

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКТОРОВ ВЕЩЕСТВЕННОГО МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

С. В. Асташкин

1. Введение. Напомним некоторые определения теории интерполяции линейных операторов (подробнее см. [1] или [2]).

Банахово пространство X называется промежуточным для банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$, если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset \subset X_0 + X_1$ (здесь и в дальнейшем вложения непрерывны); при этом совокупность (X_0, X_1, X) называется тройкой. Говорят, что тройка (X_0, X_1, X) интерполяционна относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , если для любого линейного оператора $T: X_i \rightarrow Y_i$ ($i = 0, 1$) $T(X) \subset Y$. В случае $X = Y$ X называют интерполяционным пространством между парами (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) (если, кроме того, $X_i = Y_i$ ($i = 0, 1$), то между пространствами X_0 и X_1). В частности, для любого интерполяционного функтора (и. ф.) (см. [1] или [2]) F и произвольных банаховых пар $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ тройка $(X_0, X_1, F(\vec{X}))$ интерполяционна относительно тройки $(Y_0, Y_1, F(\vec{Y}))$. Если дополнительно для каждого линейного оператора $T: X_i \rightarrow Y_i$

$$\|T\|_{F(\vec{X}) \rightarrow F(\vec{Y})} \leq \max_{i=0,1} (\|T\|_{X_i \rightarrow Y_i}),$$

то F называют точным и. ф.

Для банаховой пары (X_0, X_1) и $0 < s, t < \infty$ определим $\mathcal{K}$ - и $\mathcal{Y}$ -функционалы Петре [3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(s, t, x; X_0, X_1) &= \\ &= \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x_i \in X_i}} \{s \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1}\} \quad (x \in X_0 + X_1); \\ \mathcal{Y}(s, t, x; X_0, X_1) &= \max \{s \cdot \|x\|_{X_0}, t \cdot \|x\|_{X_1}\} \quad (x \in X_0 \cap X_1)\end{aligned}$$

В случае $s = 1$ эти функционалы будем обозначать через $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ и $\mathcal{Y}(t, x; X_0, X_1)$.

Пусть E — банахово идеальное пространство (БИП) (см., например, [4]) двусторонних числовых последовательностей $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$. Обозначим через $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ множество всех $x \in X_0 + X_1$, для которых конечна норма $\|x\| = \|(\mathcal{K}(2, x; X_0, X_1))_j\|_E$; через $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{Y}}$ — множество всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1), \quad (1)$$

где $u_j \in X_0 \cap X_1$. Норма в $(X_0, X_1)_E^{\mathcal{Y}}$ определяется как $\inf \|(\mathcal{Y}(2^j, u_j; X_0, X_1))_j\|_E$ по всем (u_j) из (1).

Для БИП последовательностей G и функции f через $G(f)$ в дальнейшем будет обозначаться пространство с нормой $\|(a_k)\|_{G(f)} = \|(a_k \cdot |f(2^k)|)\|_G$. Если $l_{\infty}(\max(1, 1/t)) \subset \subset E \subset l_1(\min(1, 1/t))$, то отображение $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{K}}$ (соответственно $(X_0, X_1) \mapsto (X_0, X_1)_E^{\mathcal{Y}}$) определяет точный и. ф.; их совокупность называют $\mathcal{K}$ -методом (соответственно $\mathcal{Y}$ -методом) интерполяции. Важный частный случай (см., например, [1]): пространства

$$\begin{aligned}(X_0, X_1)_{\theta, p} &= (X_0, X_1)_{l_p(t-\theta)}^{\mathcal{K}} = \\ &= (X_0, X_1)_{l_p(t-\theta)}^{\mathcal{Y}} \quad (0 < \theta < 1, \quad 1 \leq p \leq \infty).\end{aligned}$$

Пусть теперь банахово пространство A промежуточно для банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$. Определим точные и. ф. $\mathcal{O}_A^{\vec{A}}$ (орбита A относительно $\vec{A}$) и $\mathcal{P}_A^{\vec{A}}$ (коорбита A относительно $\vec{A}$) следующим образом (см. [5]):

$$\mathcal{O}_A^{\vec{A}}(X_0, X_1) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} T_k a_k : \sum_{k=1}^{\infty} \max_{i=0,1} \|T_k\|_{A_i \rightarrow X_i} \cdot \|a_k\|_A < \infty \right\}$$

с нормой $\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \max_{i=0,1} \|T_k\|_{A_i \rightarrow X_i} \cdot \|a_k\|_A : x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k a_k \right\}$;

$\mathcal{P}_A^{\vec{A}}(X_0, X_1)$ — множество всех $x \in X_0 + X_1$ таких, что для любого линейного оператора $T: X_i \rightarrow A_i$ ($i=0, 1$) $Tx \in A$ с нормой $\sup \{\|Tx\|_A: \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow A_i} \leq 1\}$.

