

УДК 517.982.27

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКТОРАХ

С. В. А с т а ш к и н

Одним из наиболее важных результатов теории интерполяции линейных операторов является теорема реитерации для вещественного метода, принадлежащая Ж.-Л. Лионсу и Я. Петре (см. [1] или [2], с. 66—70). Из нее, в частности, следует, что значение интерполяционного функтора $(\cdot, \cdot)_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$) на паре пространств Лоренца $L_{q, \Gamma}$ с различными первыми индексами с точностью до изоморфизма не зависит от вторых индексов. В данной заметке приведены результаты, относящиеся как к выяснению внутренних причин этого явления, так и к описанию класса интерполяционных функторов, обладающих подобными свойствами.

Пусть функции g , f_0 и f_1 положительны на полуоси $(0, \infty)$; E — банахово идеальное пространство (БИП) двусторонних последовательностей действительных чисел $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$. Через g^{-1} далее всюду будет обозначаться функция $1/g$, через $E(g)$ — пространство последовательностей с «весом» $(g(2^k))_{k=-\infty}^{\infty}$, т. е.

$$\|(a_k)\|_{E(g)} = \|(a_k \cdot g(2^k))\|_E,$$

и, наконец, через $\overrightarrow{l_p(f^{-1})}$ — банахова пара $(l_p(f_0^{-1}), l_p(f_1^{-1}))$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Введем основное определение. Будем называть интерполяционный функтор [2] F устойчивым (пишем: $F \in C$), если $F \overrightarrow{(l_1(f^{-1}))} = F \overrightarrow{(l_{\infty}(f^{-1}))}$ для любой пары квазивогнутых на $(0, \infty)$ функций f_0 и f_1 , таких, что функция $f_1 f_0^{-1}$ возрастает и ее нижний показатель растяжения $\gamma_{f_1 f_0^{-1}} > 0$.

Необходимость последнего условия в определении устойчивого функтора становится понятной после следующего результата.

Т е о р е м а 1. Пусть f_0 и f_1 — положительные функции на $(0, \infty)$, $f_1 f_0^{-1}$ возрастает. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) существует БИП E такое, что тройка $(l_1(f_0^{-1}), l_1(f_1^{-1}), E)$ интерполяционна относительно тройки $(l_{\infty}(f_0^{-1}), l_{\infty}(f_1^{-1}), E)$ [2];
- 2) $\gamma_{f_1 f_0^{-1}} > 0$.

Теоремы 2 и 3 являются основными. При их доказательстве существенно используется метод интерполяционных орбит [3, 4].

Т е о р е м а 2. Интерполяционный функтор $F \in C$ тогда и только тогда, когда найдется пара квазивогнутых функций g_0 и g_1 , такая, что $g_1 g_0^{-1}$ возрастает и $F \overrightarrow{(l_1(g^{-1}))} = F \overrightarrow{(l_{\infty}(g^{-1}))}$.

Т е о р е м а 3. Класс устойчивых интерполяционных функторов совпадает с подклассом $\mathcal{H}$ — метода вещественной интерполяции [5], состоящим из функторов вида $(\cdot, \cdot)_{E, \mathcal{H}}$, где E — БИП последовательностей, в котором непрерывен оператор Кальдерона

$$Q, Qa = (Qa)_k, (Qa)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \min(1, 2^{k-j}).$$

С л е д с т в и е 1. Пусть G — симметричное пространство последовательностей [6], h — квазивогнутая функция на $(0, \infty)$.

Интерполяционный функтор $(\cdot, \cdot)_{G(h^{-1}), \mathcal{H}}$ устойчив тогда и только тогда, когда показатели растяжения функции h нетривиальны, т. е. $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$.

Приведем теперь одно обобщение ранее упоминавшейся теоремы итерации Лионса—Петре.

Т е о р е м а 4. Предположим, что f_0 и f_1 — квазивогнутые функции на $(0, \infty)$, $f_1 f_0^{-1}$ возрастает и $\gamma_{f_1 f_0^{-1}} > 0$.

Тогда для любого устойчивого функтора F и всякой банаховой пары (X_0, X_1)

$$F((X_0, X_1)_{l_1(f_0^{-1})}^{\mathcal{F}}, (X_0, X_1)_{l_1(f_1^{-1})}^{\mathcal{F}}) = F((X_0, X_1)_{l_\infty(f_0^{-1})}^{\mathcal{X}}, (X_0, X_1)_{l_\infty(f_1^{-1})}^{\mathcal{X}}) = (X_0, X_1)_E^{\mathcal{X}},$$

$$\text{где } E = F(l_1(f^{-1})) = F(l_\infty(f^{-1})).$$

С л е д с т в и е 2. Пусть функции f_0 и f_1 удовлетворяют условиям теоремы 4, G — симметричное пространство последовательностей, h — квазивогнутая функция на $(0, \infty)$, $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$.

Тогда для любой банаховой пары (X_0, X_1) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} ((X_0, X_1)_{l_1(f_0^{-1})}^{\mathcal{F}}, (X_0, X_1)_{l_1(f_1^{-1})}^{\mathcal{F}})_{G(h^{-1})}^{\mathcal{X}} &= ((X_0, X_1)_{l_\infty(f_0^{-1})}^{\mathcal{X}}, \\ (X_0, X_1)_{l_\infty(f_1^{-1})}^{\mathcal{X}})_{G(h^{-1})}^{\mathcal{X}} &= (X_0, X_1)_{G(f_h^{-1})}^{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } f_h = f_0 h(f_1 f_0^{-1}).$$

Для $G = l_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) при некоторых дополнительных условиях (оказавшихся, как это видно теперь, излишними) последний результат был доказан в [3] и в [7]. В полном виде обсуждаемый частный случай следствия 2 анонсирован в работе автора [8]. Заметим также, что в случае $G = l_p$ и степенных f_0, f_1 и h следствие 2 превращается в теорему ре-итерации Лионса—Петре.

Автор благодарен Е. М. Семенову и В. И. Овчинникову за полезные обсуждения.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Lions J. L., Peetre J. — In st. Hautes Etudes Publ. Math., 1964, t. 19, p. 5—68.
2. Берг И., Лефстрем И. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980.
3. Janson S. — J. Funct. Anal., 1981, t. 44, v. 1, p. 50—73.
4. Овчинников В. И. — Функцион. анализ и его прил., 1976, т. 10, вып. 4, с. 45—54.
5. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. — ДАН СССР, 1981, т. 256, № 1, с. 14—17.
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
7. Gustavsson J. — Math. Scand., 1978, t. 42, № 2, p. 289—305.
8. Асташкин С. В. — ДАН Уз ССР, 1983, № 4, с. 10—11.

Куйбышевский государственный
университет

Поступило в редакцию
27 марта 1984 г.