_0}} e_j^*.$$

Так как G идеально, то по условию

$$\|y\|_{l_1} \left\| \sum_{j=-N_{k_0}}^{N_{k_0}} e_j \right\|_G \leq \|S(x, y)\| \leq C_2 \|x\|_G \|y\|_G,$$

где $C_2 = \|S\|_{G \times G \rightarrow G}$. Ввиду (3) поэтому $\|y\|_{l_1} \leq C_1 C_2 \|y\|_G$.

Если теперь $y=(y_i) \in G$ произвольна, то для «срезки» $y^N=(y_i^N)$, $y_i^N = \begin{cases} y_i, & |i| < N \\ 0, & |i| \geq N \end{cases}$ в силу предыдущего $\|y^N\|_{l_1} \leq C_1 C_2 \|y^N\|_G \leq C_1 C_2 \|y\|_G$,

причем C_1 и C_2 не зависят от N и y . Поэтому в неравенстве можно перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x. \phi.$ функтора $(\cdot, \cdot)_E^X$, построенного по параметру E , равна t^θ ($0 < \theta < 1$). Следующие условия эквивалентны:

1) $E=l_1(t^{\theta-1})$;

2) $u. \phi. (\cdot, \cdot)_E^X$ интерполирует билинейные операторы.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теоремы 1. Докажем обратное.

Так как $x. \phi.$ функтора $(\cdot, \cdot)_E^X$ равна t^θ , то $l_1(t^{\theta-1}) \subset E \subset l_\infty(t^{\theta-1})$ [12, с. 47–48]. Поэтому для $G=E(t^{1-\theta})$ $\|e_k\|_G=1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Если выполнено 2), то по теореме 1 $S: E \times E \rightarrow E$, откуда ввиду мультипликативности степенной функции $S: G \times G \rightarrow G$. Таким образом, для G выполнены условия теоремы 2, и, значит, $G=l_1$, а $E=l_1(t^{\theta-1})$.

3. Общий случай. Пусть теперь $x. \phi.$ функтора $(\cdot, \cdot)_E^X$, построенного по параметру E , равна $\varphi(t)$. По теореме 1 этот и. ф. интерполирует билинейные операторы в том и только том случае, если оператор свертки $S: E \times E \rightarrow E$. Иначе говоря, существует $C > 0$ такое, что для всех $x=(x_i) \in G$, $y=(y_i) \in G$

$$\left\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} x_i y_{k-i} \right\|_G \leq C \|x\| \|y\|, \quad (4)$$

где $G=E(\tilde{\varphi})$, $\tilde{\varphi}(t)=t/\varphi(t)$ и $\varphi_s=\varphi(2^s)$.

*) Для $a=(a_i)$, $b=(b_i)$ $a \geq b$ означает: $a_i \geq b_i$ для всех i .

Прежде чем сформулировать условия, достаточные для выполнения (4), приведем некоторые определения. Если G и H — б. и. п. последовательностей, то через $G[H]$ будем обозначать пространство со смешанной нормой, т. е. множество всех матриц $(a_{i,k})$ таких, что

$$\|(a_{i,k})\|_{G[H]} = \| \| (a_{i,k}) \|_{H(i)} \|_{G(k)} < \infty.$$

Через G' обозначим б. и. п., дуальное к б. и. п. G , т. е. пространство всех (y_i) , для которых

$$\|(y_i)\|_{G'} = \sup_{\|(x_i)\|_G \leq 1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_i < \infty.$$

II. наконец, на произведении $G \times H$ определим оператор $R: R(x, y) = (x_i y_{k-i})_{i,k}$, где $x = (x_i) \in G$, $y = (y_i) \in H$.