Введем во множестве и. ф. частичную упорядоченность: $F \leq G$, если для всякой банаховой пары (X_0, X_1) $F(X_0, X_1) \subset G(X_0, X_1)$. В случае $F \leq G$ и $G \leq F$ пишем: $F = G$. Относительно этого порядка $\mathcal{O}_A^{\vec{A}}$ — наименьший среди и. ф. со свойством $F(A_0, A_1) \supset A$, а $\mathcal{P}_A^{\vec{A}}$ — наибольший среди и. ф. со свойством $F(A_0, A_1) \subset A$ [5].

Для положительной на $(0, \infty)$ функции f определим функцию растяжения $\mathcal{M}_f$:

$$\mathcal{M}_f(t) = \sup_{s>0} (f(st)/f(s)) \quad (0 < t < \infty).$$

Так как $\mathcal{M}_f$ полумультипликативна, то существуют числа

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t} \quad \text{и} \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_f(t)}{\ln t},$$

соответственно нижний и верхний показатели растяжения функции f [2, с. 75]. Если f — квазивогнутая функция на $(0, \infty)$ (т. е. $f(t)$ возрастает, а $t^{-1}f(t)$ убывает), то $0 \leq \gamma_f \leq \delta_f \leq 1$.

Введем основное определение. Будем называть множество банаховых пар $\mathcal{B}$ достаточным для и. ф. F , если из совпадения всякого и. ф. G с F на $\mathcal{B}$ следует, что $G = F$.

Всюду в дальнейшем используются следующие обозначения. Если f_0, f_1 и h — положительные функции на $(0, \infty)$, то $h^{-1} = 1/h$, $\tilde{h}(t) = t/h(t)$, $f_h = f_0 \cdot h(f_1 \cdot f_0^{-1})$,

$\overrightarrow{l_p(f^{-1})}$ — банахова пара $(l_p(f_0^{-1}), l_p(f_1^{-1}))$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Предположим, что f_0 и f_1 квазивогнуты, $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$ и $0 <$

$< \gamma_h \leq \delta_h < 1$. Тогда из результатов работы [6] немедленно следует, что множество, состоящее лишь из двух

пар: $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$, является достаточным для и. ф.

$(\cdot, \cdot)_{l_p(h^{-1})}$ ($1 \leq p \leq \infty$). В п. 2 аналогичный результат

будет получен для более общих и. ф. $\mathcal{K}$ -метода, в параметре которых вместо l_p стоит произвольное симметричное пространство последовательностей. Попутно будет доказано одно новое интерполяционное соотношение (см. (16)),

частные случаи которого были известны (см. [1, с. 157] и [6]).

Существуют и другие двухэлементные множества пар, достаточные для и. ф. вещественного метода интерполяции. В п. 3 рассматривается случай симметричных функциональных пространств (см. [2, глава 2]). В этой ситуации l_1 - и l_∞ -пространства с «весами» заменяются на пространства Лоренца и Марцинкевича. Пусть f — положительная вогнутая функция на $(0, \infty)$, $f(0) = 0$. Пространство Лоренца $\Lambda(f)$ — это банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(f)} = \int_0^\infty x^*(t) df(t),$$

где $x^*(t)$ — убывающая перестановка $|x(t)|$. В пространстве Марцинкевича $M(f)$ норма определяется следующим образом:

$$\|x\|_{M(f)} = \sup_{t>0} \left(\int_0^t x^*(s) ds / f(t) \right).$$

Как обычно, будем называть функции f и g эквивалентными (пишем: $f \sim g$), если для некоторого $C > 0$ и всех $0 < t < \infty$

$$C^{-1} |f(t)| \leq |g(t)| \leq C |f(t)|.$$

Аналогичным образом определяется эквивалентность последовательностей. И наконец, всюду далее $\{e_k\}_{k=-\infty}^\infty$ — стандартный базис в пространствах двусторонних последовательностей.

