

ОПИСАНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ МЕЖДУ $(l_1(\omega^0), l_1(\omega^1))$ и $(l_\infty(\omega^0), l_\infty(\omega^1))$

С. В. Асташкин

Пусть E — банахово идеальное пространство двусторонних последовательностей действительных чисел $a = (a_k)_{k=-\infty}^\infty$; $\omega^0 = (\omega_k^0)_{k=-\infty}^\infty$ и $\omega^1 = (\omega_k^1)_{k=-\infty}^\infty$ — две последовательности неотрицательных чисел. В [1] показано, что E интерполяционно между $(l_1(\omega^0), l_1(\omega^1))$ и $(l_\infty(\omega^0), l_\infty(\omega^1))$ тогда и только тогда, когда в этом пространстве непрерывен оператор Q , $Qa = (Qa)_k$, где

$$(Qa)_k = \sum_{j=-\infty}^\infty a_j \cdot \min_{i=0,1} \left\{ \frac{\omega_j^i}{\omega_k^i} \right\} \quad (a = (a_j) \in E). \quad (1)$$

В этой статье получен критерий непрерывности Q в том случае, когда $\omega^i = \left(\frac{1}{f_i(2^k)} \right)_{k=-\infty}^\infty$, где f_i — неотрицательная вогнутая функция на $(0, \infty)$ ($i = 0, 1$). Тем самым дано эффективное описание пространств, интерполяционных между соответствующими парами.

1°. Определения и обозначения. Пусть (A_0, B_0) и (A_1, B_1) — две банаховы пары [2]. Банахово пространство E такое, что

$$A_i \cap B_i \subset E \subset A_i + B_i \quad (i = 0, 1),$$

называется интерполяционным между (A_0, B_0) и (A_1, B_1) , если любой линейный оператор, непрерывный из A_0 в A_1 и из B_0 в B_1 , непрерывен в E .

Для любой неотрицательной функции f на $(0, \infty)$ ее

функция растяжения M_f определяется равенством

$$M_f(t) = \sup_{0 < s < \infty} \frac{f(st)}{f(s)} \quad (0 < t < \infty),$$

M_f полумультипликативна, и поэтому существуют числа [3, стр. 75].

$$\gamma_f = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln M_f(t)}{\ln t} \quad \text{и} \quad \delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(t)}{\ln t},$$

называемые нижним и верхним показателями растяжения функции f . Если f — вогнутая функция, то $0 \leq \gamma_f \leq \delta_f \leq 1$ [3, стр. 76].

Пусть $S(Z)$ — линейное пространство всех двусторонних числовых последовательностей, $E \subset S(Z)$ — банахово идеальное пространство (БИП) [4, глава 4]. Предположим, что в E для любого $k = 0, \pm 1, \dots$ непрерывен оператор сдвига $P_k(a_j) = (a_{k+j})_{j=-\infty}^{\infty}$. Так как функция $h(2^k) = \|P_k\|_{E \rightarrow E}$ полумультипликативна на множестве $\{2^k, k = 0, \pm 1, \dots\}$, то существуют числа [3, стр. 75].

$$\mu_E = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\ln \|P_k\|_{E \rightarrow E}}{k} \quad \text{и} \quad \nu_E = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|P_k\|_{E \rightarrow E}}{k},$$

причем $-\infty < \mu_E \leq \nu_E < \infty$.

Если $\mu_E = \nu_E = 0$ (иначе говоря, $\sup_{k=0, \pm 1, \dots} \|P_k\|_{E \rightarrow E} < \infty$), то будем называть E пространством, сильно инвариантным относительно сдвига.

Пусть E — БИП последовательностей, f — неотрицательная функция на $(0, \infty)$. Тогда $E(f)$ — пространство с нормой

$$\|(a_j)\|_{E(f)} = \|(a_j \cdot f(2^j))\|_E.$$

В дальнейшем всюду предполагается, что f_0, f_1 и h — неотрицательные вогнутые функции на $(0, \infty)$ и $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает от 0 до ∞ .

В заключение введем следующие обозначения:

$$h^{-1} = \frac{1}{h}, \quad \bar{h}(t) = \frac{t}{h(t)}, \quad f_h = f_0 \cdot h(f_1 \cdot f_0^{-1}), \quad \mu_E^i = \mu_{E(f_i)}, \\ \nu_E^i = \nu_{E(f_i^{-1})} \quad (i = 0, 1), \quad \overline{l_p(f^{-1})} = (l_p(f_0^{-1}), l_p(f_1^{-1})).$$

2°. Формулировка результатов. ТЕОРЕМА 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) БИП E интерполяционно между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$;

2) $\mu_E^0 > 0$, $\nu_E^1 < 1$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы существовало пространство, интерполяционное между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_{f_1, f_0^{-1}} > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G — БИП, сильно инвариантное относительно сдвига, $\gamma_{f_1, f_0^{-1}} > 0$. Тогда $G(f_h^{-1})$ интерполяционно между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$, если и только если $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$.