ТЕОРЕМА 4. Каждое из следующих условий достаточно для выполнения соотношения (4):

1) R непрерывен из $G \times G$ в $G(k)[l_\infty(i)]$ и

$$A_\infty(\varphi) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} < \infty; \quad (5)$$

2) R непрерывен из $G \times G$ в $G(k)[G(i)]$ и

$$A_G(\varphi) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right) \right\|_{G'(i)} < \infty. \quad (6)$$

Доказательство. Если

$$z_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_{k-i} \frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}},$$

то для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$|z_k| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |x_i y_{k-i}| \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}},$$

откуда $\|(z_k)\|_G \leq A_\infty(\varphi) \|R(x, y)\|_G \leq A_\infty(\varphi) \|R\| \|x\|_G \|y\|_G$.

Второе утверждение получается точно так же из неравенства

$$|z_k| \leq \|(x_i y_{k-i})\|_{G(i)} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right) \right\|_{G'(i)}.$$

Замечание 1. Неотрицательные квазивогнутые функции на $(0, \infty)$, удовлетворяющие условию (5) (и тем более (6)), существуют. Примером является семейство функций

$$\Psi_{a,b}^{c,d}(t) = \begin{cases} t^a \ln^c(M_1 t^{-1}), & 0 < t \leq 1, \\ t^b \ln^d(M_2 t), & t > 1, \end{cases}$$

где $0 < a < b < 1$, $c > 1$, $d > 1$, а числа $M_1 > e^{c,a}$ и $M_2 > e^{d,(1-b)}$ выбираются по непрерывности.

Рассмотрим случай: $G = l_p$ ($1 \leq p \leq \infty$).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и

$$A_p(\varphi) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} (\varphi_i \varphi_{k-i})^{-1/p'} \right]^{1/p'} < \infty. \quad (7)$$

Тогда и.ф. $(\cdot, \cdot)_{l_p(\Omega/\tilde{\varphi})}^{\mathcal{H}}$ интерполирует билинейные операторы.

Доказательство. Если $\|x\|_p = \|x\|_{l_p}$, то

$$\|R(x, y)\|_p = \| (x_i y_{k-i}) \|_{p(i)} \|_{p(k)} = \| (x_i y_{k-i}) \|_{p(k)} \|_{p(i)} = \|x\|_p \|y\|_p,$$

и в силу предыдущего теорема доказана.

Замечание 2. Для $p=1$ и $p=\infty$ условие (7) точное. Действительно, если $G=l_\infty$, то, положив в (4) $x=y=(1)_{-\infty}^\infty$, получаем $A_\infty(\varphi) < \infty$. Отметим, что (7) возникает при изучении билинейного оператора

$$B(x, y) = x(s)y(t) \quad (8)$$

в функциональных пространствах Марцинкевича [13].

Для $p=1$ (7) перейдет в условие

$$\sup_{i, k \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} < \infty, \quad (9)$$

которое получается, если в соотношении (4) в качестве x и y брать орты e_k . Ввиду квазивогнутости φ (9) эквивалентно обобщенной подумультипликативности этой функции, т.е. существованию $C>0$, при котором для всех $s, t>0$ $\varphi(st) \leq C\varphi(s)\varphi(t)$.

Рассмотрим случай: $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что и.ф. $(\cdot, \cdot)_{l_p(\Omega/\tilde{\varphi})}^{\mathcal{H}}$, $1 < p < \infty$, интерполирует билинейные операторы и для всякого $u>0$ функция $\psi(s) = \frac{\varphi(us)}{\varphi(s)}$ монотонна на $(0, \infty)$.

Тогда выполнено соотношение (7).

Доказательство. Пусть $z=(z_k)$, $z_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} x_i y_{k-i}$.

По условию существует $C>0$ такое, что для $x=(x_i) \in l_p$, $y=(y_i) \in l_p$

$$\|z\|_p \leq C \|x\|_p \|y\|_p. \quad (10)$$

Предположим, что $x \geq 0$ и финитна, $x_i=0$, если $|i| \geq N$. Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим $y = \sum_{j=-2N}^{2N} e_{j+k}$.

Если $-N+k \leq m \leq N+k$, то $z_m = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m}{\varphi_i \varphi_{m-i}} x_i$. Поэтому

$$\|z\|_p \geq \|v\|_p, \quad (11)$$

где $v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{x_i}{\varphi_i} \sum_{j=-N}^N \frac{\varphi_{k+j}}{\varphi_{k-i+j}} e_{j+k}$.