2. Пространства последовательностей.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f_0 и f_1 — квазивогнутые функции на $(0, \infty)$, причем отношение $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает. Если E — БИП, интерполяционное между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$, то единственным и. ф. (с точностью до определенного в п. 1 равенства), удовлетворяющим соотношению

$$F(\overrightarrow{l_1(f^{-1})}) = F(\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}) = E, \quad (2)$$

будет точный и. ф. $F_{f_0, f_1, E}$:

$$\begin{aligned} F_{f_0, f_1, E}(X_0, X_1) &= \mathcal{O}_E^{\overrightarrow{l_1(f^{-1})}}(X_0, X_1) = \mathcal{P}_E^{\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}}(X_0, X_1) = \\ &= \{x \in X_0 + X_1 : \|(\mathcal{K}(f_0(2^k), f_1(2^k), x; X_0, X_1))_k\|_E < \infty\} = \\ &= \{x = \sum_{k=-\infty}^\infty u_k : \|(\mathcal{Y}(f_0(2^k), f_1(2^k), u_k; X_0, X_1))_k\|_E < \infty\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Отметим прежде всего тот факт, что в силу предположения о существовании пространства, интерполяционного между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$, а также теоремы 2 из [7] $\gamma_{f_1, f_0^{-1}} > 0$, и, значит, отношение $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает от 0 до ∞ .

Обозначим функторы $\mathcal{O}_E^{\overrightarrow{l_1(f^{-1})}}$ и $\mathcal{P}_E^{\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}}$ через G и H соответственно. Так как пространство E интерполяционно между $\overrightarrow{l_\infty(f_0^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f_1^{-1})}$ и между $\overrightarrow{l_1(f_0^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_1(f_1^{-1})}$, то (см. [2, с. 56])

$$G(\overrightarrow{l_1(f^{-1})}) = H(\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}) = E. \quad (3)$$

Нашей основной задачей будет доказательство равенства: $G = H$, для чего нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Для каждого $t > 0$ через tR обозначим пространство действительных чисел с нормой $\|a\|_{tR} = t \cdot |a|$. Если F — точный и. ф., то его характеристическая функция определяется изометрическим равенством:

$$F(R, 1/t R) = (1/g(t)) R. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что F — точный и. ф. с характеристической функцией g и для некоторых $1 \leq p_0$, $p_1 \leq \infty$, $F(l_{p_0}(f_0^{-1}), l_{p_1}(f_1^{-1})) = E$. Тогда последовательности $(\|e_k\|_E)$ и $(f_g^{-1}(2^k))$ эквивалентны.*

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определим операторы $T_k(a_j) = a_k$ и $S_k a = a \cdot e_k$ ($a \in R$). Так как

$$\|T_k\|_{l_1(f_i^{-1}) \rightarrow (f_i^{-1}(2^k))R} = 1$$

и (см. (4))

$$F((f_0^{-1}(2^k))R, (f_1^{-1}(2^k))R) = (f_g^{-1}(2^k)) \cdot R, \quad (5)$$

то, ввиду точности и. ф.,

$$\|T_k\|_{E \rightarrow (f_g^{-1}(2^k))R} \leq C_1, \quad (6)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}$.

Точно так же в силу того, что

$$\|S_k\|_{(f_i^{-1}(2^k))R \rightarrow l_1(f_i^{-1})} = 1,$$

и соотношения (5) получаем:

$$\|S_k\|_{(f_g^{-1}(2^k))_{\mathbf{R} \rightarrow E}} \leq C_2, \quad (7)$$

где $C_2 > 0$ тоже не зависит от $k \in \mathbf{Z}$. Из (6) и (7) вытекает утверждение леммы.

Напомним некоторые обозначения работы [7]. Пусть для всех $k \in \mathbf{Z}$ оператор сдвига $P_k(a_j) = (a_{j+k})_{j=-\infty}^{\infty}$ непрерывен в БИП E . Тогда существуют числа

$$\mu_E = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\ln \|P_k\|_{E \rightarrow E}}{k}, \quad \nu_E = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|P_k\|_{E \rightarrow E}}{k}.$$

В следующих трех утверждениях f_0, f_1 и E такие же, как в теореме 1.

ЛЕММА 2. Если $(\|e_k\|_{E^1})_k \sim (g^{-1}(2^k))_k$, то $\gamma_{g f_0^{-1}} > 0$ и $\delta_{g \tilde{f}_1} < 1$ (g — положительная функция на $(0, \infty)$).

Доказательство. Достаточно показать, что для некоторого $C > 0$ и всех $k \in \mathbf{Z}$

$$\mathcal{M}_{g f_0^{-1}}(2^{-k}) \leq C \cdot \|P_{-k}\|_{E(f_0) \rightarrow E(f_0)} \quad (8)$$

и

$$\mathcal{M}_{g \tilde{f}_1}(2^k) \leq C \|P_k\|_{E(\tilde{f}_1^{-1}) \rightarrow E(\tilde{f}_1^{-1})}. \quad (9)$$

Действительно, тогда в силу интерполяционности E и теоремы 1 из [7] $\gamma_{g f_0^{-1}} \geq \mu_{E(f_0)} > 0$ и $\delta_{g \tilde{f}_1} \leq \nu_{E(\tilde{f}_1^{-1})} < 1$.