ТЕОРЕМА 4. Если $\gamma_{f_i} = \delta_{f_i}$ ($i = 0, 1$), то БИП E интерполяционно между $\overrightarrow{l_1(f^{-1})}$ и $\overrightarrow{l_\infty(f^{-1})}$ тогда и только тогда, когда $\gamma_{f_0} < \mu_E \leq \nu_E < \gamma_{f_1}$.

3°. Доказательства. Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Стандартными рассуждениями устанавливается справедливость первого из них.

ЛЕММА 1. Пусть E_0, E_1, F_0, F_1 и G — БИП последовательностей, f — неотрицательная функция на $(0, \infty)$. Тогда G интерполяционно между (E_0, E_1) и (F_0, F_1) , если и только если $G(f)$ интерполяционно между $(E_0(f), E_1(f))$ и $(F_0(f), F_1(f))$.

Назовем последовательность $(a_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ квазивиогнутой, если $a_j \geq 0$ и $a_j \leq a_{j+1} \leq 2 \cdot a_j$ ($j = 0, \pm 1, \dots$).

ЛЕММА 2. Пусть E — БИП, интерполяционное между $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$ и $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$, $T: E \rightarrow S'_1(\mathbb{Z})$ — монотонный линейный оператор (т. е. из $a = (a_j)$, $a_j \geq 0$, следует $Ta = (Ta)_k$, $(Ta)_k \geq 0$). Предположим, что существует $C > 0$ такое, что для любой квазивиогнутой $a = (a_j) \in E$

$$\|Ta\|_E \leq C \|a\|_E.$$

Тогда найдется $C_1(E) > 0$ такое, что для любого $a \in E$

$$\|Ta\|_E \leq C_1(E) \cdot C \cdot \|a\|_E.$$

Доказательство. Для любого $a = (a_j) \in E$ последовательность $\hat{a} = (\hat{a}_k)$, где

$$\hat{a}_k = \sup_{-\infty < j < \infty} [\min(1, 2^{k-j}) \cdot |a_j|],$$

квазивиогнутая, и $|a_k| \leq \hat{a}_k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). В силу интерполяционности E между $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$ и $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$

существует $C_1(E) > 0$, для которого $\|\hat{a}\|_E \leq C_1(E) \cdot \|a\|_E$ [5, стр. 36].

Таким образом, ввиду монотонности T

$$\|Ta\|_E \leq \|T\hat{a}\|_E \leq C\|\hat{a}\|_E \leq C_1(E) \cdot C \cdot \|a\|_E.$$

ЛЕММА 3. Если $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$, то следующие условия эквивалентны:

- а) $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$;
- б) $\gamma_{f_h \cdot f_0^{-1}} > 0$, $\delta_{f_h \cdot f_1} < 1$.

Доказательство. б) $\rightarrow$ а). Так как $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает от 0 до ∞ , а $t^{-1} \cdot f_1(t)$ убывает [3, стр. 67], то для $0 < s \leq 1$

$$M_h(s) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{h\left(s \cdot \frac{f_1(t)}{f_0(t)}\right)}{h\left(\frac{f_1(t)}{f_0(t)}\right)} \leq \sup_{0 < t < \infty} \frac{h\left(\frac{f_1(st)}{f_0(st)}\right)}{h\left(\frac{f_1(t)}{f_0(t)}\right)} = M_{f_h \cdot f_0^{-1}}(s).$$

Так как $\gamma_{f_h \cdot f_0^{-1}} > 0$, то отсюда следует $\gamma_h > 0$.

Используя соотношение

$$\bar{h}(f_1 \cdot f_0^{-1}) = f_1 \cdot f_h^{-1} \quad (2)$$

и [3, стр. 144]

$$\delta_h = 1 - \gamma_{\bar{h}}, \quad \delta_{f_h \cdot f_1} = 1 - \gamma_{f_1 \cdot f_h^{-1}}. \quad (3)$$

точно так же получаем, что $\delta_h < 1$.