Обозначим через I_1 множество таких $i \in \mathbb{Z}$, что функция

$$\psi(s) = \frac{\varphi(2^i s)}{\varphi(s)} \left(\text{а значит, и } \psi(2^{k-i} s) = \frac{\varphi(2^k s)}{\varphi(2^{k-i} s)} \right)$$

возрастает, через I_2 — множество i , для которых она убывает. Тогда

$$v \geq \max \left(\sum_{i \in I_1} \frac{x_i \varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \sum_{j=0}^N e_{j+k}, \sum_{i \in I_2} \frac{x_i \varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \sum_{j=-N}^0 e_{j+k} \right)$$

и поэтому

$$\|v\|_p \geq \max \left(\sum_{i \in I_1} \frac{x_i \varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}}, \sum_{i \in I_2} \frac{x_i \varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right) (N+1)^{1/p}.$$

Отсюда ввиду (10) и (11) для любой финитной $x = (x_i)$, $\|x\|_p = 1$

$$\max \left(\sum_{i \in I_1} \frac{|x_i| \varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}}, \sum_{i \in I_2} \frac{|x_i| \varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right) \leq 2^{1/p} C.$$

Переходя к точной верхней грани по (x_i) , получим

$$\max \left\{ \left[\sum_{i \in I_1} \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right)^{p'} \right]^{1/p'}, \left[\sum_{i \in I_2} \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right)^{p'} \right]^{1/p'} \right\} \leq 2^{1/p} C,$$

откуда в силу условия $I_1 \cup I_2 = \mathbb{Z}$

$$\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_i \varphi_{k-i}} \right)^{p'} \right]^{1/p'} \leq 2^{1+1/p} C.$$

Теорема доказана.

В качестве другого примера рассмотрим обобщение l_p — шкалу пространств Лоренца $l_{p,q}$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$): ограниченная последовательность $x = (x_k)_{-\infty}^{\infty} \in l_{p,q}$, если конечна

$$\|x\|_{p,p} = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^*)^q i^{q/p-1} \right]^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} (x_i^* i^{1/p}), & q = \infty, \end{cases}$$

где $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ — перестановка (x_k) в невозрастающем порядке [14, с. 146]. В частности, $l_{p,p} = l_p$.

Предложение. Билинейный оператор $R(x, y) = (x_i, y_{k-i})$ непрерывен из $l_{p,q} \times l_{p,q}$ в $l_{p,q}(k)[l_{(p-1)q'}(i)]$, если $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq p$.

Доказательство. Пусть сначала $q=1$. Зафиксируем $x = (x_k) \in l_{p,1}$ и положим $T_x y = R(x, y)$. Оператор T_x линейен, оценим его значения на характеристических функциях $\chi_e(i) = \begin{cases} 1, & i \in e, \\ 0, & i \notin e. \end{cases}$

Заметим, что в случае $\text{card}(e) = r$ справедлива оценка

$$\|T_x \chi_e\|_{\infty} \leq S_r x,$$

где $S_r x = (\underbrace{x_1^*, \dots, x_1^*}_r, \dots, \underbrace{x_k^*, \dots, x_k^*}_r, \dots)$.

Поэтому

$$\begin{aligned} & \| \| T_{\chi_e} \|_{\infty(i)} \|_{p, 1(k)} \leq \| S_r x \|_{p, 1} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* \sum_{i=(k-1)r+1}^{kr} i^{1/p-1} \leq pr^{1/p} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* (k^{1/p} - (k-1)^{1/p}) \leq \\ & \leq 2pr^{1/p} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* k^{1/p-1} = 2p \| x \|_{p, 1} \| \chi \|_{p, 1}. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду дискретного варианта леммы 5.2 гл. 2 из [2] получаем, что $\|T_x\|$ из $l_{p, 1}$ в $l_{p, 1}^{(k)} [l_{\infty}(i)]$ не превосходит $4p \|x\|_{p, 1}$. Это означает, что $R: l_{p, 1} \times l_{p, 1} \rightarrow l_{p, 1}(k) [l_{\infty}(i)]$ и $\|R\| \leq 4p$.