Для любого $k = 0, 1, \dots$ найдем j_k , при котором

$$\frac{g(2^{-k+j_k}) \cdot f_0(2^{j_k})}{f_0(2^{-k+j_k}) \cdot g(2^{j_k})} \geq \frac{1}{2} \mathcal{M}_{g f_0^{-1}}(2^{-k}).$$

Тогда по условию

$$\begin{aligned} \|P_{-k} e_{-k+j_k}\|_{E(f_0)} &= \|e_{j_k}\|_{E(f_0)} \geq \frac{1}{C_1} \frac{f_0(2^{j_k})}{g(2^{j_k})} \geq \\ &\geq \frac{1}{2C_1} \cdot \frac{f_0(2^{-k+j_k})}{g(2^{-k+j_k})} \mathcal{M}_{g f_0^{-1}}(2^{-k}) \geq \frac{1}{2C_1} \mathcal{M}_{g f_0^{-1}}(2^{-k}) \|e_{-k+j_k}\|_{E(f_0)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{g f_0^{-1}}(2^{-k}) &\leq \\ &\leq 2 \cdot C_1^2 \cdot \sup_{m \in \mathbf{Z}} \frac{\|P_{-k} e_m\|_{E(f_0)}}{\|e_m\|_{E(f_0)}} \leq 2 \cdot C_1^2 \cdot \|P_{-k}\|_{E(f_0) \rightarrow E(f_0)}, \end{aligned}$$

и, следовательно, (8) доказано. Доказательство (9) аналогично.

Следующие два утверждения приведены без доказательств. В том случае, когда $E = l_p$ с «весом», первое из них доказано в [6] (см. теорему 13); переход к общей ситуации затруднений не вызывает. Доказательство второго, обобщающего основную лемму теории интерполяции, практически ничем не отличается от доказательства самой этой леммы (см., например, [1, с. 62]).

Предложение 1. Для любой банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \|x\|_{G(\vec{X})} &= \\ &= \inf \left\{ \left\| (\mathcal{Y}(f_0(2^k), f_1(2^k), u_k; X_0, X_1))_k \right\|_E : x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \right\} \\ u \\ \|x\|_{H(\vec{X})} &= \left\| (\mathcal{K}(f_0(2^k)', f_1(2^k), x; X_0, X_1))_k \right\|_E. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Предположим, что для некоторого $x \in \in X_0 + X_1$

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} [\min_{i=0,1} (f_i^{-1}(2^k)) \cdot \mathcal{K}(f_0(2^k), f_1(2^k), x; X_0, X_1)] = 0. \quad (10)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется представление $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$ такое, что при $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(f_0(2^k), f_1(2^k), u_k; X_0, X_1) &\leq (\gamma + \varepsilon) \cdot \\ &\cdot \mathcal{K}(f_0(2^k), f_1(2^k), x; X_0, X_1), \end{aligned}$$

где $\gamma \leq 3$ — универсальная константа.

Продолжим доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что для любой банаховой пары (X_0, X_1) и каждого $x \in H(x_0, x_1)$ будет выполнено (10).

Пусть g_H — характеристическая функция и. ф. H . Тогда ввиду (3), [8, с. 48], а также [9, с. 23]

$$E = H(\overline{l_{\infty}(\vec{f}^{-1})}) \subset (\overline{l_{\infty}(\vec{f}^{-1})})_{l_{\infty}(g_H^{-1})}^{\mathcal{K}} = l_{\infty}(f_{g_H}^{-1}),$$

и поэтому в силу предложения 1 для каждого $x \in H(X_0, X_1)$ найдется $C > 0$ такое, что

$$\mathcal{K}(f_0(2^k), f_1(2^k), x; X_0, X_1) \leq C \cdot f_{g_H}(2^k). \quad (11)$$

С другой стороны, из (3) и леммы 1 следует эквивалентность последовательностей $(\|e_k\|_E)$ и $(f_{g_H}(2^k))$, откуда по лемме 2 и лемме 3 из [7] $0 < \gamma_{g_H} \leq \delta_{g_H} < 1$. Значит, в частности,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} [\min(1, 1/t) g_H(t)] = 0. \quad (12)$$

Из (11), (12) и того, что отношение $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает от 0 до ∞ , следует справедливость соотношения (10) для $x \in H(X_0, X_1)$.