а) $\rightarrow$ б). Так как для $0 < s \leq 1$

$$M_{f_h \cdot f_0^{-1}}(s) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{h\left(\frac{f_1(st)}{f_0(st)}\right)}{h\left(\frac{f_1(t)}{f_0(t)}\right)} \leq M_h(M_{f_1 \cdot f_0^{-1}}(s)),$$

то из $\gamma_{f_1 \cdot f_0^{-1}} > 0$ и $\gamma_h > 0$ получаем, что $\gamma_{f_h \cdot f_0^{-1}} > 0$.

С помощью (2) и (3) так же доказывается и второе неравенство из б).

Доказательство теоремы 1. 1) $\rightarrow$ 2). По лемме 1 $E(f_0)$ интерполяционно между $(l_1, l_1(f_0 \cdot f_1^{-1}))$ и $(l_\infty, l_\infty(f_0 \cdot f_1^{-1}))$, и поэтому [1] в $E(f_0)$ непрерывен оператор Q из (1) для $\omega^0 = (1)_k$, $\omega^1 = (f_0(2^k)/f_1(2^k))_k$. Так как $f_1 \cdot f_0^{-1}$ возрастает, то отсюда следует, что в $E(f_0)$ непрерывен оператор Q_1 , $Q_1 a = (Q_1 a)_k = (\sum_{j \leq k} a_j)_k$.

Для квазивогнутой последовательности $a = (a_j) \in E(f_0)$, $k = 1, 2, \dots$, $j = 0, \pm 1, \dots$,

$$(P_{-k}a)_j = a_{j-k} \leq \frac{1}{k} \sum_{s=j-k}^j a_s \leq \frac{1}{k} (Q_1a)_j,$$

откуда

$$\|P_{-k}a\|_{E(f_0)} \leq \frac{\|Q_1\|}{k} \|a\|_{E(f_0)}. \quad (4)$$

Так как $E(f_0)$ интерполяционно между $(l_\infty, l_\infty(f_0 \cdot f_1^{-1}))$ и $(l_\infty, l_\infty(f_0 \cdot f_1^{-1}))$, а $l_\infty(f_0 \cdot f_1^{-1})$ — между $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$ и $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$ [1], то $E(f_0)$ интерполяционно между $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$ и $(l_\infty, l_\infty(t^{-1}))$. Таким образом, в силу (4) и леммы 2 существует $C_1(E, f_0)$ такое, что

$$\|P_{-k}\|_{E(f_0) \rightarrow E(f_0)} \leq k^{-1} \|Q_1\| C_1(E, f_0).$$

Поэтому [3, стр. 75] $\mu_E^0 > 0$.

Рассматривая пространство $E(\bar{f}_1^{-1})$, пары $(l_1(f_0^{-1} \cdot \bar{f}_1^{-1}), l_1(t^{-1}))$ и $(l_\infty(f_0^{-1} \cdot \bar{f}_1^{-1}), l_\infty(t^{-1}))$, а также оператор Q_2 , $Q_2a = (Q_2a)_k$, где

$$(Q_2a)_k = \sum_{j \geq k} 2^{k-j} a_j,$$

точно так же получим, что для $k = 1, 2, \dots$

$$\|P_k\|_{E(\bar{f}_1^{-1}) \rightarrow E(\bar{f}_0^{-1})} \leq k^{-1} 2^k \|Q_2\| C_1(E, f_1).$$

Отсюда опять с помощью [3, стр. 75] заключаем, что $v_E^1 < 1$.

2) $\rightarrow$ 1). Достаточно показать, что оператор Q из (1) в случае $\omega^i = (1/f_i(2^k))_k$ непрерывен в E [1]. В силу монотонности $f_1 \cdot f_0^{-1} Qa = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k$, где

$$b^k = \begin{cases} \left(f_0(2^j) \cdot P_k \left(\frac{a_j}{f_0(2^j)} \right) \right)_{j=-\infty}^{\infty}, & k=0, -1, \dots, \\ \left(f_1(2^j) \cdot P_k \left(\frac{a_j}{f_1(2^j)} \right) \right)_{j=-\infty}^{\infty}, & k=1, 2, \dots \end{cases}$$

Так как по условию $\mu_E^0 > 0$ и $v_E^1 < 1$, то для $k=0, -1, \dots$

$$\|b^k\|_E = \left\| P_k \left(\frac{a_j}{f_0(2^j)} \right) \right\|_{E(f_0)} \leq 2^{\varepsilon k} \|a\|_E,$$

для $k = 1, 2, \dots$

$$\|b^k\|_E = 2^{-k} \|P_k(a_j \cdot \bar{f}_1(2^j))\|_{E(\bar{f}_1^{-1})} \leq 2^{-\varepsilon k} \|a\|_E,$$

где $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\|Qa\|_E \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|b^k\|_E \leq C \|a\|_E.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $\gamma_{f_1, f_0^{-1}} > 0$, то по лемме 3

$$\gamma_{f_h, f_0^{-1}} > 0, \quad \delta_{f_h, \bar{f}_1} < 1, \quad (5)$$

где $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$.