В случае $1 < q < p$ воспользуемся комплексным методом интерполяции [1, гл. 4]. По доказанному

$$\begin{aligned} R: l_p \times l_p &\rightarrow l_p(k) [l_p(i)], \\ R: l_{p, 1} \times l_{p, 1} &\rightarrow l_{p, 1}(k) [l_{\infty}(i)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Возьмем $\theta: \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p} = \frac{1}{q}$. Как известно [1, с. 126], при каждом $0 < \theta < 1$ комплексный метод интерполирует билинейные операторы. Кроме того, $[l_{p, 1}, l_p]_{\theta} = l_{p, q}$ (см. [14, с. 146] и [1, с. 134]) и для любых б. н. п. E_i, F_i ($i=0, 1$) $[E_0[F_0], E_1[F_1]]_{\theta} = [E_0, E_1]_{\theta} [[F_0, F_1]_{\theta}]$ [15]. Следовательно, интерполируя (12), получим

$$R: l_{p, q} \times l_{p, q} \rightarrow l_{p, q}(k) [[l_p(i), l_{\infty}(i)]_{\theta}].$$

Так как $\theta = p'/q'$, то $[l_p, l_{\infty}]_{\theta} = l_{(p-1)q'}$ [1, с. 139], и предложение доказано.

Из предложения и теоремы 4 следует

ТЕОРЕМА 7. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq p$ и для функции φ выполнено условие (5).

Тогда и $\Phi(\cdot, \cdot)_{l_{p, q}(1/\varphi)}^{\mathcal{H}}$ интерполирует билинейные операторы.

З а м е ч а н и е 3. Предположим, что норма б. н. п. последовательностей E порядково полунепрерывна, т. е. из $0 \leq x_n \uparrow x$ ($x_n, x \in E$) следует $\|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E$. Тогда непрерывность R из $E \times E$ в $E(k) [l_{\infty}(i)]$ эквивалентна непрерывности оператора $V(x, y) = (x_h y_i)$, являющегося дискретным аналогом оператора B (см. (8)), из $E \times E$ в $E(Z \times Z)$. Это позволяет показать, что $R: l_{p, \infty} \times l_{p, \infty} \rightarrow l_{p, \infty}(k) [l_{\infty}(i)]$. Автору неизвестно, непрерывен ли оператор R из $l_{p, 1} \times l_{p, 1}$ в $l_{p, 1}(k) [l_{p, 1}(i)]$.

Куйбышевский государственный
университет

Поступило
18.01.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [3] Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces // Notes Math. 1969. V. 39. P. 1-86.

- [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [5] Ovchinnikov V. J. The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 349–515.
- [6] Lions J. L., Peetre J. Sur une classe d'espaces d'interpolation // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 5–68.
- [7] Janson S. On interpolation of multi-linear operators // Lect. Notes in Math. 1988. V. 1302. P. 290–302.
- [8] O'Neil R. Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30. P. 129–142.
- [9] Павлов Е. А. Об операторе свертки в симметричных пространствах // УМН. 1976. Т. 31, № 1. С. 257–258.
- [10] Павлов Е. А. Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах // Изв. вузов. Мат. 1982. № 2. С. 36–42.
- [11] Павлов Е. А. Об интегральном неравенстве Хаусдорфа – Юнга в пространствах со смешанной нормой // УМН. 1984. Т. 39, № 2. С. 183–184.
- [12] Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов // Межвуз. темат. сб. научн. тр. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та. 1977. С. 31–74.
- [13] Milman M. Embeddings of Lorentz – Marcinkiewicz spaces with mixed norms // Anal. Math. 1978. V. 4. P. 215–223.
- [14] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [15] Бухвалов А. В. Комплексный метод интерполяции в пространствах вектор-функций и обобщенные пространства Бесова // ДАН СССР. 1981. Т. 260, № 2. С. 265–269.