Теперь все готово для доказательства равенства $G = H$. Пусть линейный оператор $T: l_1(f_i^{-1}) \rightarrow l_\infty(f_i^{-1})$ ($i = 0, 1$) и $a \in E$. Так как E интерполяционно между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$, то $Ta \in E$, и, значит, $H(\overrightarrow{l_1(f^{-1})}) \supset E$. В связи с тем, что G — наименьший среди и. ф., обладающих этим свойством, получаем: $G \leq H$. Наоборот, пусть $x \in H(X_0, X_1)$. Тогда выполнено (10), и по лемме 3 для любого $\varepsilon > 0$ существует представление $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$ такое, что для $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(f_0(2^k), f_1(2^k), u_k; X_0, X_1) &\leq \\ &\leq (\gamma + \varepsilon) \mathcal{X}(f_0(2^k), f_1(2^k), x; X_0, X_1). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу предложения 1, $x \in G(X_0, X_1)$ и $\|x\|_{G(X_0, X_1)} \leq (\gamma + \varepsilon) \|x\|_{H(X_0, X_1)}$.

Итак, $G = H$. Обозначим через $F_{f_0, f_1, E}$ и. ф. G . В силу определения $F_{f_0, f_1, E}$ обладает требуемыми свойствами. Докажем его единственность. Пусть для некоторого и. ф. F_1 $F_1(\overrightarrow{l_1(f^{-1})}) = F_1(\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}) = E$. Тогда из экстремальности G и H $G \leq F_1$ и $F_1 \leq H$, откуда $F_1 = F_{f_0, f_1, E}$. Теорема 1 доказана.

Построенный в теореме 1 функтор $F_{f_0, f_1, E}$ зависит, вообще говоря, от трех параметров: f_0 , f_1 и E . При некоторых предположениях относительно E эта зависимость существенно упрощается. Напомним, что БИП последовательностей E называется симметричным, если для любого инъективного отображения $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a = (a_j)_{j=-\infty}^{\infty} \in E$ и

$$\|a_\pi\|_E = \|a\|_E \quad (a_\pi = (a_{\pi(j)})_{j=-\infty}^{\infty}).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть E — симметричное пространство последовательностей, f_0 , f_1 , h_0 , h_1 , g — квазивознущие

функции на $(0, \infty)$, функции $f_1 \cdot f_0^{-1}$ и $h_1 \cdot h_0^{-1}$ возрастают $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$, $\gamma_{h_1 \cdot h_0^{-1}} > 0$ и $0 < \gamma_g \leq \delta_g < 1$. Тогда $F_{f_0, f_1, E_f} = F_{h_0, h_1, E_h}$ где $E_f = E(f_g^{-1})$ и $E_h = E(h_g^{-1})$.

Для доказательства будут необходимы две леммы, первая из которых доказывается стандартно.

ЛЕММА 4. Пусть (E_0, E_1, E) — тройка БИП последовательностей, v — положительная функция на $(0, \infty)$.

Тогда $\vec{O}_E = \vec{O}_{E(v)}$, где $\vec{E} = (E_0, E_1)$, $\vec{E}(v) = (E_0(v), E_1(v))$.

ЛЕММА 5. Предположим, что функции f_0, f_1, g и $w = f_1 \cdot f_0^{-1}$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Для $A > 0$, $B > 0$ определим множество $V(A, B) \subset \mathbb{Z}$

$$V(A, B) = \{k: A \leq g(w(2^k)) \leq B\}.$$

Тогда для любого $C_1 > 0$ существует $C_2 > 0$ такое, что из $B \cdot A^{-1} \leq C_1$ следует: $\text{card } V(A, B) \leq C_2$.

Доказательство. Так как $\gamma_w > 0$ и $\gamma_g > 0$, то $\lim_{t \rightarrow 0+} w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{w(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{g(t)} = 0$. Следовательно, для любых $A > 0$ и $B > 0$ найдутся такие $n = 0, \pm 1, \dots$ и $m = 0, 1, \dots$, что

$$\begin{aligned} g(w(2^n)) &\leq A \leq g(w(2^{n+1})), \\ g(w(2^{n+m-1})) &\leq B \leq g(w(2^{n+m})). \end{aligned}$$

Ясно, что $\text{card } V(A, B) \leq m + 1$, и, если $BA^{-1} \leq C_1$, то

$$\frac{g(w(2^{n+m}))}{g(w(2^n))} \leq 4 \frac{B}{A} \leq 4C_1.$$

По условиям леммы для некоторого $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{g(w(2^k))}{g(w(2^k))} \leq \frac{g(\mathcal{M}_w(1/2)w(2^{k+1}))}{g(w(2^{k+1}))} \leq \mathcal{M}_g\left(\mathcal{M}_w\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq 2^{-\varepsilon}$$