Пусть G — любое пространство, сильно инвариантное относительно сдвига. Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что

$$\mu_E^0 = \gamma_{f_h, f_0^{-1}}, \quad v_E^1 = \delta_{f_h, \bar{f}_1}, \quad (6)$$

где $E = G(\bar{f}_h^{-1})$. Следовательно, в силу (5) и теоремы 1 E интерполяционно между $\bar{l}_1(\bar{f}_h^{-1})$ и $\bar{l}_\infty(\bar{f}_h^{-1})$.

Докажем обратное. Пусть E — БИП, интерполяционное между $\bar{l}_1(\bar{f}_h^{-1})$ и $\bar{l}_\infty(\bar{f}_h^{-1})$, $e_j = (\dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots)$ ($j = 0, \pm 1, \dots$). Так как $P_k e_j = e_{j-k}$ ($j, k = 0, \pm 1, \dots$) и по теореме 1 $\mu_E^0 > 0$, $v_E^1 < 1$, то для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} M_{f_1, f_0^{-1}}(2^k) &\leq 2 \sup_{j=0, \pm 1, \dots} \frac{f_1(2^{j-k}) \cdot f_0(2^j)}{f_0(2^{j-k}) \cdot f_1(2^j)} = \\ &= 2 \sup_{j=0, \pm 1, \dots} \frac{\|e_j\|_{E(f_0)} \cdot \|e_{j-k}\|_{E(f_1)}}{\|e_{j-k}\|_{F(f_0)} \cdot \|e_j\|_{E(f_1)}} \leq 2^{1-k} \sup_{j=0, \pm 1, \dots} \frac{\|P_{-k} e_{j-k}\|_{E(f_0)}}{\|e_{j-k}\|_{E(f_0)}} \cdot \\ &\quad \cdot \sup_{j=0, \pm 1, \dots} \frac{\|P_k e_j\|_{E(\bar{f}_1^{-1})}}{\|e_j\|_{E(\bar{f}_1^{-1})}} \leq C \cdot 2^{-\varepsilon k}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$. Отсюда $\gamma_{f_1, f_0^{-1}} > 0$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из леммы 3, соотношения (6) и теоремы 1.

Пример. Пусть f_0, f_1 и h — неотрицательные вогнутые функции на $(0, \infty)$, $\gamma_{f_1, f_0^{-1}} > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Из тео-

ремы 3 мы получаем, что пространство $l_p(f_h^{-1})$ интерполяционно между $\overline{l_1(f^{-1})}$ и $\overline{l_\infty(f^{-1})}$ тогда и только тогда, когда $0 < \gamma_h \leq \delta_h < 1$.

Доказательство теоремы 4 следует из теоремы 1 и двух неравенств, справедливость которых проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{f_0}(2^k)} \|P_{-k}\|_{E(f_0) \rightarrow E(f_0)} &\leq \|P_{-k}\|_{E \rightarrow E} \leq \\ &\leq M_{f_0}(2^{-k}) \|P_{-k}\|_{E(f_0) \rightarrow E(f_0)}, \\ \frac{2^{-k}}{M_{f_1}(2^{-k})} \|P_k\|_{E(\bar{f}_1^{-1}) \rightarrow E(\bar{f}_1^{-1})} &\leq \|P_k\|_{E \rightarrow E} \leq \\ &\leq 2^{-k} M_{f_1}(2^k) \|P_k\|_{E(\bar{f}_1^{-1}) \rightarrow E(\bar{f}_1^{-1})} \quad (k = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

В заключение автор выражает благодарность Е. М. Семенову за постоянную помощь и внимание к работе.

Воронежский государственный
университет

Поступило
28.X.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] О в ч и н н и к о в В. И., Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика, Функци. анализ и его прилож., 10, № 4 (1976), 78—85.
- [2] Б е р г И., Л ё ф ф с т р ё м И., Интерполяционные пространства. Введение, М., «Мир», 1980.
- [3] К р е й н С. Г., П е т у н и н Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов, М., «Наука», 1978.
- [4] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, М., «Наука», 1977.
- [5] Б р у д н ы й Ю. А., К р у г л я к Н. Я., Функторы вещественной интерполяции, Деп. ВИНТИ, № 2620-81.