Поэтому

$$2^{m\varepsilon} \leq \frac{g(w(2^{n+m}))}{g(w(2^n))} \leq 4 \cdot C_1,$$

откуда

$$\text{card } V(A, B) \leq m + 1 \leq \varepsilon^{-1} \cdot \log_2(4C_1) + 1 = C_2.$$

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 3 из [7] E_f интерполяционно между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$ (соответственно E_h — между $\overrightarrow{l_1(h^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(h^{-1})}$). Кроме того, по теореме 1 и лемме 4 F_{f_0, f_1, E_f} — наименьший среди и. ф. F , удовлетворяющих условию

$$F\left(l_1^r(g(f_1 \cdot f_0^{-1})), l_1\left(\frac{g(f_1 \cdot f_0^{-1})}{f_1 \cdot f_0^{-1}}\right)\right) \supset E.$$

Аналогичное утверждение верно и для F_{h_0, h_1, E_h} . Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать справедливость вложения

$$F_{h_0, h_1, E_h}\left(l_1(g(f_1 \cdot f_0^{-1})), l_1\left(\frac{g(f_1 \cdot f_0^{-1})}{f_1 \cdot f_0^{-1}}\right)\right) \supset E, \quad (13)$$

чтобы затем воспользоваться экстремальностью и. ф. F_{f_0, f_1, E_f} и равноправностью f_i и h_i .

Так как $\gamma_{h_1 \cdot h_0^{-1}} > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h_1(t)}{h_0(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_0(t)}{h_1(t)} = 0,$$

и поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}$ существует

$$j_k = \min \left\{ j: \frac{f_1(2^k)}{f_0(2^k)} \leq \frac{h_1(2^{j_k})}{h_0(2^{j_k})} \right\}.$$

Далее, из определения j_k и квазивогнутости функций $h_1 \cdot h_0^{-1}$ и g следует:

$$\frac{1}{2} g\left(\frac{h_1(2^{j_k})}{h_0(2^{j_k})}\right) \leq g\left(\frac{f_1(2^k)}{f_0(2^k)}\right) \leq g\left(\frac{h_1(2^{j_k})}{h_0(2^{j_k})}\right) \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{h_0(2^{j_k})}{h_1(2^{j_k})} g\left(\frac{h_1(2^{j_k})}{h_0(2^{j_k})}\right) &\leq \\ &\leq \frac{f_0(2^k)}{f_1(2^k)} g\left(\frac{f_1(2^k)}{f_0(2^k)}\right) \leq 2 \cdot \frac{h_0(2^{j_k})}{h_1(2^{j_k})} g\left(\frac{h_1(2^{j_k})}{h_0(2^{j_k})}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $N_j = \text{card } \{k: j_k = j\}$. Докажем, что $N = \sup_{j \in \mathbb{Z}} N_j < \infty$. Для этого зафиксируем j и обозначим

$$A = g \left(\frac{h_1(2^j)}{h_0(2^j)} \right).$$

Тогда, если k — такое, что $j_k = j$, то ввиду (14)

$$\frac{1}{2} A \leq g \left(\frac{f_1(2^k)}{f_0(2^k)} \right) \leq A.$$

Поэтому по лемме 5 в ее обозначениях

$$N_j \leq N \left(\frac{1}{2} A, A \right) \leq C,$$

где $C > 0$ не зависит от A и, следовательно, от $j \in \mathbb{Z}$. Итак, $N < \infty$.

Определим теперь для каждого $a = (a_k) \in E$ последовательность $a' = (a'_j)_{j=-\infty}^\infty$:

$$a'_j = \begin{cases} \max_{j_k=j} |a_k|, & j \in V, \\ 0, & j \notin V, \end{cases}$$

где V — множество всех $j \in \mathbb{Z}$, для которых $j_k = j$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. Так как E — симметричное пространство, то $a' = (a'_j) \in E$ и $\|a'\|_E \leq \|a\|_E$. Определим линейный оператор T :

$$T(z_j) = \left(a_k \cdot \frac{z_{j_k}}{a'_{j_k}} \right)_{k=-\infty}^\infty.$$

Тогда $T(a'_j) = (a_k)$, и T непрерывен из $l_1(g(h_1 \cdot h_0^{-1}))$ в $l_1(g(f_1 \cdot f_0^{-1}))$. Действительно, в силу (14),

$$\begin{aligned} \|Tz\|_{l_1(g(f_1/f_0))} &= \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{|a_k z_{j_k}|}{a'_{j_k}} g \left(\frac{f_1(2^k)}{f_0(2^k)} \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{|a_k z_{j_k}|}{a'_{j_k}} g \left(\frac{h_1(2^{j_k})}{h_0(2^{j_k})} \right) = \\ &= \sum_{j \in V} \frac{|z_j|}{a'_j} \sum_{j_k=j} |a_k| g \left(\frac{h_1(2^j)}{h_0(2^j)} \right) \leq N \|z\|_{l_1(g(h_1/h_0))}. \end{aligned}$$

Точно таким же образом, но только с помощью соотношения (15) доказывается, что

$$\|Tz\|_{l_1}\left(\frac{f_0}{f_1}g\left(\frac{f_1}{f_0}\right)\right) \leq 2 \cdot N \|z\|_{l_1}\left(\frac{h_0}{h_1}g\left(\frac{h_1}{h_0}\right)\right).$$

Так как и. ф. F_{h_0, h_1, E_h} — орбита E относительно пары $\left(l_1(g(h_1 \cdot h_0^{-1})), l_1\left(\frac{g(h_1 \cdot h_0^{-1})}{h_1 \cdot h_0^{-1}}\right)\right)$ (см. теорему 1 и лемму 4), то тем самым соотношение (13), а с ним, как уже отмечалось, и теорема 2 доказаны.

С л е д с т в и е 1. Пусть E — симметричное БИП, f_0, f_1 и g — квазивогнутые функции на $(0, \infty)$, $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает, $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$, $0 < \gamma_g \leq \delta_g < 1$. Тогда для любой банаховой пары (X_0, X_1)

$$F_{f_0, f_1, E(f_g^{-1})}(X_0, X_1) = (X_0, X_1)_{E(g^{-1})}^{\mathcal{K}} = (X_0, X_1)_{E(g^{-1})}^{\mathcal{J}}.$$

С л е д с т в и е 2. В условиях следствия 1 для любых $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$

$$(l_{q_0}(f_0^{-1}), l_{q_1}(f_1^{-1}))_{E(g^{-1})}^{\mathcal{K}} = (l_{q_0}(f_0^{-1}), l_{q_1}(f_1^{-1}))_{E(g^{-1})}^{\mathcal{J}} = E(f_g^{-1}). \quad (16)$$

Из теорем 1 и 2 следует непосредственно

ТЕОРЕМА 3. Пусть f_0, f_1 и g — квазивогнутые функции на $(0, \infty)$, $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает, $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$, $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$; E — симметричное БИП последовательностей. Тогда множество $\{\overrightarrow{l_1(f^{-1})}, \overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}\}$ является достаточным для и. ф. $(\cdot, \cdot)_{E(g^{-1})}^{\mathcal{K}} = (\cdot, \cdot)_{E(g^{-1})}^{\mathcal{J}}$.

3. Случай симметричных функциональных пространств.

Обозначим через $\overrightarrow{\Lambda(f)}$ банахову пару пространств Лоренца $(\Lambda(f_0), \Lambda(f_1))$, через $\overrightarrow{M(f)}$ — пару пространств Марцинкевича $(M(f_0), M(f_1))$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть f_0, f_1 и g — вогнутые функции на $(0, \infty)$, $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает, $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$, $0 < \gamma_{f_i} \leq \delta_{f_i} < 1$ ($i = 0, 1$), $0 < \gamma_g \leq \delta_g < 1$, E — симметричное БИП последовательностей. Тогда $\overrightarrow{(\Lambda(f), M(f))}$ — множество, достаточное для и. ф. $(\cdot, \cdot)_{E(g^{-1})}^{\mathcal{K}}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится

Предложение 2. Предположим, что БИП последовательностей E_0 и E_1 интерполяционны между l_∞ и $l_\infty(1/t)$ и для любой $(a_k) \in E_0 \cup E_1$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k = 0.$$

Тогда из равенства $(L_1, L_\infty)_{E_0}^{\mathcal{H}} = (L_1, L_\infty)_{E_1}^{\mathcal{H}}$ следует: $E_0 = E_1$.

Доказательство. Ввиду симметричности условий относительно E_0 и E_1 достаточно показать, что $E_0 \subset E_1$.

Если $(a_j) \in E_0$, то последовательность (a_k) , где

$$a_k = \sup_{j \in \mathbb{Z}} [\min(1, 2^{k-j}) \cdot |a_j|]$$

также принадлежит E_0 (см. [10] или [11]), и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k = 0. \text{ Обозначим}$$

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k \chi_{[2^k, 2^{k+1})}(t).$$

Так как для любых $0 < t_1 < t_2 < \infty$

$$a(t_1) \leq a(t_2) \text{ и } \frac{a(t_2)}{t_2} \leq \frac{a(t_1)}{t_1},$$

то в силу [2, с. 69] $a(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\bar{a}(t)$, причем $\lim_{t \rightarrow 0+} \bar{a}(t) = \lim_{k \rightarrow -\infty} a'_k = 0$.

Следовательно, $\bar{a}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$, и, значит, ввиду [2, с. 108],

$$\bar{a}(t) = \int_0^t \bar{a}'(s) ds = \mathcal{H}(t, \bar{a}'; L_1, L_\infty).$$

Таким образом, $(\mathcal{H}(2^k, \bar{a}'; L_1, L_\infty)) \sim (a'_k)$, откуда $\bar{a}' \in (L_1, L_\infty)_{E_0}^{\mathcal{H}} = (L_1, L_\infty)_{E_1}^{\mathcal{H}}$ и $(a'_k) \in E_1$. Так как $|a_k| \leq a'_k$, то в итоге: $(a_k) \in E_1$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 4. Итак, предположим, что для и. ф. F выполнено:

$$F(\overrightarrow{\Lambda(f)}) = (\overrightarrow{\Lambda(f)})_{E(g^{-1})}^{\mathcal{H}}, \quad F(\overrightarrow{M(\tilde{f})}) = (\overrightarrow{M(\tilde{f})})_{E(g^{-1})}^{\mathcal{H}}.$$

Ввиду [7, теорема 3], пространства $l_1(f_i^{-1})$ и $l_\infty(f_i^{-1})$ интерполяционны между парами $(l_1, l_1(1/t))$ и $(l_\infty, l_\infty(1/t))$. Кроме того (см. [8]),

$$\Lambda(f_i) = (L_1, L_\infty)_{l_1(f_i^{-1})}^{\mathcal{H}}, \quad M(\tilde{f}_i) = (L_1, L_\infty)_{l_\infty(f_i^{-1})}^{\mathcal{H}}.$$

Поэтому, в силу реитерационных соображений (см. [12, следствие 3] или [10, следствие 14.1]), а также следствия 2 получаем:

$$(L_1, L_\infty)_{F(l_1(f^{-1}))}^{\mathcal{H}} = (L_1, L_\infty)_{F(l_\infty(f^{-1}))}^{\mathcal{H}} = (L_1, L_\infty)_{E(f_g^{-1})}^{\mathcal{H}}.$$

Непосредственная проверка показывает, что для пространств $F(l_1(f^{-1}))$, $F(l_\infty(f^{-1}))$ и $E(f_g^{-1})$ выполнены условия предложения 2, и, таким образом, $F(l_1(f^{-1})) = F(l_\infty(f^{-1})) = E(f_g^{-1})$. Следовательно, по теореме 3 $F = (\cdot, \cdot)_{E(f_g^{-1})}^{\mathcal{H}}$. Теорема 4 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Семенову Е. М. и Овчинникову В. И. за полезные обсуждения.

Куйбышевский государственный университет

Поступило
10.12.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берг И., Лёфстрем И. Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.
- [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.
- [3] Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces.— Notes Math., 1968, v. 39, p. 1—86.
- [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
- [5] Aronszajn N., Gagliardo E. Interpolation spaces and interpolation methods.— Ann. Math. Pure Appl., 1964, v. 24, № 2, p. 113—190.
- [6] Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation.— J. Functional Analysis, 1981, v. 44, № 1, p. 50—73.
- [7] Асташкин С. В. Описание интерполяционных пространств между $(l_1(\omega^0), l_1(\omega^1))$ и $(l_\infty(\omega^0), l_\infty(\omega^1))$.— Математические заметки, 1984, т. 35, вып. 4, p. 497—503.
- [8] Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И. Основы теории интерполяции линейных операторов.— В сб.: Геометрия линейных пространств и теория операторов.— Ярославль: 1977, с. 31—74.
- [9] Асекритова И. У. О $\mathcal{H}$ -функционале пары $(\mathcal{H}_\Phi(\vec{X}), \mathcal{H}_{\Phi_1}(\vec{X}))$ В сб.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных.— Ярославль: 1980, с. 3—32.
- [10] Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. Функторы вещественной интерполяции.— Деп. ВИНТИ, № 2620—81.
- [11] Nilsson P. Reiteration theorems for real interpolation and approximation spaces.— Lund, LTH, 1982.
- [12] Дмитриев В. И., Овчинников В. И. Об интерполяции в пространствах вещественного метода.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 4, с. 794—797.